CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES SIGNAUX

Introduction

Le *traitement du signal* est une discipline technique qui a pour objet l'élaboration, la détection et l'interprétation des signaux porteurs d'informations. Cette discipline s'appuie sur la théorie du signal qui donne une description mathématique des signaux. Cette théorie fait essentiellement appel à l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle, l'électricité et l'étude des processus aléatoires.

Historiquement, le traitement des signaux apparaît au début du XXième siècle, en même temps que l'électronique (FLEMING, 1905, détection et amplification de signaux faible). On peut cependant noter des premiers travaux au XIXième avec l'invention du télégraphe électrique (MORSE, COOKE, WHEATSTONE, 1830), du téléphone (BELL, 1876) et de la radio (MARCONI, POPOV, 1895).

La théorie du signal apparaît en 1930 avec les premiers travaux de WIENER et KINTCHINE sur les processus aléatoires, et ceux de NYQUIST et HARTLEY sur la quantité d'informations transmise sur un envoie télégraphique. Les contributions essentielles, au traitement du signal et à la théorie du signal n'interviennent qu'après la seconde guerre mondiale. Invention du transistor en 1948, travaux de SHANNON sur la communication, de WIENER sur le filtrage optimal et de SCHWARTZ sur les distributions.

Le traitement du signal est devenu une science incontournable de nos jours : toutes applications de mesures, de traitement d'information mettent en œuvre des techniques de traitement sur le signal pour extraire l'information désirée. Initialement destiné à extraire le signal dans un bruit lors de mesures (capteurs), le traitement du signal est largement appliqué en télécommunication dans des applications diverses et variées. Nous pouvons citer :

- La protection d'information contre le bruit tel que les techniques pour réduire le taux d'erreur ou pour contrer les effets du canal (technique d'égalisation).

- Le développement d'applications électroniques et l'évolution aisée vers de nouvelles fonctionnalités telles que le filtrage sélectif, la mise en place de techniques variées de modulation/démodulation, …

L'amélioration des performances des systèmes au cours des dernières années est due, pour une grand part, à l'application des techniques de traitement du signal. C'est le cas notamment en imagerie médicale, en téléphonie et télécommunication. Les structures matérielles sont sensiblement les mêmes, mais les techniques de traitement de signal font appel à des traitements numériques sophistiqués. Les implications en ce qui concerne un diagnostic médical, la surveillance d'une zone aérienne ou sous-marine ou encore la localisation de pannes sont immédiates. L'objectif du traitement du signal apparait alors comme un outil mathématique employé pour extraire un maximum d'informations utiles sur un signal perturbé par du bruit. Les signaux utiles sont souvent perturbés par des signaux parasites (le bruit) qui les masquent parfois complètement. Pour atténuer, sinon supprimer ce bruit il faut en connaître les caractéristiques ainsi que celles du signal utile. C'est pourquoi le traitement du signal est une discipline très mathématique. Les techniques utilisées peuvent être appliquées à un signal analogique (continu) mais compte tenu de leur complexité, un traitement numérique s'impose presque toujours. Il est rendu possible grâce à la puissance des circuits de calculs et des ordinateurs modernes.

1. De la théorie du signal au traitement du signal

Les mots *signal* et *information* sont communs dans le langage courant. Dans le monde scientifique, ces mots ont des significations bien précises : en particulier, théorie de l'information, théorie du signal et traitement du signal correspondent à des notions différentes, illustrées à la figure 1.1 dans le cadre d'une chaîne de communications. De façon encore plus générale :

✓ *La théorie du signal* représente l'ensemble des outils mathématiques décrivant les signaux et les bruits émis par une source ou modifiés par un système de traitement, notamment : la transformée de Fourier (TF), Analyse fonctionnelle, Analyse statistique et Méthode d'estimation et qui permet de décrire les signaux et les bruits émis par une source, ou modifiés par un système de traitement (figure 1.1). La théorie du signal a pour objectif fondamental la description mathématique des signaux. Elle permet ainsi d'établir une représentation d'un signal en fonction du temps ou de l'espace contenant une information à stocker, à transformer, à transmettre ou à recevoir. La théorie du signal ne préjuge pas de la nature physique du signal,

✓ *La théorie de l'information* est l'ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire la transmission de messages véhiculés d'une source vers un destinataire,

✓ *Le traitement du signal* est l'ensemble des méthodes et des algorithmes qui permet d'élaborer ou d'interpréter les signaux porteurs d'information. Plus précisément :

- élaboration : synthèse, analyse, régénération, codage, modulation, identification, changement de fréquence,
- interprétation : décodage, démodulation, filtrage, détection, identification, mesure, etc.

Actuellement, les méthodes de traitement sont presqu'en totalité numériques, ce qui suppose :

- un échantillonnage temporel, et une représentation des signaux en temps discret,
- la numérisation du signal par conversion analogique/numérique, ce qui implique une quantification du signal.

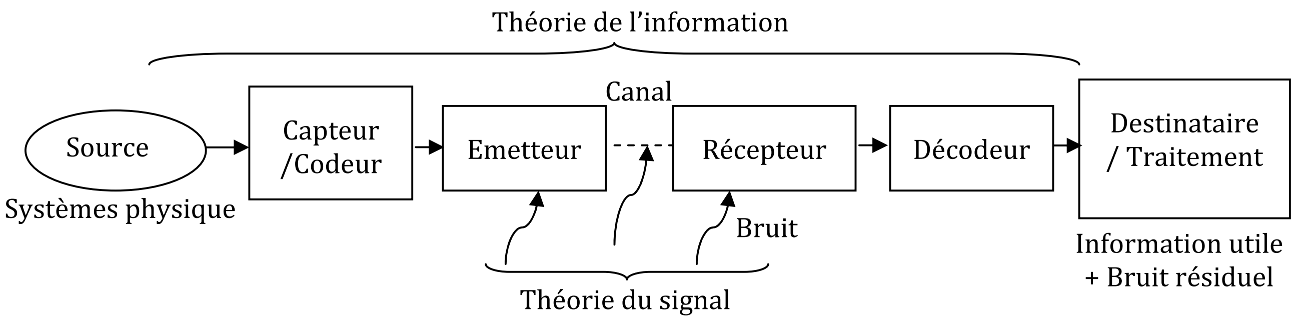

Figure 1.1. Théorie de l'information et du signal dans une chaîne de transmission d'un signal analogique.

