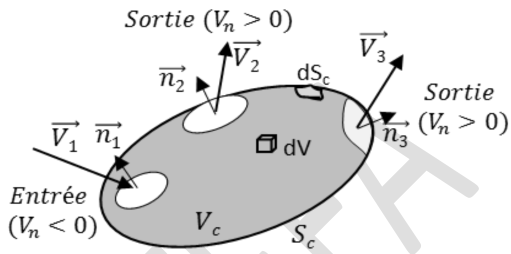
Chapitre II. Equation des quantités de mouvement

II.1 Théorème d'Euler (Bilan de quantité de mouvement)

Ce théorème traduit l'équilibre de la résultante des forces extérieures appliquées au fluide dans le volume (V_c) limité par la surface (S_c) d'un côté et la variation temporelle de la quantité de mouvement de fluide dans ce volume d'autre côte.



D'où :

$$\sum \vec{F}_{Ext} = \frac{d}{dt}(\sum(dm.\vec{v})) = \frac{d}{dt}\int_{V_C} \rho\, \vec{v}.\, dV \qquad \text{(2}^{\text{ème}} \text{ loi de Newton)}$$

$dm.\vec{v}$: Quantité de mouvement d'un volume élémentaire (dV).

Le terme de variation peut être développé en fonction de débit et de vitesse instantanée :

$$\frac{d}{dt}\int_{V_C} \rho\, \vec{v}.\, dV = \int_{V_C} \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} dV + \int_{S_C} \rho\, \vec{v}.\, (\vec{v}.\vec{n}) dS$$

Pour un fluide incompressible et écoulement permanent, le premier terme du deuxième membre de la relation ci-dessus est nul, et le développement du deuxième terme des flux donne :

$$\frac{d}{dt}\int_{V_C} \rho\, \vec{v}.\, dV = \int_{S_C} \rho\, \vec{v}.\, (\vec{v}.\vec{n}) dS = \rho \sum \left(Q_{Sortant}.\vec{U}_{Sortante} - Q_{Entrant}.\vec{U}_{Entrante}\right)$$

Donc, on peut dire que :

$$\sum \vec{F}_{Ext} = \rho \sum \left(Q_{Sortant}.\vec{U}_{Sortante} - Q_{Entrant}.\vec{U}_{Entrante}\right) \qquad \textit{(4-3)}$$

C'est une équation vectorielle, donc pour l'utiliser, il faut faire les projections sur les axes.

Avec : $Q_{Sortant}$, $\vec{U}_{Sortante}$ sont le débit sortant et la vitesse moyenne sortante du volume de contrôle, respectivement.

$Q_{Entrant}$, $\vec{U}_{Entrante}$ sont le débit rentrant et la vitesse moyenne rentrante du volume de contrôle, respectivement.

$\vec{F}_{Ext}$: sont les forces extérieures appliquées sur le volume de contrôle de fluide. Ces forces représentent :

- La force volumique est exprimée par le poids de fluide (champ de gravité),
- Les forces de surface sont exprimées par la force de pression et la résultante des forces de frottement $\vec{R}$ (existe dans le cas de présence une interaction fluide/solide).

Remarque

L'intérêt de ce théorème est qu'il ne nécessite pas de connaître les forces de frottement interne dans le fluide mais il nécessite de connaître la réaction R de l'environnement extérieur sur le volume de contrôle de fluide.

Application n : 1

Effort exercé par un fluide sur un coude de conduite.

Hypothèses : Ecoulement permanent, fluide incompressible et parfait

En pratique, le théorème d'Euler permet de calculer la résultante des forces extérieures de surface alors que leur répartition locale sur la surface limitant le domaine reste inconnue. Il suffit pour cela de choisir le domaine de contrôle V_C car nous connaissons le flux de quantité de mouvement à travers sa surface limite.

