Chapitre I

Généralités sur les systèmes non linéaires

I.1. INTRODUCTION

Un système non linéaire commandé est un ensemble d'équations (différentielles par exemple) non linéaires décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs.

On en connaît de nombreux exemples parmi les systèmes mécaniques ou chimiques: satellites, avions, automobiles, machines-outils, régulateurs thermiques, réacteurs chimiques, procédés biotechnologiques ou agro-alimentaires…

Les entrées peuvent être choisies en boucle ouverte, c'est-à-dire ne dépendant que du temps, ou en boucle fermée, c'est-à-dire comme des fonctions des variables mesurées, appelées observations, qui tiennent compte de l'état du système à chaque instant.

Un tel système est non linéaire s'il n'est pas équivalent à un système linéaire dans un sens à préciser. Plusieurs relations d'équivalence peuvent être introduites, donnant des classifications très différentes si le système est commandé ou non. Dans le cas non commandé on classe les comportements par rapport à la stabilité et l'instabilité linéaires et on fait apparaître les dynamiques centres (ni linéairement stable ni linéairement instable) au voisinage d'un point d'équilibre ou d'une orbite périodique. Dans le cas commandé, beaucoup plus compliqué, l'équivalence à un système linéaire décrit une propriété de l'ensemble des trajectoires du système que l'on appellera platitude.

Au-delà de l'analyse des types de comportement des systèmes, se pose le problème de leur utilisation. Un objectif de commande se traduit par la donnée d'une ou plusieurs trajectoires de référence à suivre (boucle ouverte) et, en boucle fermée, par certaines exigences sur la vitesse de poursuite, l'atténuation des perturbations, l'insensibilité aux erreurs et variations paramétriques et la précision du suivi. Bien sur, les réglages de la boucle ouverte et de la boucle fermée interagissent de façon complexe, surtout dans le contexte non linéaire, mais on peut dans certains cas, arriver à rendre ces deux aspects aussi indépendants que possible pour en faciliter la mise au point. Dans de nombreux cas, en outre, le nombre, la technologie et l'emplacement des capteurs devant permettre de fermer la boucle ne sont pas donnés a priori et entrent dans la conception de la boucle fermée.

I.2. SYSTEMES NON LINEAIRES

Un système est non linéaire s'il ne vérifie pas le principe de superposition. Les conditions de proportionnalité et d'additivité ne s'appliquent plus aux systèmes non linéaires. Lors de l'étude des systèmes non linéaires on se heurte à plusieurs difficultés :

-L'analyse par des fonctions de transfert est impossible,

-La notion des pôles disparaît,

-Un système non linéaire possède en général plusieurs points d'équilibre et l'étude de leur stabilité est plus complexe que dans le cas linéaire pour le quel le concept de stabilité est global.

La non linéarité d'un système peut être intrinsèque ou peut être isolée, c'est-à-dire que l'on peut avoir une association d'éléments à caractéristiques non linéaires à un système linéaire.

Comme pour les systèmes linéaires, il est possible de distinguer, aussi les modèles non linéaires par les caractères suivants [1] :

- A temps continu / A temps discret,
- Invariants dans le temps / Variants dans le temps,
- Monovariables / Multivariables,
- Déterministes / Stochastiques.

I.3. REPRESENTATION DES SYSTEMES LINEAIRES

Supposons que l'on dispose d'un modèle linéaire d'un procédé sous la forme d'une représentation d'état, la représentation d'état de ces systèmes, quand ils sont à temps continus, s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases} \tag{I.1}$$

Ou x, u et y représentants respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système, tel que: $x \in \Re^n$, $u \in \Re^m$ et $y \in \Re^p$; A, B, C et D sont des matrices de dimensions $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ et $p \times m$ respectivement

I.4. REPRESENTATION DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Un phénomène est dit non linéaire lorsque ses grandeurs caractéristiques reliées entres elles ne varient pas proportionnellement l'une par rapport a l'autre. Sont comportement peut alors être décrit par une expression, un modèle ou des équations faisant intervenir les variables autrement qu'au premier degré [2].

Aucun système physique n'est complètement linéaire, les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint. Certaine systèmes sont impossible à modélisé, même localement à des systèmes linéaire [2].

La représentation générale d'un système non linéaire est de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\,u(t) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{I.2}$$

Ou x, u et y représentants respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système. $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions non linéaire du vecteur d'état décrivent le système [3].

****** La forme la plus utilisée pour la représentation des systèmes non linéaires est la suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.3}$$

Ou t est le temps, $x(t) \in \Re^n$ et $u(t) \in \Re^m$ représentants respectivement les vecteurs d'état et de commande (d'entrée), tel que: $f : \Re^n \times \Re^m \times \Re_+ \to \Re^n$ est une fonction non linéaire.

I.4.1. Système autonome

Le système non linéaire (I.3) est dit autonome si la fonction f ne dépend pas explicitement du temps t, c'est-à-dire le système peut être écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.4}$$

Par contre, le système (I.3) est dit non autonome. Parfois on utilise le terme de 'invariant dans le temps' ou 'stationnaire' au lieu 'd'autonome' et 'variant dans le temps' à la place de 'non autonome'.