La théorie du signal fournit la description et les outils mathématiques (ou modélisation) nécessaires pour manipuler des signaux déterministes ou aléatoires, c'est-à-dire les décrire, les caractériser et les comparer. Elle fournit les moyens de mettre en évidence, sous forme mathématique commode, les principales caractéristiques d'un signal : la distribution spectrale de son énergie ou la distribution statistique de son amplitude par exemple, la classification des signaux et leur description dans des espaces vectoriels, dits espaces de Hilbert. Le traitement des signaux est la discipline technique qui, s'appuyant sur la théorie du signal et de l'information, les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information. Elle trouve son application *dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation de ces informations, dès qu'un capteur mesure une grandeur physique porteuse d'information, qui est perturbée (par du bruit ou le système de mesures) et qui devra être traitée pour en extraire l'information utile. Les méthodes de traitement du signal permettent d'imaginer des méthodes plus sûres, plus fiables, plus rapides pour analyser et transmettre des signaux. Elle offre également les moyens d'analyser la nature des altérations ou modifications subies par les signaux lors de leur passage au travers de blocs fonctionnels (dispositifs généralement électriques ou électroniques).La description mathématique des signaux permet de concevoir et de caractériser des systèmes de traitement de l'information. Le bruit représentera tout « signal » ou phénomène perturbateur.*

2. Signal et bruit

2.1. Définition d'un Signal *:* vient du latin *signum* : signe ; variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information.

Un signal est donc la représentation physique de l'information qu'il convoie de sa source à sa destination. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électronique, optique, etc. Il constitue une manifestation physique d'une grandeur mesurable (courant, tension, force, température, pression….). Les signaux considérés dans ce cours sont des signaux dépendants du temps obtenus à l'aide de capteurs. La théorie du signal reste valable quelle que soit la nature physique du signal.

Le mot *signal* est pratiquement toujours associé au mot *bruit*. Ce dernier est utilisé dans le langage commun, mais il revêt, dans la théorie du signal, un sens bien particulier. On parle par exemple de : *signal électrique* (téléphonie), *onde électromagnétique* (télécommunication), *onde acoustique* (sonar), *onde lumineuse* (fibre optique), *signal binaire* (ordinateur). On parle également de signal de mesure, de commande, de signaux vidéo, audio, etc...en fonction de la nature de l'information transmise.

2.2. Définition d'un Bruit *:* vient du latin populaire brugere : braire et rugire : rugir ; perturbation indésirable qui se superpose au signal et aux données utiles, dans un canal de transmission ou dans un système de traitement de l'information et gênant la perception de ce signal.

Un bruit correspond à tout phénomène perturbateur gênant la transmission ou l'interprétation d'un signal.

- **Rapport signal sur bruit**

Le rapport signal sur bruit mesure la quantité de bruit contenue dans le signal. Il s'exprime par le rapport des puissances du signal (P_S) et du bruit (P_B). Il est souvent donné en décibels (dB).

$$RSB = \frac{P_S}{P_N} \quad ; \quad RSB_{dB} = 10 log \frac{P_S}{P_B} \tag{1.1}$$

Où *log* est le logarithme décimal.

Ainsi, il apparaît évident qu'un problème fondamental en traitement du signal sera d'extraire le signal utile du bruit. La difficulté du problème dépend en particulier de la proportion entre signal et bruit. Ceci est mesuré par le rapport signal à bruit (*RSB*, ou *SNR* en anglais pour Signal to Noise Ratio).

Le RSB mesure donc la qualité du signal. C'est une mesure objective. Cependant, dans de nombreux cas, en particulier ceux où l'opérateur humain intervient dans la chaîne de traitement, cette mesure n'est pas très significative. Ceci est particulièrement vrai pour les signaux audio ou les images et les vidéos. Des mesures subjectives, ou des mesures plus fines, prenant en compte les propriétés de la perception humaine doivent être mises en œuvre.

3. Principales fonctions du traitement de signal

Les principales fonctions du traitement de signal sont :

· *L'analyse* : On cherche à isoler les composantes essentielles d'un signal de forme complexe, afin d'en mieux comprendre la nature et les origines.

· *La mesure* : mesurer un signal, en particulier aléatoire, c'est essayer d'estimer la valeur d'une grandeur caractéristique qui lui est associée avec un certain degré de confiance.

· *Le filtrage* : c'est une fonction qui consiste à éliminer certaines composantes indésirables du signal.

· *La régénération* : c'est une opération par laquelle on tente de redonner sa forme initiale à un signal ayant subis diverses distorsions.

· *La détection* : par cette opération on tente d'extraire un signal utile du bruit de fond qui lui est superposé.

· *L'identification* : c'est un procédé souvent complémentaire qui permet d'effectuer un classement du signal observé.

· *La synthèse* : opération inverse de l'analyse, consiste à créer un signal de forme appropriée en procédant, par exemple, à une combinaison de signaux élémentaires.

· *Le codage* : outre sa fonction de traduction en langage numérique, est utilisé soit pour lutter contre le bruit de fond, soit pour tenter de réaliser des économies de largeur de bande ou de mémoire d'ordinateur.

· *La modulation et le changement de fréquence* : sont essentiellement des moyens permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission, d'un filtre d'analyse ou d'un rapport d'enregistrement.

4. Domaines d'applications

Télécommunications, Téléphonie, Radar, Sonar, Traitement d'images, Astronomie, Géophysique, Automatique, Technique de mesures, Etude de vibrations mécaniques, Surveillance de processus industriels, Acoustique, Reconnaissance de formes, Analyses biomédicales, etc.

- Dans les télécommunications : que ce soit dans le domaine de la téléphonie ou dans le transfert de données numériques terrestre ou via satellite, la compression des données est primordiale pour exploiter au mieux la bande passante disponible, et minimiser les pertes. La suppression d'échos est un autre domaine d'application.
- En audio : on cherche à améliorer les techniques d'enregistrement et de compression pour obtenir la plus grande qualité sonore possible. Les techniques de correction d'écho permettent de réduire les effets de réflexions acoustiques dans la pièce. Le traitement du son s'est largement amélioré grâce aux ordinateurs. La synthèse sonore permet en outre de créer des sons artificiels ou de recréer les sons d'instruments naturels. Elle a été à l'origine de nombreux bouleversements en musique.
- L'analyse des échos permet d'obtenir des informations sur le milieu sur lequel les ondes se sont réfléchies. Cette technique est exploitée dans le domaine de l'imagerie du radar ou du sonar. En géophysique, en analysant les réflexions d'ondes acoustiques, on peut déterminer l'épaisseur et

la nature des strates du sous-sol. Cette technique est utilisée dans le domaine de la prospection minière et dans la prédiction des tremblements de terre.

