CHAPITRE V

ECHANTILLONNAGE ET SIGNAUX DISCRETS

Introduction

On appelle ***signal*** toute manifestation sous forme d'une grandeur physiquement observable d'un phénomène le plus souvent électrique, acoustique ou optique. Dans un sens plus restrictif, un signal est la représentation physique de ***l'information*** qui est envoyée d'une source vers un destinataire : c'est le véhicule de l'intelligence dans les systèmes. Il transporte les ordres dans les équipements de contrôle et de télécommande. Il achemine sur les réseaux l'information, la porte ou l'image. Il est particulièrement fragile et doit être manipulé avec beaucoup de soin. Le traitement qu'il subit à pour but d'extraire les informations utiles éventuellement masquées par des perturbations indésirables, de modifier le message qu'il transporte ou de l'adapter aux moyens de transmission. Les techniques numériques interviennent justement à ce stade là. Ceci a été largement motivé par l'avancée spectaculaire réalisée dans le degré d'intégration des circuits , et dans la vitesse , de plus en plus rapide , de ces composants , ce qui a de même permis de mettre au point des processeurs très performants pour ***le traitement numérique de signal*** : lorsque le signal est numérisé , il se présente alors comme une séquence de valeurs numériques et le traitement numérique de signal consiste en une série d'opérations arithmétiques et logiques sur ces valeurs numériques.

Le signal analogique, dont la variable temps est continue, est d'abord échantillonné et la variable temps devient discontinue, le signal est donc considéré seulement en des instants particuliers qui sont des multiples entiers de la période d'échantillonnage.

Les avantages du ***traitement numérique*** du signal sont plus particulièrement la précision et la fiabilité. Cette discipline a trouvé d'importantes applications dans une multitude de domaine scientifiques et techniques comme les télécommunications, l'acoustique, la géophysique, l'astrophysique, la biomédecine, l'automatique, et les processus industriels, pour ne citer que quelques exemples.

Un des traitements de signal le plus principal est ***le filtrage***. Le filtrage ***sélectif*** consiste à sélectionner ou supprimer certaines composantes fréquentielle du signal. Il est utilisé pour supprimer la partie du signal non désirée qu'on appelle bruit pour ne préserver que le signal pertinent.

1. Signaux discrets

Un signal discret est un signal obtenu par l'expression d'une information à des valeurs ponctuelles du temps $x(t_i)$; il constitue donc une suite numérique. Dans la pratique, les signaux discrets sont les plus souvent obtenus par l'opération appelée *échantillonnage*.

Signal analogique ; signal à temps et amplitude continues.

Signal quantifié ; signal à temps continu et amplitude discrète.

Signal échantillonné ; signal à temps discret et amplitude continue.

Signal numérique ou digital ; signal à temps et amplitudes discrètes.

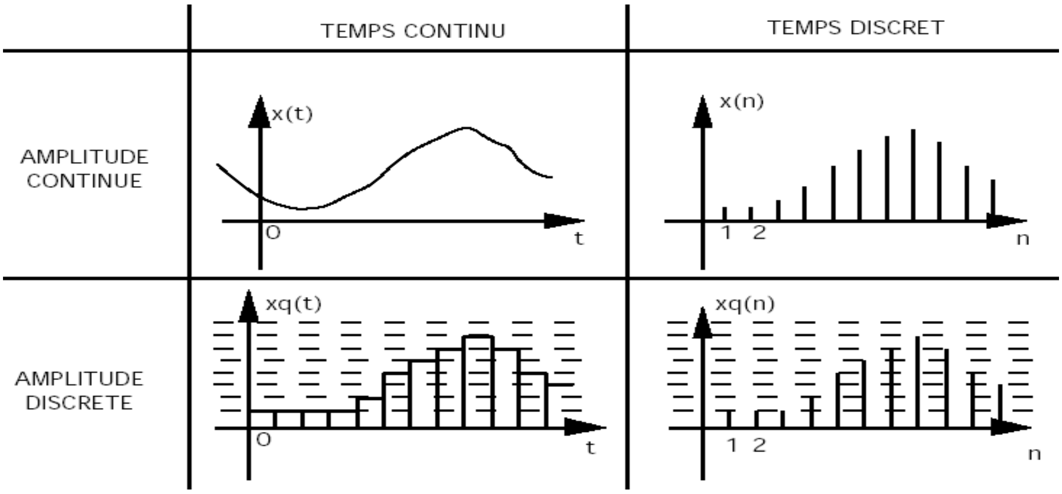


Figure 5.1. Signaux discrets.

On s'intéresse à une chaine de traitement numérique du signal (TNS) du type de la figure 5.2

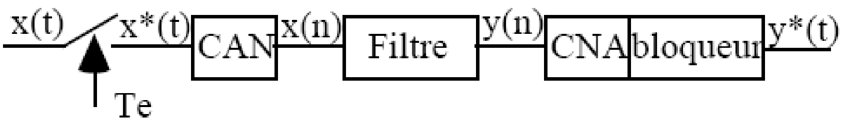


Figure 5.2. Chaine de TNS.