Dans le cas non autonome, si les variations des caractéristiques sont lentes, on pourra approximer le système par une séquence de systèmes autonomes [1].

I.4.2. Systèmes à structure variables

Lorsque la structure du système ou du correcteur utilisé prend d'une façon discontinue deux ou plusieurs expressions, la notion de système à structures variables intervient. Il en découle les définitions suivantes :

Définition 1. Un système à structure variable (VSS) : est un système dont la structure change pendant son fonctionnement, il est caractérisé par le choix d'une structure et d'une logique de commutation. Ce choix permet au système de commuter d'une structure à l'autre à tout instant. De plus un tel système peut avoir de nouvelles propriétés qui n'existent pas dans chaque structure.

Définition 2. Un système est dit à structure variable s'il admet une représentation par des équations différentielles du type :

$$\dot{x}(t)=\begin{cases} f_1(x) & \text{si la condition 1 est virefie} \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & \text{si la condition } n \text{ est virefie} \end{cases} \tag{I.5}$$

Où $f_i, i=1, 2, \ldots, n$ sont des fonctions appartenant à un ensemble de sous systèmes. Par conséquence, les systèmes à structures variables sont caractérisés par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation.

I.4.3. Points d'équilibre

Le point $x_e(t)\in\Re^n$ est dit point d'équilibre du système non linéaire non forcé :

$$\dot{x}(t)=f(x(t),t) \qquad \forall t\geq 0 \tag{I.6}$$

Si

$$\dot{x}(t)=f(x_e,t)=0 \qquad \forall t\geq 0 \tag{I.7}$$

Si x_e est un point d'équilibre du système (I.6) alors l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t)=f(x(t),t) \qquad \forall t\geq t_e, \quad x(t_e)=x_e \tag{I.8}$$

admet une solution unique :

$$x(t)=x_e \qquad \forall t\geq t_e \tag{I.9}$$

I.5. EXEMPLE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Dans cette section, nous allons donner quelques modèles des systèmes nonlinéaires. Ces exemples incluent le pendule simple et le pendule inversé.

I.5.1. Pendule simple

Le modèle didactique d'un robot manipulateur a un seul degré de liberté dont le modèle (I.10) est donné par Berghuis [4].

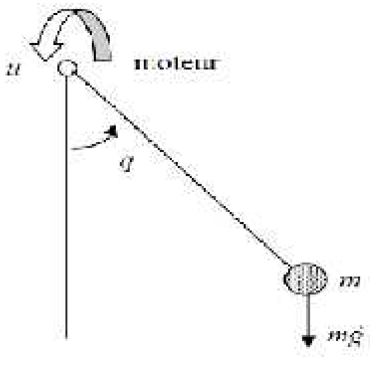

Figure I.1. Pendule simple

Le modèle dynamique peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin x_1 + \dfrac{1}{ml^2}u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{I.10}$$

I.5.2. Pendule inversé

Le système pendule inversé à modélisé est représenté par la figure I.2. En exerçant une force horizontale $u(t)$ sur le chariot, celui-ci se déplace en translation de x mètre est provoque une déviation du pendule de ¯ radians.

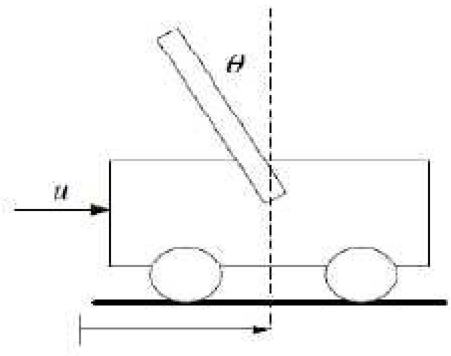

Figure I.2. Pendule inversé

Le modèle dynamique peut s'écrire [5]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{(m_c+m)g\sin x_1 - mlx_2^2\cos x_1\sin x_1}{l(4/3(m_c+m)-m\cos^2 x_1)} + \dfrac{\cos x_1}{l(4/3(m_c+m)-m\cos^2 x_1)}u(t)+d(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{4/3mlx_2^2\sin x_1 + mg\cos x_1\sin x_1}{l(4/3(m_c+m)-m\cos^2 x_1)} + \dfrac{4}{3.(4/3(m_c+m)-m\cos^2 x_1)}u(t)+d(t) \end{cases} \tag{I.11}$$

Ou x_1 position angulaire, x_2 vitesse angulaire, x_3 position de chariot, x_2 vitesse de chariot, g la gravité, m_c la mass de chariot, m la mass de pendule, l la langueur de pendule centre de mass et $d(t)$ est un bruit.

I.6. COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

La commande est l'ensemble des opérations qui amènent automatiquement un procédé d'un état particulier à un état désiré $y_d(t)$ [5].

Un système commandé est soumis à des perturbations et des variations paramétriques telles que les frottements, vent, bruit de mesure, etc. Voir la figure I.3.