- En imagerie : on trouve des applications dans le domaine médical (reconstruction tomographique, imagerie par résonance magnétique - IRM), dans le spatial (traitement de photos satellites ou d'images radar). Ce domaine inclut aussi les techniques de reconnaissance de formes et de compressions.
- Le traitement de séquences vidéo concerne la compression, la restauration, la réalisation d'effets spéciaux, l'extraction de descripteurs (reconnaissance de formes et textures, suivi de mouvements, caractérisation etc.) afin de produire des annotations automatiques dans une perspective de bases de données (recherche par le contenu).
- On peut aussi citer quelques domaines d'applications du traitement du signal :

Techniques de mesures, Etude des vibrations mécaniques, Surveillances de processus industriels, Reconnaissance de formes, Analyses biomédicales, Géophysique, Séismologie, Astronomie, Radar, Sonar, Acoustique, etc …

5. Modèles et mesure des signaux

5.1. Modèle mathématique

Le modèle mathématique d'un signal est une fonction d'une, deux ou trois variables : $x(t)$; $x(i, j)$; $x(i, j, t)$. Le premier cas est le plus courant : la variable t est usuellement le temps mais elle peut aussi représenter une autre grandeur (une distance par exemple). La fonction représente l'évolution d'une grandeur électrique ou traduite sous cette forme par un capteur approprié : microphone : signal acoustique, caméra : signal vidéo…

5.2. Modèle fonctionnel

On appelle fonctionnelle une règle de correspondance entre un ensemble de nombres réels ou complexes. En d'autre termes, une fonctionnelle est une fonction de fonctions. Les signaux résultant d'un traitement ou certains de leurs paramètres sont souvent exprimés par des relations fonctionnelles. Par exemple :

- Valeur intégrale pondérée (fonction de pondération $g(t)$)

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).g(t)dt \tag{1.2}$$

- Valeur intégrale quadratique pondérée

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t).g(t)dt \quad (1.3)$$

- Produit de convolution

$$x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (1.4)$$

- Produit scalaire (évalué sur l'intervalle T)

$$< x, y^* >= \int_T x(t).y^*(t)dt \quad (1.5)$$

- Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j2\pi ft}dt \quad (1.6)$$

6. Classifications des signaux

On rappelle qu'un signal est une fonction dépendant d'une ou de plusieurs variables. Par exemple soit le signal : $s(t)$, s est une quantité dépendant d'un paramètre t (par convention, on utilisera la lettre *t* pour la variable temps).

Un signal peut être classé selon différents critères : sa dimensionnalité, ses caractéristiques temporelles, les valeurs qu'il peut prendre, sa prédictibilité.

6.1. Dimensionnalité

On peut tenir compte de ce critère de deux manières différentes : la dimension du signal et les dimensions des variables du signal.

Considérons tout d'abord ce critère de classification comme étant la dimension de l'espace des valeurs prises par le signal (ou la fonction mathématique modélisant le signal). On distingue alors:

– le signal scalaire, ou signal monocanal pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes.

– le signal vectoriel, ou signal multi-canal pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes.

Prenons par exemple un signal de Télévision (TV). Si on s'intéresse aux trois couleurs constituant une image, ce signal TV prend des valeurs dans un espace à trois dimensions, une première pour le rouge, une seconde pour le vert et enfin une troisième pour le bleu ;

[R; V;B] = TV (t).

Par contre, si on s'intéressé maintenant à la luminance, ce signal prend ses valeurs dans un espace à une dimension ; [L] = TV (t).

On peut aussi considérer ce critère de classification comme la dimension du domaine de la fonction signal, c'est-à-dire, le nombre d'arguments pris par cette fonction. On distingue alors :

– Le signal mono-dimensionnel qui correspond à des fonctions à un seul argument, comme par exemple le temps.

– Le signal multi-dimensionnel qui correspond à des fonctions à plusieurs arguments.

Le signal TV correspondant à la luminance peut être fonction du temps mais aussi des variables cartésiennes correspondant à un point de l'écran ; [I] = TV (t; x; y). Il s'agit d'un signal tridimensionnel.

Les signaux abordés dans ce cours seront mono-dimensionnels fonction d'une variable que l'on considérera comme le temps. Toutes les techniques de traitement du signal se généralisent assez bien aux signaux vectoriels et multidimensionnels (voir le cours sur le traitement d'images).

6.2. Caractéristiques temporelles

On suppose un signal scalaire $s(t)$. On distingue alors :

- Les signaux à temps continu ou signaux analogiques. La variable $t \in R$. On notera un signal analogique de la façon suivante : $sa(t)$.

- Les signaux à temps discret : ces signaux sont définis pour certaines valeurs de la variable t.

On peut représenter un signal à temps discret par une séquence indicée de la variable t :

$$t_n,\ n=\ldots 0,-2,-1,0,1,2,\ldots.. \qquad (1.7)$$

t_n précise un instant pour lequel le signal est défini. Attention, cela ne veut pas dire que le signal est nul entre deux instants ; il n'est tout simplement pas défini.

On s'intéressera ici à une répartition uniforme des instants t_n que l'on peut noter $t_n = n$T où T est l'espace temporel entre deux échantillons consécutifs. On peut alors employer $s(n)$ ou s_n comme notation simplifiée. On a alors les relations suivantes :

$$s_n = s(n) = s_a(t_n) = s_a(nT) \qquad (1.8)$$

6.3. Valeurs prises par le signal

On suppose un signal scalaire $s(t)$. On distingue alors :

– Les signaux à valeurs continues pouvant prendre une valeur réelle dans un intervalle continue (par exemple, une tension ou un courant électrique).

– Les signaux à valeurs discrètes prenant seulement des valeurs parmi un ensemble fini de valeurs possibles.

Un signal numérique est un signal à temps discret et à valeurs discrètes. L'opération de discrétisation des valeurs continues d'un signal en valeurs discrètes est une quantification, notée q par la suite.

Soit par exemple un convertisseur Analogique/Numérique traitant des mots de 8 bits ; un signal quantifié par ce convertisseur prendra une valeur discrète parmi 256 possibles.

6.4. Prédictibilité des signaux

On peut distinguer deux grandes classes de signaux selon leur caractère de prédictibilité.

– Les signaux déterministes qui peuvent être représentés explicitement par une fonction mathématique.

– Les signaux aléatoires qui évoluent dans le temps d'une manière imprédictible. Il est cependant possible de décrire mathématiquement certaines caractéristiques statistiques de ces signaux.

On s'intéressera dans ce cours essentiellement aux signaux déterministes.

6.5. Signaux physiquement réalisables

Un signal expérimental est l'image d'un processus physique et, pour cette raison, doit être physiquement réalisable. Il est ainsi soumis à toute une série de contraintes :

- Son énergie ne peut être que bornée,
- Son amplitude est une fonction continue,
- Le spectre du signal est lui aussi nécessairement borné et doit tendre vers zéro lorsque la fréquence tend vers l'infini.