1.1. Signaux élémentaires

- **Impulsion unité $\boldsymbol{\delta(n)}$ - Echantillon unité $\boldsymbol{d(n)}$**

$$\delta(n) = d(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

- **Echelon unité $\boldsymbol{\mu(n)}$ (ou saut unité)**

$$\mu(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d(n-\theta) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

- **Séquence exponentielle réelle**

$x(n) = a^n \ ; a < 1$

$x(t) = e^{-\alpha t} \Longrightarrow x(nT_e) = e^{-\alpha nT_e} = (e^{-\alpha T_e})^n = a^n$

- **Séquence sinusoïdale**

$x(n) = Acos(w_0 n + \varphi);\ w_0 = \frac{2\pi}{T_e} e\ t\ T_e = 1/f_0$

$w_0 : pulsation$

- **Signal rectangulaire**

$$rect_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N-1 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

- **Signaux causals**

$$y(n) = x(n)\mu(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 0 \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

- **Séquence périodique**

$x(n) = x(n+N)\ ; N : période$

1.2. Energie et puissance des signaux discrets

- L'énergie d'une séquence $\{x(n)\}$ est définie par : $E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$
- La puissance moyenne d'une séquence $\{x(n)\}$ est définie par : $P_x = \lim_{k \to \infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$

2. Echantillonnage

L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs d'un signal à intervalles définis, en général réguliers. Il produit une suite de valeurs discrètes (figure 5.2). Le *pas* ou la *période d'échantillonnage* est l'intervalle entre deux échantillons. La plupart du temps, l'intervalle entre deux échantillons consécutifs est constant.

Le traitement numérique du signal par ordinateur exige que le signal soit converti en une suite de nombres (numérisation). Cette conversion se décompose, sur le plan théorique, en trois opérations :

1. l'**échantillonnage** prélève, le plus souvent à intervalles réguliers, la valeur du signal ;

2. la **quantification** transforme une valeur quelconque en une valeur prise dans une liste finie de valeurs valides pour le système ;

3. le **codage** fait correspondre à chaque valeur valide pour le système un code numérique.

La théorie de l'échantillonnage s'applique à tout système capturant des valeurs à intervalles définis, y compris quand il y a codage sans quantification, comme dans le cas du relevé des valeurs par une personne, quand il n'y a ni quantification ni codage et que les valeurs échantillonnées restent analogiques, que les grandeurs aient une seule dimension ou plusieurs. Pour déterminer la méthode d'échantillonnage, il faut avoir une connaissance préalable du signal. Il faut au moins déterminer une fréquence maximale susceptible d'y être présente.

.

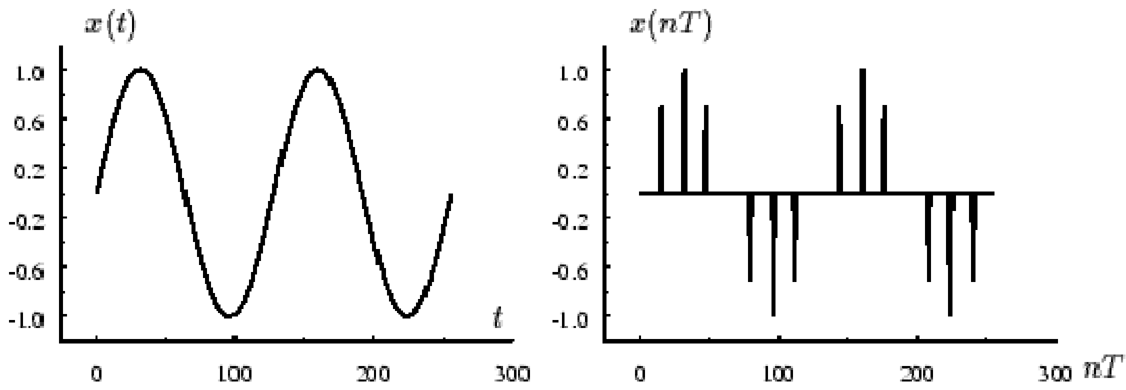


Figure 5.2. Illustration de l'échantillonnage d'un signal : on mesure la valeur du signal à des instants qui sont des multiples de la période d'échantillonnage.

3. Echantillonnage idéalisé

Le modèle général d'un échantillonneur idéal est :