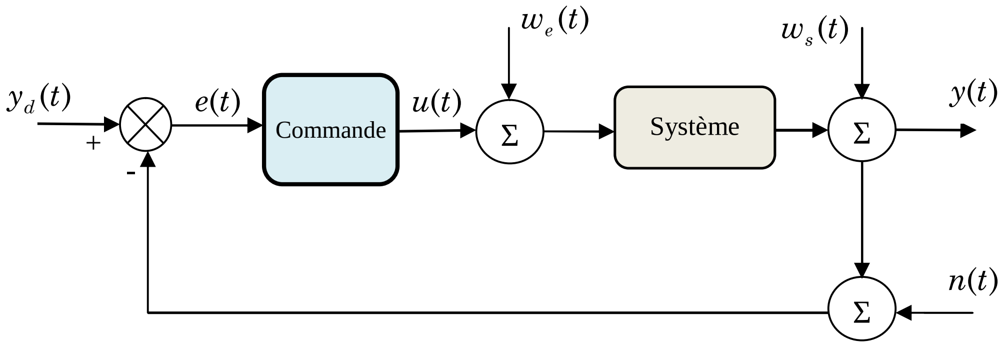

Figure I.3. Schéma de principe d'une commande d'un système non linéaire

Les signaux utilisés dans cette figure sont :

$y_d(t)$: consigne ou signal de référence.

$y(t)$: signal de sortie ou réponse de référence.

$e(t)$: erreur de suivi.

$u(t)$: signal de commande.

$w_e(t)$: perturbations de la commande.

$w_s(t)$: perturbations de la sortie.

$n(t)$: bruit de mesure perturbations de la sortie.

Si la consigne $y_d(t)$ une constante dans le temps, nous parlons de régulation si non la commande est un asservissement ou poursuite des trajectoires. Par ailleurs, la commande d'un système a comme objectif d'atteindre les performances suivantes :

a) *La stabilité*
b) *La robustesse*
c) *La rapidité*
d) *La précision*

I.7. LINEARISATION AU TOUR D'UN POINT DE FONCTIONNEMENT

Les premières tentatives d'approche des systèmes non linéaires sont basées sur la linéarisation au tour d'un point de fonctionnement. En fait, la linéarisation d'un système non linéaire ne donne qu'une description partielle du transfert entrée/ sortie. Pour ce fait nous allons illustrer par un exemple cette mauvaise caractéristique :

Exemple d'un satellite

Soit un satellite rigide non sphérique propulsé par un couple :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \end{cases} \tag{I.12}$$

Avec u est bornée $|u| \le 1$, satellite non sphérique $a_3 \ne 0$ et $a_1 b_2^2 \ne a_2 b_1^2$. Pour ce système :

$$\dot{x} = f(x) + g(x,u) \tag{I.13}$$

Avec : $f(x) = \begin{pmatrix} a_1 x_2 x_3 \\ a_2 x_1 x_3 \\ a_3 x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad g(x,u) = \begin{pmatrix} b_1 u \\ b_2 u \\ 0 \end{pmatrix}$

On linéarise au tour d'un point de fonctionnement $x_0(0{,}0{,}0)$:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{I.14}$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 x_3 & a_1 x_2 \\ a_2 x_3 & 0 & a_2 x_1 \\ a_3 x_2 & a_3 x_1 & 0 \end{pmatrix}_{x=x_0} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{x=x_0} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etude de la commandabilité :

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{I.15}$$

$\det Q_c = 0 \Rightarrow$ le système linéarisé n'est pas commandable alors que le système non linéaire est commadable.

I.8 DEFERENCE ENTRE SYSTEMES LINEAIRE ET NON LINEAIRE

Pour les systèmes linéaires la loi de commande est donnée par retour d'état :

$$u = -K^T x + w \tag{I.16}$$

Qu'on peut la trouvé par :

(a) placement de pole,

(b) optimisation par la résolution de l'équation de Riccati,

(c) les régulateurs RST…

Pour les systèmes non linéaires la synthèse d'une stratégie de commande non linéaire (Backstepping, SMC…) est indispensable.

$$u = u(x) \tag{I.17}$$

Tableau I.1 Déférences entre les systèmes linéaires et non linéaires

Système linéaire	**Système non linéaire**
$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\, u(t) \\ y = h(x) \end{cases}$
Transformée de Laplace	Géométrie différentiel
Espace d'état	Variété d'état ou différentiable
Fonctions de transfert	Série génératrice
Réponse impulsionnelle	Série de Volterra
La commande $u = -k^T x + w$	La commande $u = u(x)$

I.9 CONCLUSION

Ce chapitre permis de présenté une brève introduction, motivation et état de l'art sur les systèmes non linaires pour amener et justifier les choix et l'orientation de ce cours. Il est question donc de rappeler les différentes notions théoriques, définitions et concepts relatifs à ces domaines. Etant donné que l'objectif de ce cours est l'application des techniques de commande aux systèmes non linéaires, des notions élémentaires de la géométrie différentielle doit s'impose. Ce si fera l'objectif de chapitre suivant.