7. Modes de classification

Différents modes de classification des signaux peuvent être envisagés :

- Une classification phénoménologique de la forme $y = g(t)$ où la variable libre est le temps ;
- Une classification spectrale de la forme $Y = G(f)$ où la variable libre est la fréquence ;
- Une classification énergétique : une distinction fondamentale peut être faite entre deux catégories de signaux :
  - Les signaux à énergie finie ;
  - Les signaux à puissance moyenne finie non nulle ;
- Une classification morphologique ; selon le caractère continu ou discret de l'amplitude et de la variable libre ;
- Classification dimensionnelle ; On considère les signaux unidimensionnels $S(t)$, les signaux bidimensionnels -ou image- $S(x, y)$, voire les signaux tridimensionnels $S(x, y, t)$ représentant par exemple l'évolution d'une image en fonction du temps.

7.1. Classification phénoménologique

On met ainsi en évidence le type d'évolution du signal. Il peut être à caractère prédéterminé ou il a un comportement non prévisible.

Un signal déterministe est un signal dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique approprié.

Au contraire, la plupart des signaux d'origine physique ont un caractère non reproductible. Les signaux porteurs d'information (signaux de parole, d'image,…) présentent une certaine imprévisibilité, ils seront modélisés par des signaux aléatoires.

7.2. Classification énergétique

On distingue ici les signaux satisfaisant à un condition d'énergie finie à ceux présentant une puissance moyenne finie et une énergie infinie.

On appellera énergie totale d'un signal $x(t)$ la quantité :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x^2| \, dt \tag{1.9}$$

et puissance moyenne sur tous les temps de $x(t)$ la quantité :

$$P_x = T \overset{lim}{\longrightarrow} \infty \quad \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x^2|\, dt \tag{1.10}$$

La première catégorie comprend les signaux de type transitoire qu'ils soient déterministes ou aléatoires (exemple une impulsion carré ou gaussienne) et la deuxième catégorie englobe les signaux de type permanent, périodique, déterministe et les signaux aléatoires permanents.

7.3. Classification morphologique

Selon que le signal $x(t)$ où la variable t est continue ou discrète ($t_k = kT$) on distingue quatre types de signaux (figure 1.2) :

- Le signal continu en amplitude et en temps appelé couramment **signal analogique**.
- Le signal à amplitude discrète et temps continu appelé **signal quantifié**.
- Le signal à amplitude continue et temps discret appelé **signal échantillonné**.
- Le signal discret en amplitude et en temps appelé **signal numérique**.

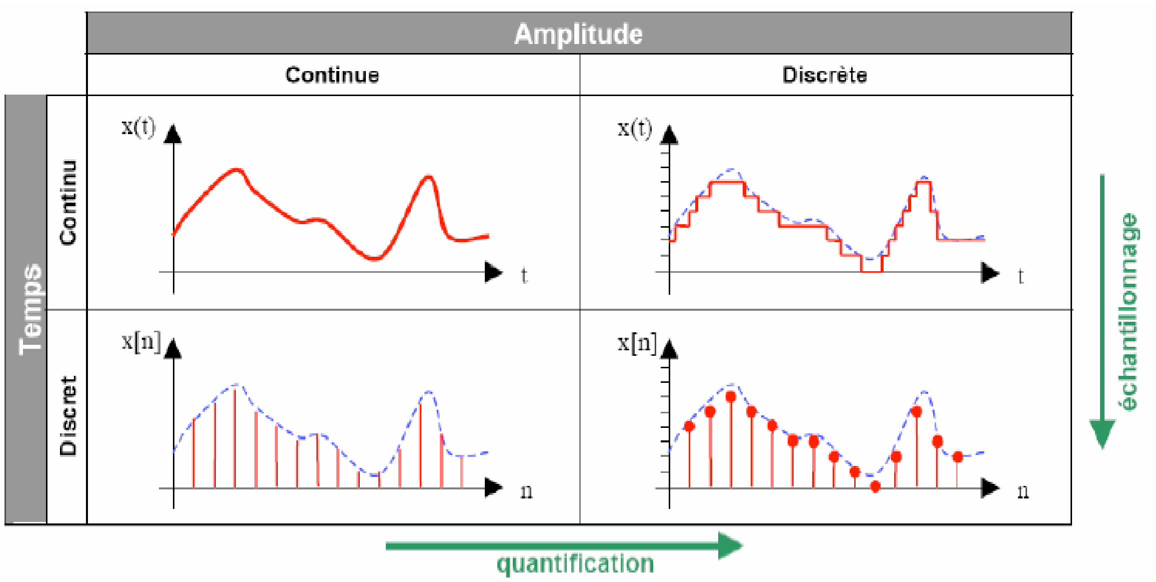

Figure 1.2. Classification morphologique.

7.4. Classification spectrale

L'analyse spectrale d'un signal (ou la répartition énergétique en fonction de la fréquence) conduit à une classification :

- Signaux de basses fréquences.
- Signaux de hautes fréquences.
- Signaux à bande étroite.
- Signaux à large bande.

La largeur de bande B d'un signal est le domaine principale des fréquences occupés par son spectre. Elle est définie par la relation : $f_2 - f_1$ avec $0 \leq f_1 < f_2$, où f_1 et f_2 sont des fréquences caractéristiques dénotant respectivement les limites inférieure et supérieure prises en compte.

Un signal dont le spectre est nul en dehors d'une bande de fréquences spécifiée *B* est appelé signal à bande limité ou de spectre à support borné. On distingue aussi :

- **Signaux de durée finie**

Les signaux dont l'amplitude s'annule en dehors d'un intervalle de temps T, $x(t) = 0$ pour $t \notin T$ sont appelés signaux de durée limitée ou à support borné.

- **Signaux bornée en amplitude**

C'est le cas de tous les signaux physiquement réalisable pour lesquels l'amplitude ne peut pas dépasser une certaine valeur limite, souvent imposée par des dispositifs électronique de traitement.

- **Signaux pairs et impairs**

Un signal est pair si $x(t) = x(-t)$; il est impair si : $x(t) = - x(-t)$. Ce qui implique que tout signal réel peut être décomposé en une partie paire et une partie impaire : $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$.

- **Signaux causaux**

Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps: $x(t) \equiv 0$ pour $t<0$.

- **Durée d'un signal**

Un signal est de durée finie s' il est nul en dehors d'un certain intervalle : $x(t) = 0, t \notin T$. Ces signaux sont appelés signaux de durée limitée ou à support borné.

7.5. Classification dimensionnelle

On considère les signaux unidimensionnels $S(t)$, les signaux bidimensionnels -ou image- $S(x, y)$, voire les signaux tridimensionnels $S(x, y, t)$ représentant par exemple l'évolution d'une image en fonction du temps.

8. Classification phénoménologique

La première classification (figure 1.3) est obtenue en considérant la nature profonde de l'évolution en fonction du temps. On peut d'ores et déjà les classer en deux grandes catégories : les signaux déterministes et les signaux aléatoires.