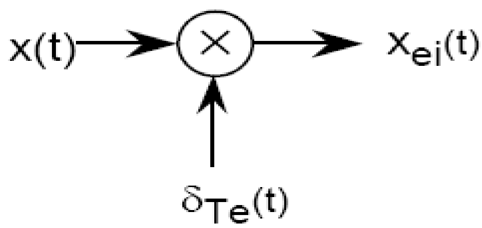


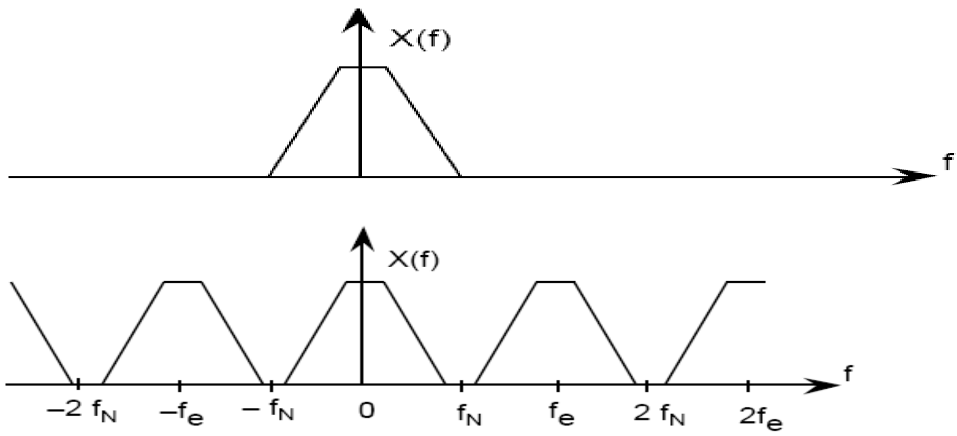
Figure 5.3. Echantillonneur.

$$X_{ei}(t) = X(t).\delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(t)\delta(t - nT_e) \tag{5.1}$$

$\delta_{T_e}(t)$: est appelé fonction d'échantillonnage.

On peut assimiler théoriquement la suite idéale d'échantillons prélevés avec une cadence fixe $f_e = 1/T_e$ à un signal $X_{ei}(t)$ obtenu par une fonction d'échantillonnage idéalisée (peigne du Dirac).

- Pour un signal X(t) déterministe : $X_e(f) = X(f) * f_e.\delta_{f_e}(f) = f_e.\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$



4. Echantillonnage réel

La fonction d'échantillonnage réel $e(t)$ est donnée par

$$e(t) = \delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} rect_\tau(t - nT_e)\,;\; T_e = {}^{1}/_{f_e} \quad (5.2)$$

- Pour un signal X(t) déterministe :

$$X_e(f) = X(f) * E(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_e.\tau.sinc(\pi f_e \tau).X(f - nf_e)$$

- Pour un signal x(t) aléatoire statiquement indépendant de $e(t)$ alors :

$$R_{x_e}(\tau) = R_x(\tau).R_e(\tau)\,;\; \Phi_{x_e}(f) = \Phi_x(f) * \Phi_e(f)\,;$$

$$\Phi_{x_e}(f) = \Phi_x(f) * \Phi_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} {f_e}^2.\tau^2.sinc^2(\pi f_e \tau).\Phi_x(f - nf_e)$$

5. Théorème d'échantillonnage

Le théorème d'échantillonnage, dit aussi théorème de Shannon ou théorème de Nyquist-Shannon, établit les conditions qui permettent l'échantillonnage d'un signal de largeur spectrale et d'amplitude limitées.

Dans le cas général, le théorème d'échantillonnage énonce que l'échantillonnage d'un signal exige un nombre d'échantillons par unité de temps supérieur au double de l'écart entre les fréquences minimale et maximale qu'il contient. Dans le cas le plus courant, la fréquence minimale du signal est négligeable par rapport à la fréquence maximale et le théorème affirme simplement :

La représentation discrète d'un signal ayant un spectre de type passe bas exige des échantillons régulièrement espacés à une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal $f_e \geq 2f_{max}$.

- *Si le signal est de type passe bande* $B = f_2 - f_1$ $(f_2 > f_1)$, celui-ci doit être échantillonné à la fréquence $f_e \geq 2\,{}^{f_2}/_{m}$; m : le plus grand nombre entier $\leq {}^{f_2}/_{B}$.

Réciproquement, l'échantillonnage avec des échantillons régulièrement espacés peut décrire un signal à condition qu'il ne contienne aucune fréquence supérieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage, dite *fréquence de Nyquist*.

Le théorème inclut des possibilités moins souvent mises en pratique, comme l'échantillonnage d'un signal à bande de fréquences étroite à moins du double de la fréquence maximale. Il montre aussi que d'autres types d'échantillonnage, par exemple avec des échantillons groupés par deux, ou un échantillonnage de la valeur et de sa dérivée un point sur deux, peuvent décrire le signal. Dans tous ces cas, le même nombre total d'échantillons est nécessaire.

La reconstitution du signal peut être faite en temps réel par un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_e / 2$ et en temps différé par interpolation polynomial.

6. Conversion analogique - numérique et numérique – analogique

Le monde physique est par nature analogique (dans l a quasi-totalité des cas). Il est perçu via des signaux analogiques (son, ondes visuelles, etc), qui peuvent être traités par des systèmes analogiques. Depuis une vingtaine d’années, le traitement numérique des données prend le pas sur les approches purement analogiques. Le recours au numérique permet en effet un stockage aisé de l’information, une excellente reproductibilité des traitements, la possibilité de développer relativement aisément des fonctionnalités complexes, une réduction des coûts de production, etc.

