CHAPITRE II

ANALYSE DE FOURIER

Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire l'analyse de Fourier dans le cadre des systèmes électroniques linéaires. Cette analyse est une analyse de type fréquentielle, étendue à des régimes qui ne sont pas forcément sinusoïdaux. L'analyse de Fourier est très utilisée en électricité comme en physique. On introduit les séries de Fourier complexes et réelles. Les termes des séries de Fourier sont des fonctions sinusoïdales et cosinusoïdales. A nouveau, on aperçoit l'importance de l'analyse harmonique des systèmes, puisque la pertinence de ces décompositions est garantie pour tout système linéaire (principe de superposition).

La transformation de Fourier a déjà été signalée comme un cas particulier mathématique de la transformation de Laplace. Elle est très employée dans toutes les branches techniques avec des implications vastes et diverses : des relations d'incertitudes en physique aux espaces réciproques en cristallographie, en passant bien sûr par l'électricité. Pour cette seconde partie du chapitre, nous nous bornons à la définition de la transformation de Fourier où l'on aborde la notion de spectre d'un signal. Pour plus vaste information, nous conseillons au lecteur de se reporter à une introduction au traitement de signal, domaine où cet outil mathématique est indispensable.

1. Les séries de Fourier

Un signal périodique quelconque se décompose en une somme de signaux sinusoïdaux, c'est une propriété remarquable.

1.1. Série de Fourier complexe

La fonction $x: t \to x(t)$; $t \in réels$, définie sur l'intervalle $[t_1, t_1$+T], peut être exprimée comme une série de fonctions :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi\frac{n}{T}t} \qquad (2.1)$$

L'ensemble des fonctions :

$$\left\{\psi_n;\ \psi_n(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}t} = \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + jsin(\frac{2\pi n}{T}t)\right\} \tag{2.2}$$

Constitue une base de l'espace vectoriel contenant la fonction *x*, et les coefficients X_n constituent les projections de la fonction *x* sur cette base.

On utilise le produit scalaire usuel et on obtient, pour le calcul de ces coefficients :

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T}t}dt \tag{2.3}$$

1.2. Spectre fréquentiel

Les différentes fréquences de la décomposition en série de Fourier sont données par :

$$f_n = \frac{n}{T}, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.4}$$

Le spectre fréquentiel et donné par le graphe :

$$\{(f, X_n)\} \tag{2.5}$$

soit physiquement : les amplitudes associées aux différentes fréquences.

Ce spectre fréquentiel est donc une manière de représenter un signal périodique, et cela reste valable dans le cas général d'un signal non périodique (d'énergie finie), ce que nous verrons avec la transformée de Fourier.

Le spectre fréquentiel est ici discret, il contient :

- *le niveau continu :* valeur moyenne du signal
- *la composante fondamentale,* de la fréquence du signal
- *les harmoniques,* de fréquences multiples de celle de la fondamentale
- *les fréquences négatives,* qui n'ont pas de signification physique directe ; on doit mathématiquement leur présence, au développement de la fonction réelle en série complexe. Ces fréquences négatives disparaissent avec l'utilisation de séries de Fourier réelles.

1.3. Exemple : décomposition d'un train d'impulsions

L'impulsion suivante est décomposée en série de Fourier complexe, en choisissant une période T :

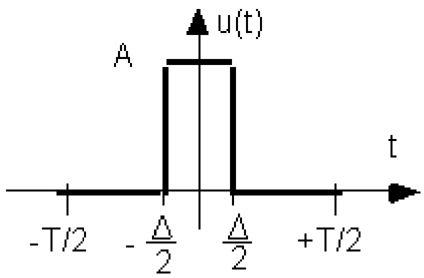


Figure 2.1. Exemple : décomposition d'un train d'impulsions

Tous calculs effectués on obtient pour les coefficients :

$$X_n = \frac{A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n \Delta}{T}\right) \tag{2.6}$$

En prenant comme variable la fréquence discrète :

$$f_n = \frac{n}{T}, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.7}$$

On obtient l'expression suivante :

$$X_n(f_n) = \frac{A\Delta}{T} \frac{\sin(\pi \Delta f_n)}{\pi \Delta f_n} \qquad \text{(Enveloppe de la forme } \frac{\sin(x)}{x}\text{)} \tag{2.8}$$