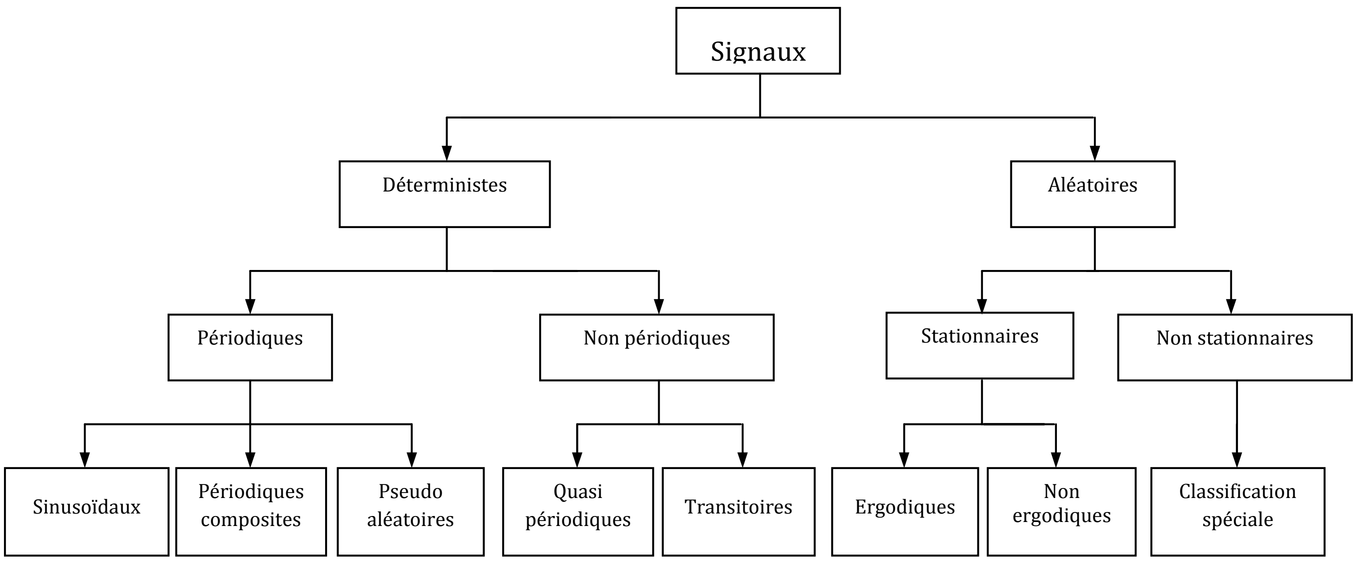

Figure 1.3. Classification phénoménologique

8.1. Signaux déterministes

Ils sont des signaux dont l'évolution, en fonction de la variable indépendante, peut être prédite parfaitement par une représentation mathématique appropriée. Ils sont classés comme suit :

- Les signaux périodiques, satisfaisant à la relation :

$$S(t) = S(t + kT) \qquad \forall\, t \text{ et } T \text{ constante} \qquad (\text{T : appelée période et } k \text{ : entier}) \tag{1.11}$$

Qui obéissent à une loi de répartition cyclique de période T ;

- Les signaux non périodiques, qui ne jouissent pas de cette propriété.

Dans la classe des signaux périodiques, on trouve :

- Les signaux sinusoïdaux (figure 1.4) d'équation générale :

$$S(t) = A\sin(2\pi ft + \varphi) \tag{1.12}$$

Qui forment le groupe le plus familier des signaux périodiques ;

- Les signaux périodiques composites (figure 1.3), d'équation générale :

$$S(t) = \sum_n [a_n \sin(n2\pi ft) + b_n \cos(n2\pi ft)] \tag{1.13}$$

- Les signaux pseudo-aléatoires, sont des signaux périodiques; mais sur un période, ils se comportent comme des signaux aléatoires. (figure 1.5).

Dans la deuxième classe, celle signaux non périodiques, on trouve :

- Les signaux quasi-périodiques (figure 1.6), d'équation générale :

$$S(t) = \sum_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \tag{1.14}$$

Qui résultent d'une somme de sinusoïdes de périodes incommensurables ;

- Les signaux transitoires (figure 1.7), d'équation générale :

$$S(t) = e^{-at}\sin(\omega t) \qquad a \text{ réel} \tag{1.15}$$

Qui sont définis seulement sur un intervalle (signaux à support borné).

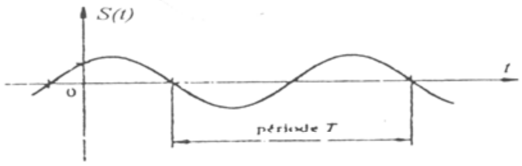

Figure 1.3 Signal sinusoïdal

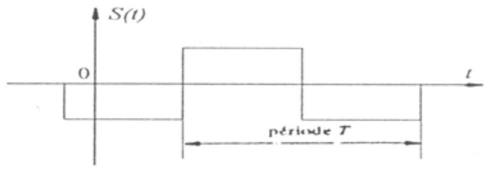

Figure 1.4. Signal périodique composite

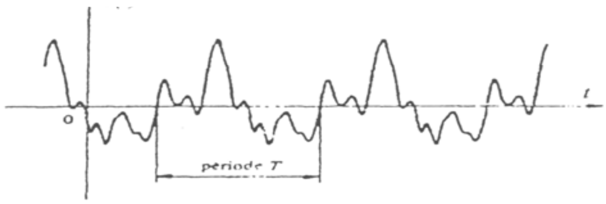

Figure 1.5 Signal pseudo-aléatoire

Figure 1.6. Signal quasi-périodique

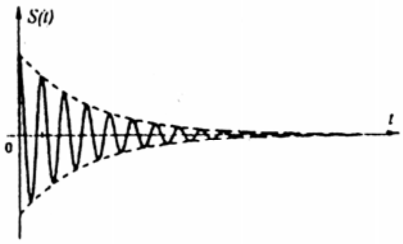

Figure 1.7. Signal transitoire

8.2. Signaux aléatoires

Il s'agit des signaux dont le modèle mathématique n'est pas connu, donc leur évolution en fonction du temps est imprévisible. Leur description est sujette à des observations statistiques.

Ils obéissent à la loi du hasard, on les classe comme suit :

- les signaux aléatoires stationnaires, dont les caractéristiques statistiques sont invariantes dans le temps ; (figure 1.8)
- les signaux aléatoires non stationnaires, qui ne jouissent pas de ces propriétés ; (figure 1.9)

Dans la classe des signaux aléatoires stationnaires, on trouve :

- Les signaux ergodiques, si dont les moyennes statistiques et temporelles sont identiques ;
- Les signaux non ergodiques, qui ne jouissent pas de cette propriété.