L’interface nécessaire entre le monde analogique et un traitement numérique donné est réalisé par des convertisseurs analogique – numérique (CAN, ou ADC pour Analog to Digital Converter en anglais1) et numérique – analogique (CNA, ou DAC pour Digital to Analog Converter). Le rôle d’un CAN est de convertir un signal analogique en un signal numérique pouvant être traité par une logique numérique, et le rôle d’un CNA est de reconvertir le signal numérique une fois traité en un signal analogique. Le schéma de principe d’un système de traitement numérique de signaux analogiques est représenté par la figure suivante :

Figure 5.4. Conversions et traitement numérique des données.

On distingue les méthodes de conversion analogique – numérique directes (parallèle – flash-, convertisseurs à approximations successives, série parallèle) et indirectes.

Exemple 1 : Signal sinusoïdal d'amplitude crête à crête V

Donc la pente maximale vaut :

$$\left|\frac{dx}{dt}\right|_{max} = \frac{d}{dt}\left[\frac{V}{2} sin2\pi ft\right]_{t=0} = \pi fV = \frac{V}{2^{n+1}T_c} \Rightarrow f_{max} = \frac{1}{2^{n+1}.\pi.T_c} \qquad (5.3)$$

Pour un convertisseur de durée de conversion 1 µs de n = 8*bits*. La fréquence maximale tolérée d'un signal sinusoïdal est de 622 Hz. Elle est 4 fois plus faible pour n = 10 *bits* et 10 fois plus faible pour T_c = 10 µs.

Exemple 2 : Signal aléatoire gaussien

Considérons un signal aléatoire $x(t)$ à spectre blanc borné : $\Phi_x(f) = \frac{1}{2}\eta.rect_{2B}(f)$ et de variance $\sigma_x{}^2 = \eta B$, la probabilité que $|x| > 3\sigma_x$ et inférieur 3%, donc on peut choisir pour le convertisseur la plage de conversion $V = 6\sigma_x$.

Donc $\frac{dx}{dt}$ possède une densité spectrale $(2\pi f)^2\Phi_x(f)$ et une variance $\sigma_{x'}{}^2 = 4\pi^2\eta\int_0^B f^2df = 4\pi^2B^2.{}^{\sigma_x{}^2}/_3$ or $x' = \frac{dx}{dt}$ est également à distribution gaussienne puisque la dérivation est une opération linéaire.

La pente ne dépasse pas donc en valeur absolue $3\sigma_{x'}$ qu'avec une probabilité inférieure à 3%. Donc :

$$\left|\frac{dx}{dt}\right|_{max} = 3\sigma_x = \frac{6\pi}{\sqrt{3}}.B\sigma_x\,; 6\sigma_x = V$$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right|_{max} = \frac{\pi BV}{\sqrt{3}} = \frac{q}{2T_c} = \frac{V}{2^{n+1}.T_c}$$

$$B_{max} = \frac{\sqrt{3}\,q}{2\pi.V.T_c} = \sqrt{3}\frac{1}{2^{n+1}.\pi.T_c} \Rightarrow B_{max} = 1.73.\frac{1}{2^{n+1}.\pi.T_c} \qquad (5.4)$$

On constate que (5.2) et (5.3) sont du même ordre de grandeur.

7. Quantification

En traitement des signaux, la quantification est le procédé qui permet d'approcher un signal continu par les valeurs d'un ensemble discret d'assez petite taille. On parle aussi de quantification pour approcher un signal à valeurs dans un ensemble discret de grande taille par un ensemble plus restreint. L'application la plus courante de la quantification est la conversion analogique-numérique mais elle doit le développement de sa théorie aux problèmes de quantification. On trouve : la quantification uniforme (par trancature, par arrondi) et non uniforme. La quantification est une opération destructrice d'information. Elle introduit une erreur (ou un bruit) entre le signal quantifié et le signal source. Cette erreur est généralement mesurée par la distance.

8. Classification des systèmes de traitement

Généralement, les signaux doivent être traités soit pour en extraire de l’information, soit pour les rendre porteurs d’information. Ces traitements sont effectués à l’aide de systèmes que l’on appelle ***systèmes de traitement de signaux***. Un tel système agit sur un signal d’entrée et produit, à sa sortie, un signal qui est sous une forme plus appropriée pour l’utilisation envisagée.

On peut classer les systèmes de traitement selon la nature des signaux sur lesquels ils opèrent. On parle ainsi : ***systèmes analogiques*** (opérant sur des signaux analogiques et produisent des signaux analogiques), ***systèmes échantillonnés, systèmes numériques ou digitaux*** (agissant sur des signaux numériques et produisant des signaux numériques) et ***systèmes hybrides*** (convertisseurs analogique -numérique).

8.1. Systèmes numériques

Un ***système de traitement numérique*** agit sur un signal numérique d’entrée et produit un autre signal numérique à sa sortie. Autrement dit, il établit une relation de cause à effet.