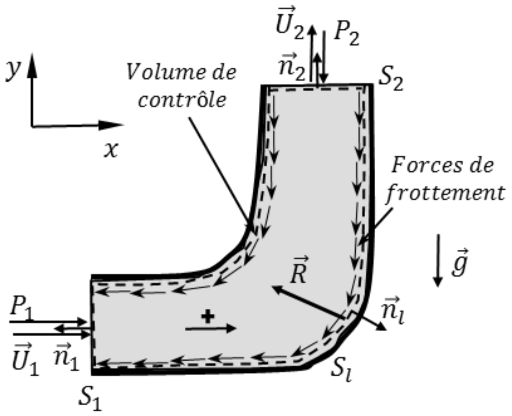
Ce théorème a une utilisation très large pour les applications hydrauliques et aérodynamiques, certains des plus classiques sont présentés ci-dessous.

C'est la résultante de ces efforts de pression que l'on se propose de calculer en régime permanent, en négligeant les effets visqueux et en supposant le fluide incompressible.

Solution

En appliquant l'expression vectorielle du théorème d'Euler 4.3 pour un tube de courant limité par un coude, on a :

$$\sum \vec{F}_{Ext} = \rho \sum \left(Q_{Sortant}.\vec{U}_{Sortante} - Q_{Entrant}.\vec{U}_{Entrante}\right)$$



Coude de 90°

.

$$-p_1 S_1 \vec{\mathrm{n}}_1 + p_2 S_2 \vec{\mathrm{n}}_2 + \iint_{S_l} -p\vec{\mathrm{n}}_l dS + m\vec{g} = \rho\left(Q_2 \vec{\mathrm{U}}_2 - Q_1 \vec{\mathrm{U}}_1\right)$$

La résultante des efforts exercés par le coude sur le fluide à travers la surface latérale S_l est :

$$\vec{R} = \iint_{S_l} -p\vec{\mathrm{n}}_l dS$$

Suivant le principe de conservation de masse, on a : $\rho \mathrm{U}_1 \mathrm{S}_1 = \rho \mathrm{U}_2 \mathrm{S}_2$

La résultante des forces exercées par le fluide interne sur la surface S_l du coude est -$\overrightarrow{R}$ (d'après la loi d'action / réaction) d'où finalement en remplaçant :

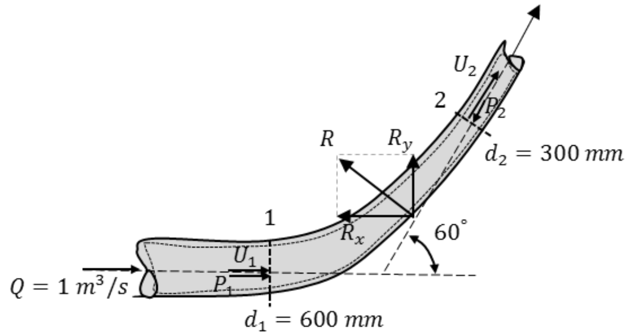
$$-\vec{R} = m\vec{g} \; - \; \lfloor(\rho U_1^2 + P_1) S_1 \vec{n}_1 + (\rho U_2^2 + P_2) S_2 \vec{n}_2 \rfloor$$

Avec : $m\vec{g}$ est le poids du liquide contenu dans le coude. Dans le cas où les vitesses sont importantes, le poids de fluide devient négligeable par rapport au reste des termes de l'équation vectorielle.

La formule trouvée est une équation vectorielle qui nécessite la projection sur les axes pour trouver les deux composantes de $\vec{R}$.

Exercice

Une partie de conduite transporte de l'eau de forme courbée et convergente de diamètre varie de 600 mm à 300 mm, voir la figure ci-dessous. En état (1), la pression est de 170 kN/m^2. Déterminer l'intensité et la direction de la force exercée sur la partie de la conduite courbée.