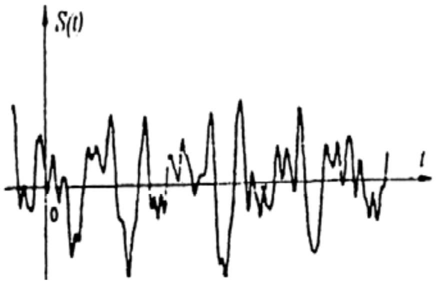

Figure 1.8. Signal aléatoire stationnaire à large bande.

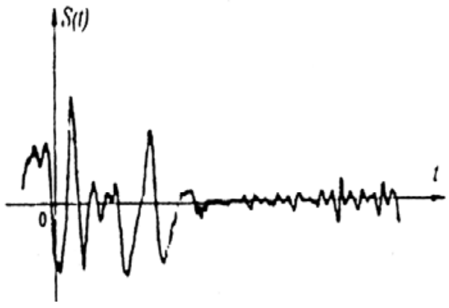

Figure 1.9. Signal aléatoire non stationnaire.

9. Processus aléatoire

Un processus aléatoire est une famille paramétrée de variables aléatoires, le résultat de l'épreuve n'est pas un nombre, mais une fonction aléatoire de temps, dans le cas de plusieurs paramètres, on parle de champ aléatoire. Mais on se limitera généralement au cas où une seule variable S suffit.

Deux classes de processus se distinguent :

- Processus discret, dans lequel les valeurs possibles de la variable aléatoire sont discrètes.

- Processus continu, dans lequel les valeurs possibles de la variable aléatoire sont continues.

Les processus stochastiques ont pour but d'introduire la description des signaux aléatoires porteurs d'informations à transmettre ou représentant des bruits générés par un phénomène physique et essentiellement consacrés aux propriétés du second ordre qui sont généralement décrites par la fonction de corrélation qui sera décrite par la suite.

9.1. Caractéristiques

En considérons k instants $t_1,...,t_k$ on peut définir k variables aléatoires $S(t_1),...,S(t_k)$ dont la description statistique passe pour la loi de probabilité (Fonction de répartition).

$$F(S_1,...,S_k;t_1,...,t_k) = prob[S(t_1) \leq S_1,...,S(t_k) \leq S_k;t_1,...,t_k] \quad (1.16)$$

Où $S_1,...,S_k$ sont les états pris pour la variable $S(t)$ aux instants $t_1,...,t_k$ il s'agit- là de la statistique d'ordre k.

9.1.1. La fonction de répartition

La fonction de répartition $F(S_i;t_i)$ est la probabilité d'obtenir par un prélèvement au hasard, une valeur inférieure ou égale à $(S_i;t_i)$.

La fonction de répartition s'exprime par :

$$F(S_i;t_i) = prob[S(t_i) \leq S_i;t_i] \tag{1.17}$$

$$F(S_1;t_1) = prob[S(t_1) \leq S_1;t_1] \tag{1.18}$$

Pour le cas de statistique d'ordre 1, est :

$$F(S_1,S_2;t_1,t_2) = prob[S(t_1) \leq S_1, S(t_2) \leq S_2;t_1,t_2] \tag{1.19}$$

Pour le cas de la statistique d'ordre 2 qui utilise un couple de variables aléatoires $S(t_1), S(t_2)$

9.1.2. La densité de probabilité

La densité de probabilité du signal $S(t)$ est par définition la dérivée de la fonction de répartition

$$P_S(S_i;t_1) = \frac{\partial F_S(S_i;t_1)}{\partial S} \tag{1.20}$$

9.1.3. Espérance mathématique

L'espérance mathématique ou moyenne $E[S(t_1)]$ d'une variable aléatoire $S(t)$ à l'instant t_1 :

$$E[S(t_1)] = \overline{S(t_1)} = m(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1 P(S_1;t_1) dS_1 \tag{1.21}$$

Cette définition est équivalente à celle de la moyenne d'ordre 1 et de degré 1.

9.1.4. Les moyennes

Les moyennes d'une ou plusieurs variables aléatoires sont définies comme les espérances mathématiques des différentes puissances de ces variables aléatoires. Il s'agit de moyennes statistiques et temporelles.

- Moyennes statistiques (moments statistiques) :

La moyenne statistique de la variable aléatoire $S(t)$ à un instant t_1, est définit par :

$$\overline{S(t_1)} = m(t_1) = \lim_{N\to\infty} \frac{S_1(t_1) + S_2(t_1) + ... + S_N(t_1)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S_i(t_1) \tag{1.22}$$

Elle caractérise la position de la courbe de distribution des résultats.

Considérons maintenant le couple de variables aléatoires $S(t_1)$ et $S(t_2)$.

Le moment d'ordre 2 des variables $S(t_1)$ et $S(t_2)$ est appelé la fonction d'auto-corrélation statistique (FAC) du processus $S(t)$ dénotée par Γ_{SS} :

$$\Gamma_{SS}(t_1, t_2) = E[S(t_1).S(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} S_1 S_2 P(S_1, S_2; t_1, t_2) dS_1 dS_2 \tag{1.23}$$

Dans le cas de deux processus aléatoires $S(t), Y(t)$, le moment d'ordre 2et de degré 1 est la fonction d'inter corrélation (cross-corrélation) statistique dénotée par Γ_{SY} :

$$\Gamma_{SY}(t_1, t_2) = E(t_1, t_2) = E[S(t_1).Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} S_1 Y_2 P(S_1, Y_2; t_1, t_2) dS_1 dY_2 \tag{1.24}$$

Remarque : La moyenne d'ordre n, d'une variable aléatoire $S(t)$ supposée continue, à un instant t_1, est définie par :

$$m_n(t_1) = \overline{S^n(t_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^n P(S_1; t_1) dS_1 \tag{1.25}$$

- Moyenne temporelle (moment temporel)

La moyenne temporelle $\overline{S_i(t)}$ d'un échantillon $S_i(t)$ est donnée par la relation :

$$\overline{S_i(t)} = \overline{S(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} S(t)dt \tag{1.26}$$

La FAC, qui est la valeur moyenne temporelle du produit de $S(t)$ par $S(t+\tau)$ est donnée par :

$$\overline{S(t).S(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} S(t).S(t+\tau)dt \tag{1.27}$$

Dans le cas de deux processus aléatoires $S(t)$ et $Y(t)$, la fonction d'inter corrélation (cross- corrélation) est donnée par la relation :

$$\overline{S(t).Y(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} S(t).Y(t+\tau)dt \tag{1.28}$$

τ : Écart temporel ou retard.

Remarque : Deux signaux ayant des amplitudes différentes peuvent présenter dans le même intervalle de temps des moyennes temporelles identiques.