Pour analyser un système donné, il est nécessaire de le représenter par un modèle mathématique ; en générale un tel modèle est un opérateur fonctionnel (ou transformation) S qui agit sur un signal d’entrée $x(k)$ et le transforme en un signal de sortie $y(k)$. Cette opération est représenté par : $y(k) = S[x(k)]$

8.2. Systèmes causaux

Ces systèmes sont caractérisés par le fait que leur réponse ne précède jamais leur excitation c'est-à-dire ;

Si on a ; $x(k) = 0$ pour $k < k_0$

on doit avoir $y(k) = 0$ pour $k < k_0$

$y(k)$ est la réponse à l'excitation $x(k)$

Cette caractéristique traduit le fait que l'effet ne puisse jamais précéder la cause qui le produit. Cette condition de causalité est nécessaire pour que le système soit physiquement réalisable.

8.3. Systèmes stables

Un système est dit ***stable*** si sa réponse à toute entrée bornée est bornée. Comme la causalité, la stabilité est un critère indispensable à la réalisation possible d'un système.

Cette restriction permet donc, de contrôler la dynamique des signaux de sortie. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité est donnée par l'inégalité :

$$\sum_n |h(n)| < \infty \tag{5.5}$$

Ou $h(n)$ constitue la réponse impulsionnelle du système tel que :

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(k-n) = x(k) * h(k) \tag{5.6}$$

8.4. Systèmes linéaires

Un système est ***linéaire*** si :

$$S[a.\, x_1(k) + b.x_2(k)] = a.S[x_1(k)] + b\,.S[x_2(k)] \tag{5.7}$$

Ou a et b sont deux constantes.

$x_1(k)$, $x_2(k)$ deux entrées ou excitations. S est l'opérateur fonctionnel caractérisant le système.

8.5. Systèmes linéaires discrets invariants dans le temps (SLIT)

Si la réponse à l'excitation $x(k)$ est $y(k)$, le système linéaire est dit invariant si la réponse à $x(k-k_0)$ est $y(k-k_0)$, ou k_0 est un nombre entier quelconque.

Pour qu'un système numérique soit linéaire invariant dans le temps, deux conditions doivent être satisfaisantes :

***linéaire :** $S[a.\, x_1(k) + b.x_2(k)] = a.S[x_1(k)] + b.S[x_2(k)]$

***invariance dans le temps** : $S[x(k-k_0)]= y(k-k_0)$ avec $S[x(k)] = y(k)$.

Exemple

Soit : $h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \quad a < 1 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

$n < 0 \Rightarrow y(n) = 0$

$0 < n < N \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}$

$n \geq N \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$

- Causalité :

Un système causal : $h(n) = 0 \; si \; n < 0$; une séquence $x(n)$ est causale : $x(n) = 0 \; si \; n < 0$

- Stabilité : $\sum_n |h(n)| < \infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{k=0}^{N-1} |a|^n = \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} = \frac{1}{1-|a|}$; stable si : $|a| < 1$

9. Equation aux différences

Mathématiquement, l'excitation et la réponse d'un large sous- ensemble de systèmes linéaires satisfont une équation aux différences d'ordre N du type :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(k) y(k-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m(k) x(k-m) \qquad N, M \in I\aleph^* \tag{5.8}$$

Une telle équation est appelée ***équation aux différences linéaire***.

Exemple

$y(n) - ay(n-1) = x(n)$

Si $x(n) = \delta(n) \; alors \; y(n) = h(n) \;\; \Rightarrow h(n) - ah(n-1) = \delta(n)$

Système causal $\Rightarrow h(n) = 0 \; pour \; n < 0$

$h(n) - ah(n-1) = \delta(n)$

$h(n) = ah(n-1) + \delta(n)$

$h(0) = ah(-1) + \delta(0) = 1$

$h(1) = ah(0) + \delta(1) = a$

$h(2) = ah(1) + \delta(2) = a^2$

….

$h(n) = a^n \quad \Rightarrow h(n) = a^n \mu(n)$

Si $h(n)$ est de durée finie $\Rightarrow$ *R.I.F* (Réponse Impulsionnelle Finie)

Si $h(n)$ est de durée infinie $\Rightarrow$ *R.I.I* (Réponse Impulsionnelle Infinie)

9.1. Equation aux différences linéaire à coefficients constants

Dans un système linéaire invariant, un signal d'excitation *x(k)* est traité d'une manière indépendante de l'origine de sa variable indépendante *k*. Par conséquent les coefficients $a_n(k)$ et $b_m(k)$ dans l'équation (5.8) sont des constantes indépendantes de *k*. Elle est appelée aussi équation aux différences linéaire à coefficients constants d'ordre N.

9.2. Réponse impulsionnelle et produit de convolution

Un système linéaire invariant dans le temps est caractérisé entièrement par sa réponse impulsionnelle *h(k)* définie comme la réponse du système à l'instant *k* au signal d'entrée impulsion unité *δ(k),* avec :

$$\delta(k) = f(x) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

En effet puisque *:* $S[\delta(k)] = h(k)$

La propriété d'invariance temporelle assure que : $S[\delta(k-n)] = h(k)$

Et puisque tout signal d'entrée *x(k)* du système peut se décomposer comme une combinaison linéaire de signaux *δ(k-n)* dont les coefficients sont *x(n);*

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(k-n)$$

Nous avons par linéarité et continuité :

$$y(k) = S[x(k)] = S\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(k-n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(k-n)$$

Donc : $y(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)h(k-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)x(k-n)$

Cette relation est appelée produit de convolution et noté *x(k)*h(k).*

Schématiquement ;

$$x(k) \longrightarrow \boxed{\text{S.L.I.T à réponse impulsionnelle}} \longrightarrow y(k) = x(k)*h(k)$$

Le produit de convolution est commutatif, associatif et distributif.