On obtient, pour la représentation du spectre de cette impulsion :

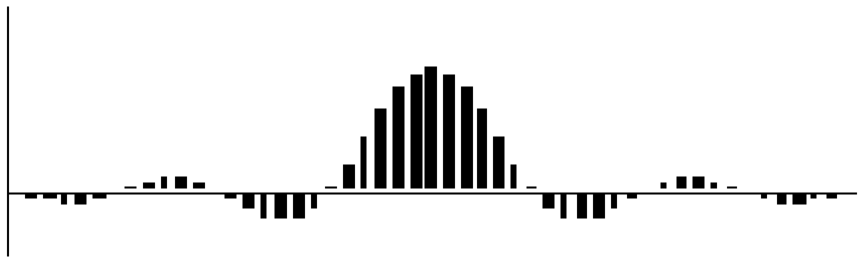


Figure 2.2. Exemple : Spectre fréquentiel discret de l'impulsion.

Il convient de remarquer que si on examine la somme de la série de Fourier sur tout l'axe des temps, on obtient un signal périodique :

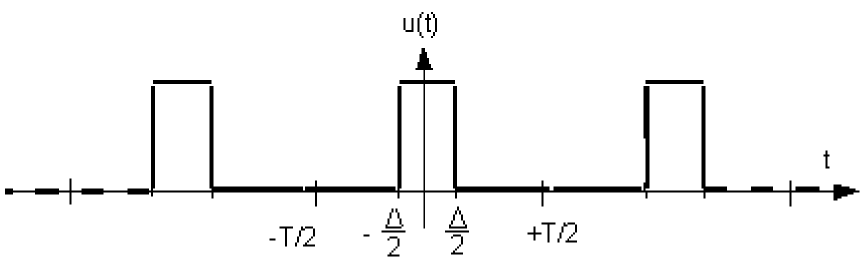


Figure 2.3. Exemple : train d'impulsions

Il a donc deux approches possibles : soit on ne s'intéresse qu'à une portion de signal (impulsion sur un intervalle de temps T) et alors la série ne prend de sens que sur cet intervalle, soit on développe sur tout l'axe réel un signal périodique grâce à cette décomposition de Fourier. C'est ce dernier cas qui intéresse en général, car les signaux non périodiques sont traités à l'aide de la transformation de Fourier qui génère un spectre continu.

1.4. Séries de Fourier réelles

Comme le signal électrique est représenté par une fonction réelle à valeurs réelles, on peut aussi traiter ce cas sans passer par les nombres complexes.

On a le développement suivant, pour les séries de Fourier réelles :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T} t)) \tag{2.9}$$

avec, pour les coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\cos(2\pi \frac{n}{T} t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\sin(2\pi \frac{n}{T} t)dt$$

Les signaux impairs se développent en série de sinus, et les signaux pairs en série de cosinus, ce qui simplifie d'autant les calculs. Le spectre obtenu est unilatéral, d'où l'appellation de séries de Fourier unilatérales.

Dans l'exemple précédant du train d'impulsions rectangulaires (figure 2.3). On obtient, comme développement de Fourier unilatéral :

$$x(t) = \frac{A\Delta}{T} + 2\frac{A\Delta}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi\Delta\frac{n}{T})}{\pi\Delta\frac{n}{T}} \tag{2.10}$$

Et pour la représentation graphique du spectre discret (unilatéral) :