9.2. Processus aléatoire complexe

Un processus aléatoire $S(t)$ à valeurs complexes est défini par la même manière que le processus aléatoire réel que nous avons considéré précédemment, mais à deux dimensions ($R(t), I(t)$) comme suit :

$$S(t) = R(t) + jI(t) \tag{1.29}$$

Nous obtenons pour le moment du premier ordre :

$$E[S(t)] = E[R(t)] + jE[I(t)] \tag{1.30}$$

Pour le moment du second ordre :

$$\forall\, t_1, t_2 :\ \Gamma_{SS}(t_1, t_2) = \Gamma_{SS}(t_2, t_1) = E[S(t_1)S(t_2)] \tag{1.31}$$

et

$$\forall\, t_1, t_2 :\ \Gamma_{SS}(t_1, t_2) = E[S(t_1)S^*(t_2)] = \Gamma^*_{SS}(t_2, t_1) \tag{1.32}$$

Où :

- $S^*(t_2)$: est le conjugué de $S\ (t_2)$,
- $\Gamma^*_{SS}(t_1, t_2)$: est le conjugué de $\Gamma_{SS}(t_1, t_2)$.

La relation (1.32) correspond à la symétrie hermitienne $\Gamma_{SS}(t_1, t_2)$ qui s'appelle la fonction d'auto corrélation statistique du processus aléatoire à valeurs complexes.

De même les définitions de moments temporels s'entendent aux processus complexe.

Ainsi la fonction d'auto corrélation devient :

$$\overline{S^*(t)S(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^*(t)S(t+\tau)dt \tag{1.33}$$

9.3. Stationnarité

La notion de stationnarité joue un rôle essentiel dans l'étude des signaux aléatoires, on trouve :

9.3.1. Processus strictement stationnaire (au sens strict)

Un signal aléatoire $S\ (t_2)$ est strictement stationnaire si sa loi temporelle est invariante àtout changement de l'origine du temps, cela peur s'exprimer par :

$$F(S_1,\ldots,S_k;t_1,\ldots,t_k) = F(S_1,\ldots,S_k;t_1+\tau,\ldots,t_k+\tau) \tag{1.34}$$

Pour tout k, tout τ et toute suite d'instants $t_1,\ldots,t_k$.

9.3.2. Processus faiblement stationnaire (au sens large)

Un signal faiblement stationnaire ou stationnaire de second ordre si seuls ses caractéristiques probabilistes d'ordre 1 et d'ordre 2 sont invariantes pour tout changement de l'origine des temps.

Dans ce cas on a :

- $E[S(t)] = Cte$ **(**Indépendant de t**).**
- $\Gamma_{SS}(t_1, t_2) = E[S^*(t_1)S(t_2)] = E[S^*(t_1)S(t_1+\tau)] = \Gamma_{SS}(\tau)$ (Fonction uniquement de $\tau = t_2 - t_1$).
- $\Gamma_{SS}(\tau)$ est continue à l'origine.

Remarque :

- Un signal aléatoire stationnaire du second ordre est caractérisé par sa fonction de corrélation
- La fonction de corrélation d'un signal réel est paire puisque d'après la stationnarité de second ordre

$E[S(t)S(t-\tau)] = E[S(t+\tau)S(t)]$

D'où :

$$\Gamma_{SS}(\tau) = \Gamma_{SS}(-\tau) \qquad (1.35)$$

9.4. Ergodicité

Un processus est dit ergodique lorsque toutes ses moyennes temporelles (moments temporels) sont identiques, on écrit :

$$\overline{S_1(t)} = \overline{S_2(t)} = \ldots = \overline{S_N(t)} \qquad (1.36)$$

Si le processus est stationnaire et ergodique :

$$E[S(t)] = \overline{S(t)} \qquad (1.37)$$

Remarque : L'ergodicité et la stationnarité sont indépendantes.

10. Signaux et Systèmes

Un *système* est une entité physique qui réalise une opération sur un signal. Un système définit donc un signal d'entrée et un signal de sortie ; le signal de sortie correspond à la transformation opérée par le système sur le signal d'entrée. Par exemple, l'oreille humaine est un système transformant un signal correspondant à une variation de pression acoustique en des séquences parallèles de signaux électriques sur le nerf auditif. Un microphone est un système un peu analogue au précédent (en première approximation très réductrice...) dans la mesure où une variation de pression acoustique est transformée en un signal électrique monodimensionnel. L'étude de tels systèmes conduit à analyser les transformations entre signaux d'entrée et de sortie pour des systèmes plus ou moins complexes ; cette activité est appelée *traitement du signal*. On ne parlera ici que du traitement des signaux numériques.

11. Fonctions particulières

11.1. Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac δ(t) (figure 1.10), aussi appelée impulsion unité ou distribution delta, est définie par le produit scalaire :

$$x(0) = \langle x, \delta \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt \quad (1.38)$$

d'une manière générale :

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt \quad (1.39)$$

en particulier, en posant $x(t) = 1$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \quad (1.40)$$

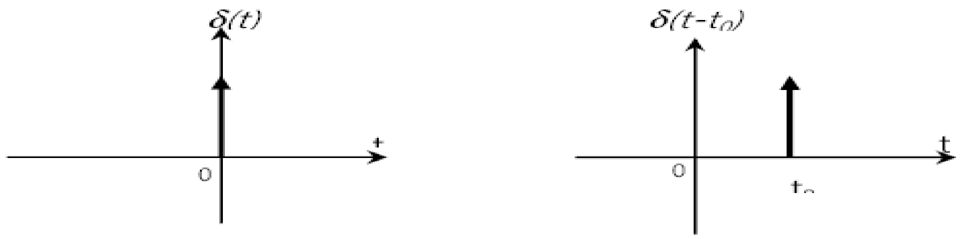

Figure 1.10. Impulsion de Dirac

Propriétés :

- Soit $x(t)$ une fonction continue en $t = 0$ ou $t = t_0$

$$x(t).\delta(t) = x(0).\delta(t)$$

$$x(t).\delta(t - t_0) = x(t_0).\delta(t - t_0)$$

- Identité :

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Translation :

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2)$$

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$$

- Changement de variable :

$\delta(at) = |a|^{-1}\delta(t)$ avec en particulier, si $w = 2\pi f$

$$\delta(w) = \frac{1}{2\pi}\delta(f)$$

- Suite périodique d'impulsion de Dirac : (Peigne de Dirac – figure 1.11)

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$x(t).\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT).\delta(t - kT)$$

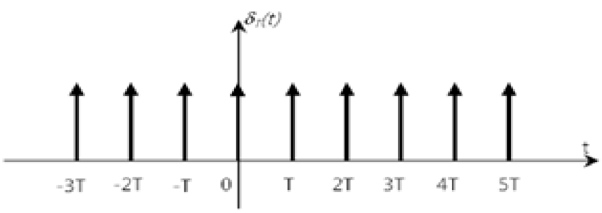

Figure 1.11. Peigne de Dirac

11.2. Fonction signe

$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases} = \frac{t}{|t|} \; pour \; t \neq 0$$

Par convention la valeur à l'origine est nulle.