9.3. Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle ou réponse harmonique est définie comme étant la transformée de Fourier *H(f)* de la repose impulsionnelle *h(k)* ;

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j2\pi fk} \qquad (5.9)$$

10. Transformée en Z

La transformée en Z est un outil mathématique de l'automatique et du traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est utilisée entre autres pour le calcul de filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie et en automatique pour modéliser des systèmes dynamiques de manière discrète.

On sait calculer la transformée de Laplace du signal échantillonné $s^*(t)$ avec le théorème du décalage temporel $L(f(t-nT)) = e^{-nTp}L(f(t))$. On obtient :

$$\tilde{s}^*(p) = L(s^*(t)) = \sum_{n\geq 0} s(nT)e^{-nTp} \tag{5.10}$$

Pour étudier la convergence de la somme $\tilde{s}^*(p)$, on pose $z = e^{Tp}$ pour simplifier. La nouvelle variable z est complexe comme la variable de Laplace, et T est la période d'échantillonnage constante. En cas de convergence de (5.10), c'est donc :

$$\tilde{s}^*(p) = S(e^{Tp}) = S(z) = \sum_{n\geq 0} s(nT)z^{-n} = Z(s(nT))$$

$S(z)$ est la transformée en z du signal discret $s(nT)$ (signal $s(t)$ échantillonné avec la cadence T**)**.

$$s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \tilde{s}(p) = \int_0^{\infty} s(t)e^{-tp}dt$$

$$\Big\Downarrow \text{ Par échantillonnage}$$

$$s(nT) \xrightarrow{Z} s(z) = \tilde{s}^{\cdot}(p) = \sum_0^{\infty} s(nT)z^{-n} \tag{5.11}$$

$$z \in \{z \in \mathbb{C} | \textstyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n} \ converge\}$$

La variable n représente en général le temps discrétisé, la variable complexe z n'est qu'un être mathématique. Lorsqu'on travaille sur $s(nT)$ on dit que l'on est dans le domaine temporel, lorsqu'on travaille sur $s(z)$ le domaine est appelé fréquentiel par analogie avec la transformée de Fourier.

Si $\forall n < 0,\ s(n) = 0$, on parle de signal causal. Inversement, si $\forall n > 0,\ s(n) = 0$, on parle de signal anti-causal.

La transformée en Z est une forme de la transformée de Laplace. La relation $z = e^{Tp}$ est fondamentale, car elle permet d'étendre les résultats établis pour les systèmes en temps continu aux systèmes en temps discret.

10.1. Existence de la transformée en Z

Le domaine de convergence est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ dans lequel la série converge. Autrement dit, le domaine de convergence de la transformée en z de la suite $(x(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est l'ensemble :

$$z \in \{z \in \mathbb{C} | \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)z^{-n} \ existe\} \tag{5.12}$$

Le signal $x(kT_e)$ a une transformée en Z s'il existe z tel que la série complexe $X(z)$ soit convergente ; ce sera pour les signaux réellement rencontrée.

Exemple :

$x(k) = e^{2k}$

$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{e^2}{z})^k$

La série est convergente pour $|z| > e^2$, $x(k)$ possède une transformée en Z.

$y(k) = e^{k^2} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{e^k}{z})^k$

Quelque soit z, $\lim_{k\to\infty}\frac{e^k}{z} \to \infty$; la série est divergente et y(k) n'a pas de transformée en Z.

10.2. Transformée en z des signaux élémentaires

En appliquant la définition (5.12) de la transformée en z, on établit aisément que :

- **L'échantillon unité** $d(0) = 1; et\ d(n) = 0; d(0).z^{-0} = 1;\ Z\big(d(k)\big) = 1.$
- **L'échelon unité** $u(t \geq 0) = 1$ donne par échantillonnage $u(nT) = 1$ pour $n \geq 0$.

  $$Z(u(nT)) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \ \text{si}\ \left|z^{-1}\right| < 1$$

  soit $|z| > 1$(c'est le domaine de convergence)

- **Signal rectangulaire** $Z\big(rect_K(k)\big) = \frac{1-z^{-K}}{1-z^{-1}}$
- **Signal exponentiel** $a^{kT_e}u(k), a \in \mathbb{C},\ Z\Big(a^{kT_e}u(k)\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{a^{T_e}}{z})^k$
- **Impulsion** : en temps continu, c'est l'impulsion de Dirac $\delta(t)$, en temps discret, on utilise la fonction de Kronecker, soit $i(n) = 1$ si $n = 0$, et $i(n \neq 0) = 0$.

  On trouve donc facilement que $Z\big[i(n)\big] = 1$ sans condition de convergence sur z.