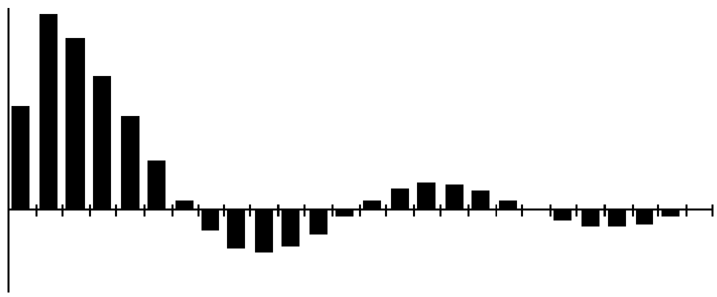
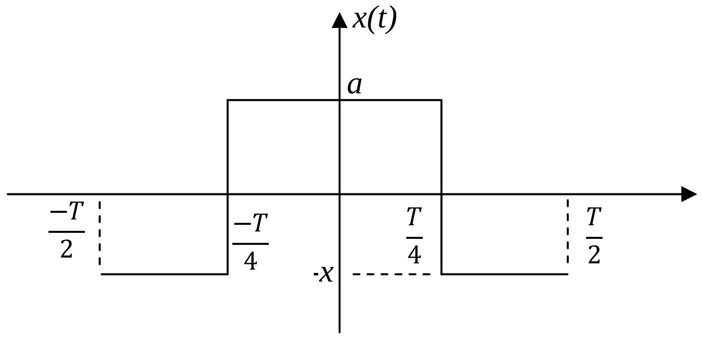


Figure 2.4. Exemple : Spectre fréquentiel unilatéral discret de l'impulsion.

Remarquons que le spectre unilatéral n'est pas la version tronquée du spectre bilatéral : les harmoniques ont le double d'amplitude par rapport à ce dernier, sauf cas particulier, celui de la fréquence nulle . Il faut voir que le spectre bilatéral d'un signal sinusoïdal est donné par les deux fréquences : la positive et la négative, et leur amplitude est la moitié de celle de la fréquence du spectre unilatéral.

Exemple :

Soit un signal pair *x*(*t*) de période T défini sur $[0, \frac{T}{2}[$ représenté par la figure ci-dessus :



- Développer en série de Fourier le signal périodique *x*(*t*).

Le développement suivant en séries de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

avec, pour les coefficients :

$$a_0 = 0; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\cos(2\pi \frac{n}{T} t)dt; \quad b_n = 0 \text{ : signal pair}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(nwt)dt = \frac{4a}{nwT}\left([\sin(nwt)]_0^{\frac{T}{4}} - [\sin(nwt)]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\right) = \frac{4a}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Pour n pair $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$, pour $n = 2k + 1$, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^k$, d'où :

$$a_k = \frac{4a}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos((2k+1)\,wt)}$$

1.5. Séries de Fourier alternative

Elle est définie par :

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n)), \qquad A_0 = a_0 \tag{2.11}$$

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \qquad \varphi_n = Arctg\,\frac{b_n}{a_n}$$

A_n : amplitude de la composante spectrale ; φ_n : phase de la composante spectrale.

1.6. Développement d'une fonction périodique en série de Fourier

1.6.1. Série d'exponentielles imaginaires

- Théorème de Fourier :

Soit $f : R \to C$ périodique de période T, de pulsation $k = \frac{2\pi}{T}$ Si f est de carré sommable sur [0, T], alors $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n\, e^{ik_n x}$ où, pour $n \in Z$:

$k_n = n \times \frac{2\pi}{T}$ et $C_n = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) e^{-ik_n x} dx$

- Spectre de Fourier : C'est $\{|C_n|, n \in Z\}$: (En général, $|c_n|$ décroît quand $|n|$ augmente)

1.6.2. Série de sinus et de cosinus

- Cas général :

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(k_n t) + b_n \sin(k_n t))$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)dt$; $a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \cos(k_n t)dt$; $b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \sin(k_n t)dt$

- Parité :

Si $x(t)$ est paire, on aura $\forall n \in \mathrm{N}, b_n = 0$

Si $x(t)$ est impaire, on aura $\forall n \in \mathrm{N}, a_n = 0$

- Cas d'une fonction réelle :

Si $a_n, b_n \in \mathrm{R}$, $a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) = a'_n \cos(k_n x + \varphi_n)$

Et donc $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos(k_n t + \varphi_n)$

Le terme pour $n = 1$ s'appelle le fondamental ou la première harmonique.

Celui pour $n = 2$ s'appelle deuxième harmonique, etc.