$Sgn(t)$

+1

0

t

-1

Figure 1.12. Fonction signe

11.3. Fonction saut unité (ou Echelon)

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 1 > 0 \end{cases}$$

La fonction échelon n'est pas définie pour $t = 0$

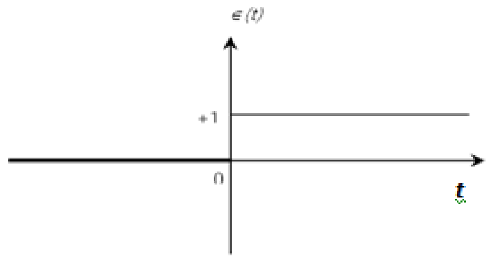

Figure 1.13. Fonction Echelon

11.4. Fonction rampe

La fonction rampe peut se définir à partir de la fonction saut unité :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} \epsilon(\tau)\, d\tau = t.\epsilon(t) \;\Rightarrow\; \epsilon(t) = \frac{dr(t)}{dt} \; pour \; t \neq 0$$

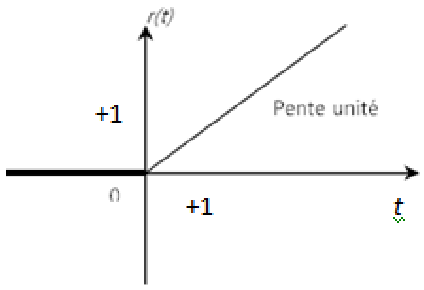

Figure 1.14. Fonction Rampe

11.5. Fonction porte

$$rect(t) = \epsilon\left(t+\frac{1}{2}\right) - \epsilon\left(t-\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

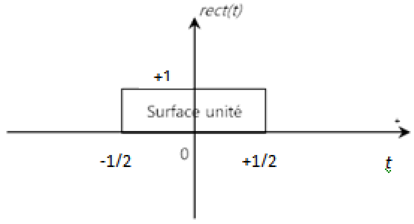

Figure 1.15. Fonction Porte centrée en $t = 0$.

En introduisant le changement : $t = t\ /\ \mathrm{T}$ on obtient d'une manière plus générale pour une impulsion rectangulaire de durée T centrée en $t = \tau$:

$x(t) = A\, rect(\frac{t-\tau}{T})$

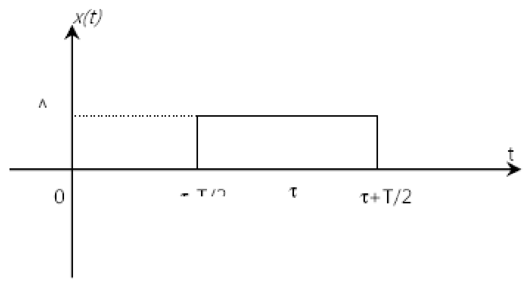

Figure 1.16. Fonction Porte décalée de τ.

11.6. Fonction triangulaire

La fonction triangulaire normalisée :

$$Tri(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| \leq 1 \\ 0\,, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

On peut aussi écrire :

$Tri(t) = rect(t) * rect(t)$

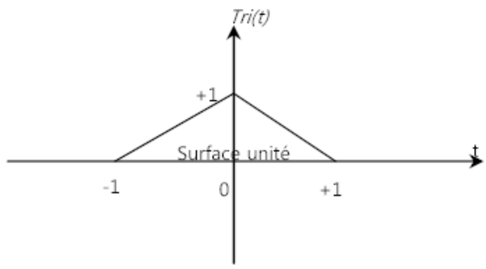

Figure 1.17. Fonction triangulaire centrée

x(*t*)

A

De même : $x(t) = A\, Tri(\frac{t-\tau}{T})$

0 τ-T/2 τ τ+T/2 ***t***

Figure 1.18. Fonction triangulaire décalée de τ.

11.7. Fonction sinus cardinal

$sinc(f) = \frac{sin\pi f}{\pi f}$

$sinc(0) = 1$

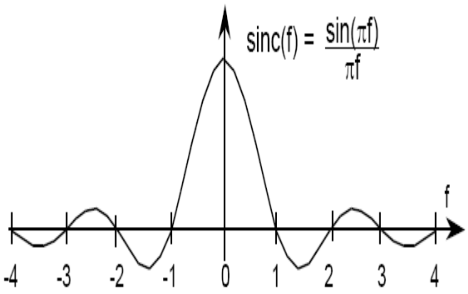

Figure 1.19. Fonction Sinus cardinal

12. Notions de puissance et d'énergie

12.1. Energie d'un signal

Soit $x(t)$ un signal quelconque (fonction complexe),

- L'énergie sur $[t_1 , t_2]$ est définie par :

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt \qquad (1.41)$$

Où la notation $|x(t)|^2$ signifie $x(t)*x^*(t)$; $x^*(t)$: est $x(t)$ conjugué.

Les signaux à énergie finie satisfont la condition suivante :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x^2(t)| \, dt < \infty \quad o\text{ù } E_x \text{ est l'énérgietotale du signal } x(t) \qquad (1.42)$$

12.2. Puissance moyenne d'un signal

Soit $x(t)$ un signal quelconque (fonction complexe), la puissance moyenne sur $[t_1 , t_2]$ est définie par :

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt \qquad (1.43)$$

Cas particulier des signaux périodiques de période T_0

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x_p(t - kT_0) \qquad (1.44)$$

où $x_p(t)$ est le signal sur une période T_0, alors la puissance moyenne sur une période est égale à :

$$P_x = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \left|x_p(t)\right|^2 \, dt = P_{x_p} \qquad (1.45)$$

12.3. Signaux à énergie finie

Un signal $x(t)$ est dit à énergie finie s'il est de carré sommable, c'est –à-dire si :

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \tag{1.46}$$

Ce qui implique que $P_x = 0$.

12.4. Signaux à puissance moyenne finie

Un signal $x(t)$ est dit à puissance moyenne finie si :

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{+T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty \tag{1.47}$$

Cas des signaux périodiques de période T :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0-\frac{T}{2}}^{t_0+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty \tag{1.48}$$

Si $P_x \neq 0$, alors $W_x = \infty$ (signal àénergie totale infinie).

Exemple :

Calculer dans chaque cas l'énergie totale et la puissance moyenne totale (a > 0).

$Arect(t/T)$; $Asinwt$; $\delta(t)$; Ae^{-at}; $A\,tri(t/T)$

Solution :

$\boldsymbol{P = 0, E = A^2T\ ; P = \frac{A^2}{2}, E = \infty, P = \frac{1}{2}, E = \infty; P = \infty, E = \infty; P = 0, E = \frac{2A^2T}{3}}$