- **Premier ordre, constante de temps** :

  $$s(t) = e^{-at} \xrightarrow{Laplace} \frac{1}{p+a}, \quad s(nT) = e^{-anT} \xrightarrow{Z} \sum (ze^{aT})^{-n}$$

  qui converge vers $\dfrac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}} = \dfrac{z}{z-e^{-aT}}$ si : $|z| > e^{-aT}$

- **etc ...** (voir une table de transformées en z)

Exemple : quelle est la transformée en z de la **rampe** unité ?
(Solution : $r(t) = t \rightarrow r(kT) = kT \xrightarrow{Table} R(z) = \dfrac{Tz}{(z-1)^2}$)

10.3. Quelques propriétés de la transformée en Z

Les transformées en Z et de Laplace L ont des propriétés liées par la relation $z = e^{Tp}$.

- **Z est donc linéaire**, d'où la possibilité de décomposition en éléments simples.
- **Le théorème du retard de Z** remplace celui de la dérivée et permet le calcul de la fonction de transfert :

$$e(n) \xrightarrow{Z} E(z)$$
$$e(n-1) \xrightarrow{Z} \sum_{n=0}^{\infty} e(n-1)z^{-n} = e(-1) + z^{-1}E(z)$$

  A condition initiale $e(-1)$ nulle, on a donc : $Z[e(n-1)] = z^{-1}Z[e(n)]$ et plus généralement $Z[e(n-k)] = z^{-k}Z[e(n)]$.

- **Théorèmes des valeurs initiale** et **finale** : soit $e(n) \xrightarrow{Z} E(z)$

  Théorème de la Valeur Initiale : $e(0) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z-1}{z} E(z) = \lim\limits_{z\to\infty} E(z)$

  Théorème de la Valeur Finale : $\lim\limits_{n\to\infty} e(n) = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z-1}{z} E(z)$

- **Transformée du Produit de Convolution ***

Le produit de convolution de deux signaux discrets a et b est défini comme suit : $(a*b)(n) = \sum_i a(n-i)b(i) = \sum_i a(i)b(n-i)$, avec $0 \le i \le n$ si a et b sont causaux. Comme pour la transformée de Laplace, on a : $Z(*) = x$ et $Z(x) = *$.

- **Formule des résidus :**

Pour inverser la transformée en z, à comparer à la formule déjà vue pour le cas continu

$$h(n) = Z^{-1}\left[H(z)\right] = \sum_{\substack{pôles \\ H(z)z^{n-1}}} Résidus(H(z)z^{n-1})$$

avec, pour le résidu de $F(z)$ en $z = a$ pôle d'ordre m

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-a)^m F(z))\Big|_{pris\,en\,z=a}$$

10.4. Application à la fonction de transfert en Z

Soit $y(n)$ un signal discret à partir de mesures $x(k)$ opérées sur un signal *x(t)* et selon la relation suivante, ou équation aux différences :

$$y(n) = (y(n-1) + \frac{x(n-1)}{2}) \tag{5.13}$$

où $y(n)$ est la valeur calculée à l'instant nT, $y(n-1)$ est le résultat du calcul précédent et $x(n-1)$ l'entrée mesurée en $(n-1)T$. L'équation (5.13) est récursive (i.e. le calcul de y dépend de y lui-même).

Supposons $y(n) \xrightarrow{Z} Y(z)$ et $x(n) \xrightarrow{Z} X(z)$, on a alors à conditions initiales nulles, soit $y(-1) = x(-1) = 0$.

$$y(n) = \frac{y(n-1) + x(n-1)}{2} \xrightarrow{Z} Y(z) = \frac{z^{-1}Y(z) + z^{-1}X(z)}{2}$$

On en tire ici $$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{2 - z^{-1}} = \frac{1}{2z - 1} = T(z).$$

$T(z)$ est la fonction de transfert associée, c'est une fraction rationnelle en z. La relation (5.13) s'écrit encore sous la forme d'un produit de convolution discret puisque :

$$Y(z) = T(z)X(z) \xrightarrow{Z^{-1}} y(n) = (h * x)(n)$$

$h(n) = Z^{-1}\left[T(z)\right]$ est alors la réponse impulsionnelle du processus discret d'équation (5.13) et de fonction de transfert $T(z)$, on a comme en temps continu $T(z) = Z[h(n)]$

10.5. Calcul des réponses temporelles et fréquentielles d'un processus discret

On procède comme en temps continu, à ceci près que $z = e^{Tp}$:

- **Réponse impulsionnelle** : $X(z)=1,\ Y(z)=F(z),\ h(k)=Z^{-1}[F(z)]$
- **Réponse indicielle** : $X(z)=\frac{z}{z-1}$ donc $y(n)=Z^{-1}\left[\frac{zF(z)}{z-1}\right]$
- **Réponse harmonique** : $p\to j\omega$ se traduit par $z\to e^{j\omega T}$,
  d'où la réponse harmonique ou fréquencielle, **Gain =** $\left|F(e^{j\omega T})\right|$ et **Phase =** $\angle F(e^{j\omega T})$.
- **Gain statique** : c'est $\lim_{z\to 1} T(z)$

10.6. Transformée en Z inverse

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_{(c)} X(z)z^{n-1}dz \tag{5.14}$$

(c) un contour fermée appartenant au domaine de convergence de $X(z)$.