1.6.3. Egalité de Bessel–Parseval

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 \qquad (2.12)$$

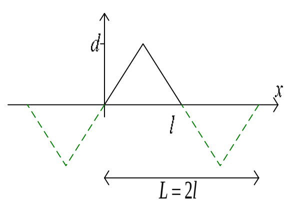
1.7. Développement d'une fonction de support fermé

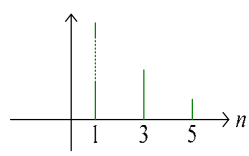
1.7.1. Exemple

On a $k_n = 2n\frac{\pi}{L} = n\frac{\pi}{l}$, et la fonction est impaire.

On trouve alors :

$$x(t) = \frac{8d}{\pi^2}(sin\frac{\pi t}{l} - \frac{1}{9}sin\frac{3\pi t}{l} + \frac{1}{25}sin\frac{5\pi t}{l} + \cdots$$





1.7.2. Fonction spatiale et temporelle

- Fonctions spatiales

x : abscisse, L : longueur (ou longueur d'onde), $k = \frac{2\pi}{L}$: pulsation spatiale.

On a: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{ik_n x}$

- **Fonctions temporelles**

$x \to t$, $L \to T$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

ω : pulsation temporelle ; $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{iw_n t}$.

2. La transformation de Fourier

En électronique et en traitement de signal, les signaux ne sont pas tous périodiques, cela représente même l'exception. Le développement en séries de Fourier ne représente donc pas forcément l'outil d'analyse privilégié, puisqu'il est nécessaire pour cela d'avoir des signaux périodiques.

2.1. Transformation de Fourier : définition

La transformation de Fourier peut être vue mathématiquement comme un cas particulier de celle de Laplace, en posant $p = j2\pi f$ pour la variable fréquentielle. On définit :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft}\, dt \tag{2.13}$$

Où :

$$x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft}\, df \tag{2.14}$$

La fonction $X: f \to X(f)$ est la transformée de Fourier de la fonction $x: t \to x(t)$. En traitement de signal, on utilise plus volontiers la variable fréquence f (*Hz*) que la pulsation $w = 2\pi f$ $[\frac{rad}{s}]$, habituellement utilisée en transformée de Fourier.

On dit que $x(t)$ et $X(f)$ forment une paire de transformée de Fourier, c'est noté par :

$$x(t) \rightleftharpoons X(f) \tag{2.15}$$

La transformée de Fourier existe si les trois conditions de DIRICHLET sont vérifiées (il s'agit de conditions suffisantes mais pas nécessaires) :

- $x(t)$ possède un nombre fini de discontinuités sur tout intervalle fini,

- $x(t)$ possède un nombre fini de maxima et de minima sur tout intervalle fini,

- $x(t)$ est absolument intégrable, c-à-d :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \tag{2.16}$$

Il est important de noter que tous les signaux d'énergie finie, c-à-d tous les signaux de L_2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)e^{j2\pi ft}\right|^2 dt < +\infty \tag{2.17}$$

admettent une transformée de Fourier.

Exemple :

On note $rect_T(t)$ l'impulsion rectangulaire définie par :

$$rect_T(t) = x(t) = \begin{cases} A, & si\ t \in [-T/2, T/2] \\ 0, & ailleurs \end{cases} \tag{2.18}$$

On cherche alors de calculer la transformée de Fourier (TF) de $x(t)$.

$$X(f) = TF\{rect_T(t)\} = A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft}\, dt = A[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}]_{-T/2}^{T/2} = A\,\frac{1}{j2\pi f}[e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}]$$

et enfin $X(f) = AT\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \equiv ATsinc(\pi fT)$: fonction sinus cardinal.

2.2. Spectre d'amplitude et spectre de phase

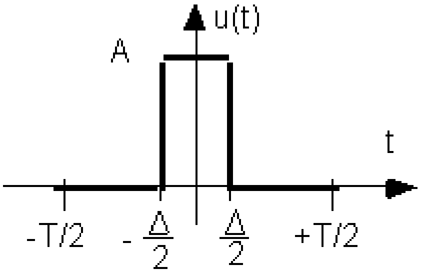
Dans le cas général, la transformée de Fourier d'une fonction produit une fonction à valeurs complexes. Ainsi, on peut obtenir deux informations de la fonction transformée de Fourier :

Le spectre d'amplitude : $\{(f, |X(f)|)\}$

Le spectre de phase : $\{(f,\ \arg(X(f)))\}$

2.3. Exemple :

On reprend l'impulsion précédente avec la transformée de Fourier :



Equation de l'impulsion : $x(t) = A\, rect(\frac{t}{\Delta})$

Tous calculs faits, on obtient pour sa transformée de Fourier : $X(f) = A.\Delta\ \frac{\sin(\pi\Delta f)}{\pi\Delta f}$. On constate que dans ce cas, *X*(*f*) est une fonction réelle. On peut la représenter graphiquement :

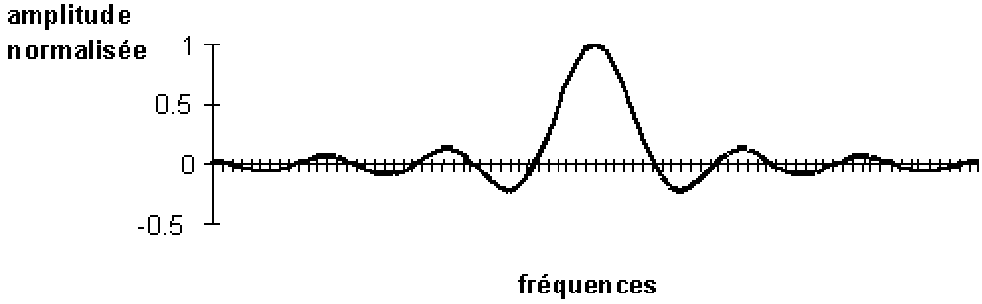


Figure 2.5. Exemple : Transformée de Fourier du signal rectangulaire.

Comme *X*(*f*) est réelle, son spectre de phase est nul pour les parties positives de la TF uniquement, et son spectre d'amplitude à l'allure suivante :

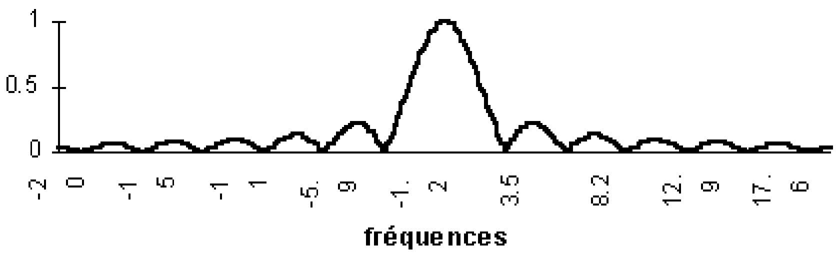


Figure 2.6. Exemple : Spectre d'amplitude du signal rectangulaire.

Remarques

Comme pour le développement en séries de Fourier, on assiste à l'apparition de fréquences négatives, qui ne s'interprètent pas directement, mais qui sont néanmoins porteuses d'énergie.

La transformée de Fourier ici correspond à l'enveloppe du spectre discret du développement de Fourier. Dans cette transformation de Fourier, toutes les fréquences sont mises à contribution pour la représentation fréquentielle du signal temporel : le spectre est *continu*.

Contrairement au développement en séries de Fourier qui génère une fonction périodique sur tout l'axe réel quelles que soient les valeurs prises par cette fonction en dehors de la période considérée, la transformation de Fourier est appliquée à la fonction agissant sur tout l'axe réel. Il est ainsi créé une correspondance entre l'espace temporel où le signal évolue, et l'espace fréquentiel un peu plus abstrait. Les électriciens appellent cela *la dualité temps-fréquence.* Les cristallographes parlent d'espace direct et d'espace réciproque, etc...