$x(z) = z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^p}$

$z = z_0$ est un pole d'ordre p.

Résidus de $[X(z)z^{n-1}]_{z=z_0} = \frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}\psi(z)}{dz^p}$

Si $p = 1 \Longrightarrow Résidus\ [X(z)z^{n-1}]_{z=z_0} = \psi(z_0)$

Exemple

$x(n) = a^n\mu(n) \to X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$

$X(z) = \frac{z}{z-a}$

$x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_{(c)} X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{j2\pi}\oint_{(c)} \frac{z^n}{z-a}dz$

- Pour $n \geq 0$ on a un pôle en $z = a$ d'ordre 1

  $\mu(n) = z^n]_{z=a} = a^n$

- Pour $n < 0$ on a un pole en $n = -m$ d'ordre 1

  $\mu(n) = z^{n-1} = \frac{z^{-m}}{z-a} = \frac{1}{z^m(z-a)}$

  On a deux pôles : $z = a$ d'ordre 1 ; $z = 0$ d'ordre m.

- **L'inverse par développement en série polynomial**

$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$

$X(z) = \frac{z}{z-a}$; trouver les polynômes en puissance de z^{-1}.

$z\ /\ z-a = 1 - az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots + a^nz^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \Longrightarrow x(n) = a^n\mu(n)$

Table des transformées en Z

Signal	***Transformée en Z***
$x(t)$	$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n.T_e).z^{-n}$
$\delta(t)$	Non définie !…
$\begin{cases}1, t=0\\0, t\neq 0\end{cases}$	$X_z(z)=1$
$u(t)=\begin{cases}1, t>=0\\0, t<0\end{cases}$	$\dfrac{z}{z-1}$
$t.u(t)$	$\dfrac{T_e.z}{[z-1]^2}$
$\dfrac{t^2}{2}.u(t)$	$\dfrac{T_e^2.z.[z+1]}{2.[z-1]^3}$
$e^{-a.t}.u(t)$	$\dfrac{z}{z-e^{-a.T_e}}$
$t.e^{-a.t}.u(t)$	$\dfrac{T_e.z.e^{-a.T_e}}{\left[z-e^{-a.T_e}\right]^2}$
$\dfrac{t^2}{2}.e^{-a.t}.u(t)$	$\dfrac{T_e^2.z.e^{-a.T_e}}{2.\left[z-e^{-a.T_e}\right]^2}+\dfrac{T_e^2.z.e^{-2.a.T_e}}{\left[z-e^{-a.T_e}\right]^3}$
$\left[1-e^{-a.t}\right]u(t)$	$\dfrac{\left(1-e^{-a.T_e}\right)z}{(z-1).\left(z-e^{-a.T_e}\right)}$
$\left[t-\dfrac{1-e^{-a.t}}{a}\right].u(t)$	$\dfrac{T_e.z}{(z-1)^2}-\dfrac{\left(1-e^{-a.T_e}\right)z}{a.(z-1).\left(z-e^{-a.T_e}\right)}$
$\dfrac{1}{2}\left[t^2-\dfrac{2.t}{a}+\dfrac{2}{a^2}.\left(1-e^{-a.t}\right)\right].u(t)$	$\dfrac{T_e^2.z}{(z-1)^3}+\dfrac{(a.T_e-2).T_e.z}{2.a.(z-1)^2}+\dfrac{z}{a^2.(z-1)}-\dfrac{z}{a^2.\left(z-e^{-a.T_e}\right)}$
$\sin(\omega_0.t).u(t)$	$\dfrac{z.\sin(\omega_0.T_e)}{z^2-2.z.\cos(\omega_0.T_e)+1}$
$\cos(\omega_0.t).u(t)$	$\dfrac{z.[z-\cos(\omega_0.T_e)]}{z^2-2.z.\cos(\omega_0.T_e)+1}$
$[1-\cos(\omega_0.t)].u(t)$	$\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z.[z-\cos(\omega_0.T_e)]}{z^2-2.z.\cos(\omega_0.T_e)+1}$
$\left[1-(1+a.t).e^{-a.t}\right]u(t)$	$\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-a.T_e}}-\dfrac{a.T_e.e^{-a.T_e}.z}{\left[z-e^{-a.T_e}\right]^2}$
$e^{-a.t}.\sin(\omega_0.t).u(t)$	$\dfrac{z.e^{-a.T_e}.\sin(\omega_0.T_e)}{z^2-2.z.e^{-a.T_e}.\cos(\omega_0.T_e)+e^{-2.a.T_e}}$
$e^{-a.t}.\cos(\omega_0.t).u(t)$	$\dfrac{z.\left[z-e^{-a.T_e}.\cos(\omega_0.T_e)\right]}{z^2-2.z.e^{-a.T_e}.\cos(\omega_0.T_e)+e^{-2.a.T_e}}$