Comme déjà évoqué précédemment, l'utilité de cette transformation est d'obtenir une autre représentation d'un signal. Cette représentation fréquentielle est essentielle en traitement de signal. La situation est analogue à celle prévalant pour la transformation de Laplace, mais ici l'espace donné par la transformation de Fourier est bien repéré: c'est un espace de fréquences :

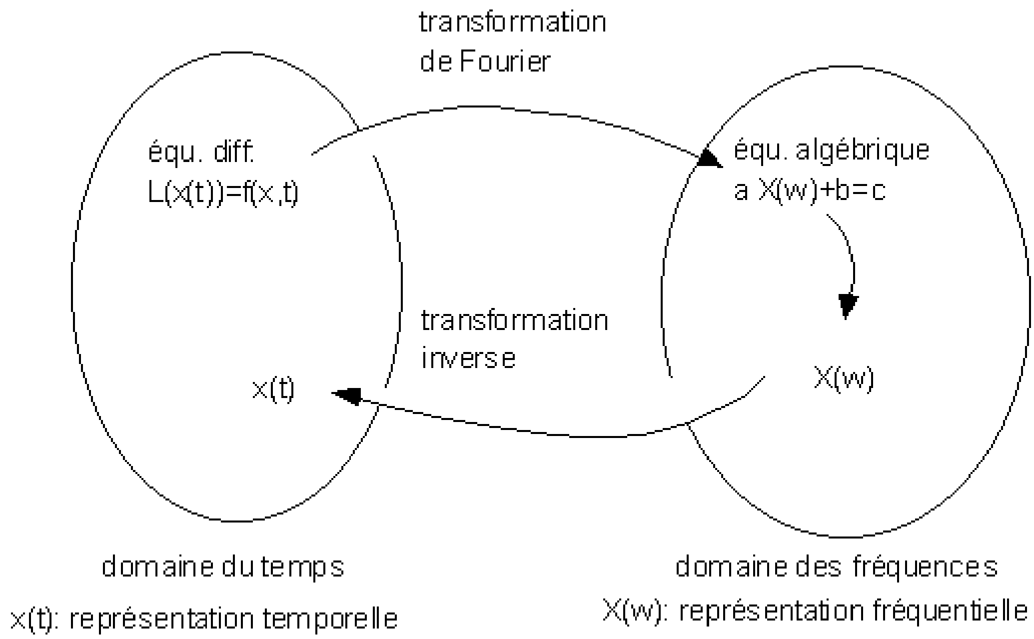


Figure 2.7. La dualité temps-fréquence.

2.4. Fonction de transfert

Ici nous présentons un exemple, où l'on emploie la transformée de Fourier, pour résoudre une équation différentielle. Ce n'est pas l'utilité principale de cet outil, mais cela permet de faire une remarque concernant les fonctions de transfert.

Si on réduit la transformation de Laplace à celle de Fourier, on prend comme variable : $p = j2\pi f$. Ainsi, la fonction de transfert de Laplace se transforme en celle de Fourier avec cette substitution. Et cette fonction de transfert de Fourier n'est rien d'autre que celle obtenue avec les nombres complexes et qui correspond en fait à la fonction de transfert en régime harmonique.

Schéma-bloc du système :

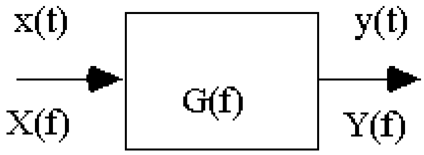


Figure 2.8. Schéma-bloc du système.

Dans l'espace temporel, on a :

$$L\big(x(t)\big) = y(t) \qquad (2.19)$$

L : opérateur linéaire ; *x*(*t*) : excitation du système ; *y*(*t*) : réponse du système.

Dans l'espace fréquentiel, on obtient :

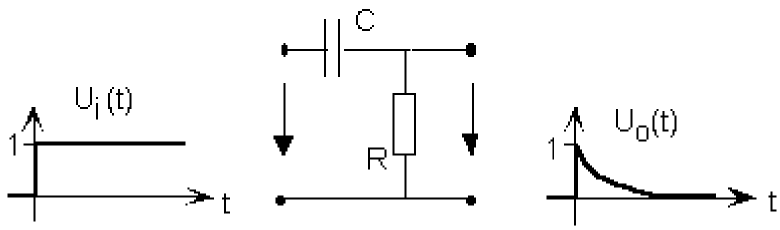
$$Y(f) = G(f).X(f) \qquad (2.20)$$

X(*f*) : Transformée de Fourier de l'excitation ; *Y*(*f*) : Transformée de Fourier de la réponse.

G(*f*) : Fonction de transfert.

Exemple : cellule RC excitée par un échelon unité

Soit une cellule RC, à laquelle on applique un échelon unité :



Par le diviseur de tension dans le domaine des *p*, on obtient la fonction de transfert de Laplace:

$$G(p) = \frac{RCp}{RCp+1}$$

Fonction de transfert de Fourier :

$$G(f) = \frac{RCj2\pi f}{RCj2\pi f+1}$$

Signal d'entrée :

$$U_{in}(f) = \frac{1}{j2\pi f}$$

Signal de sortie :

$$U_0(f) = G(f).U_i(f) = \frac{1}{j2\pi f+{}^{1}/_{RC}}$$

Transformée inverse du signal de sortie :

$$U_0(t) = e^{-\frac{t}{RC}}$$

2.5. Principales propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité

si $x_1(t) \rightleftharpoons X_1(f)$ alors, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$x_2(t) \rightleftharpoons X_2(f)$ $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \rightleftharpoons c_1 X_1(f) + c_2 X_2(f)$

Propriété d'échelle - Dilatation

$$x(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|_1} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Retard temporel

$$x(t - t_0) \rightleftharpoons X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

Déplacement fréquentiel

$$e^{j2\pi t f_0} x(t) \rightleftharpoons X(f - f_0)$$

Modulation d'amplitude

$x(t) = A cos(2\pi f_0 t).m(t)$; $x(t)$: le signal modulé en amplitude, $m(t)$: est le message

$$X(f) = \frac{A}{2}[M(f - f_0) + M(f + f_0)]$$

Moyennes

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt \quad ; \quad x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)df$$

Différentiation dans le domaine temporel

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightleftharpoons j2\pi f X(f) \quad ; \quad \frac{d^n x(t)}{dt^n} \rightleftharpoons (j2\pi f)^n X(f)$$

Intégration dans le domaine temporel

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \rightleftharpoons \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

Propriété de dualité

si $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ alors, $X(t) \rightleftharpoons x(-f)$

Propriétés de conjugaison et symétrie

si $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ alors, $x^*(t) \rightleftharpoons X^*(-f)$; $x(-t) \rightleftharpoons X(-f)$; $x^*(-t) \rightleftharpoons X^*(f)$

On en déduit que, si $x(t)$ est réels, alors : $X(f) = X^*(-f)$, et :

- La partie réelle de $X(f)$ est paire,
- La partie imaginaire de $X(f)$ est impaire,
- Le module de $X(f)$, $|X(f)|$ est pair,
- La phase de $X(f)$, $\phi(f)$ est impaire.

Parité

Pair : $x(t) = x(-t) \rightleftharpoons X(f) = X(-f)$

Impair: $x(t) = -x(-t) \rightleftharpoons X(f) = -X(-f)$

Impulsion du Dirac

$\delta(t) = \begin{cases} 0, & si \;\; t \neq 0 \\ +\infty, & si \;\; t = 0 \end{cases}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$; $TF\{\delta(t)\} = 1,\ TF\{1\} = \delta(f) = \delta(-f), \forall f$

$\delta(t - \tau) \rightleftharpoons e^{-j2\pi f\tau}$; $e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons \delta(f - f_0)$

2.6. Théorème de Parseval

L'égalité de Parseval dite parfois théorème de Parseval est une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier. Cette formule peut être interprétée comme une généralisation du théorème de Pythagore pour les séries dans les espaces de Hilbert. Dans de nombreuses applications physiques (courant électrique par exemple), cette formule peut s'interpréter comme suit : l'énergie totale s'obtient en sommant les contributions des différents harmoniques. L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : fréquentielle ou temporelle.

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \qquad (2.21)$$

2.6.1. Energie, Valeur efficace par la série de Fourier – Formule de Paseval

La valeur efficace du signal est donnée par :

$$X_{eff_{(t_1,t_2)}}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt = {a_0}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} {A_n}^2 \qquad (2.22)$$