Solution

1) Le débit volumique de l'écoulement est :

$$Q = 1\ m^3/s = S_1 U_1 = S_2 U_2$$

La vitesse en état (1) :

$$U_1 = 1/(\pi(0{,}6)^2/4) = 3{,}54\ m/s$$

La vitesse en état (1) : $U_2 = 1/(\pi(0{,}3)^2/4) = 14{,}15\ m/s$

En appliquant le théorème de Bernoulli sous les hypothèses : Ecoulement permanent, fluide incompressible et parfait (négligeant des pertes de frottement) :

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g}$$ Différence des hauteurs est négligeable

La pression en état (1) est : $P_1 = 170\ 10^3 Pa$

Donc : $\frac{P_2}{\rho g} = \frac{170\times10^3}{10^3\times9{,}81} + \frac{(3{,}54)^2}{19{,}62} - \frac{(14{,}15)^2}{19{,}62}$ $\Rightarrow$ $P_2 = 7{,}62\ 10^4 Pa$

D'après l'équation d'Euler (principe de conservation des quantités de mouvement), les seules forces agissant sur le volume de contrôle de liquide sont les forces de pression et de Coriolis. La force de réaction R exercée par la surface courbée sur le volume de contrôle, voir le schéma.

$$\sum \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Ext}} = \rho \sum \left(\mathrm{Q}_{\mathrm{Sortant}}.\vec{\mathrm{U}}_{\mathrm{Sortante}} - \mathrm{Q}_{\mathrm{Entrant}}.\vec{\mathrm{U}}_{\mathrm{Entrante}}\right)$$

Dans la direction $\overrightarrow{ox}$:

$$P_1 S_1 - R_x - P_2 S_2 \cos\theta = \rho.Q.(U_2 \cos\theta - U_1)$$

Et suivant la direction $\overrightarrow{oy}$: $0 + R_y - P_2 S_2 \sin\theta = \rho.Q.(U_2 \sin\theta - 0)$

$$R_x = 10^3 \times 1(3{,}54 - 14{,}15\ \cos 60°) - 7{,}62 \times 10^4 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}3)^2 \cos 60°$$
$$+17 \times 10^4 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}6)^2 = 4{,}2 \times 10^4\ N$$

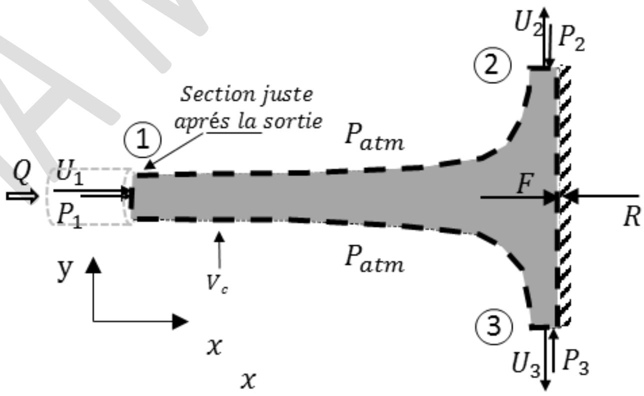
$$R_y = 10^3 \times 1(14{,}15\ \sin 60°) + 7{,}62 \times 10^4 \times \frac{1}{4}\pi(0{,}3)^2 \sin 60°$$
$$= 1{,}7 \times 10^4\ N$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 4{,}53 \times 10^4\ N$$

2) La direction de la réaction $\vec{R}$ est : $\theta = \text{Arctan}(R_y/R_x) \Rightarrow \quad \theta = 22°$

Application n : 2

Effet d'un jet d'eau sur une plaque

Un jet d'eau heurtant une plaque verticale fixe, voir la figure. La force de réaction de la plaque sur le jet est $\vec{R}$. L'expérience se déroule sous la pression atmosphérique (P_{atm}), la question est de déterminer la force appliquée sur la plaque verticale $\vec{F}$.



Solution

Suivant le théorème d'Euler appliqué sur le volume de contrôle (V_C), on a :

$$\sum \vec{F}_{Ext} = \rho \sum \left(Q_{Sortant}.\vec{U}_{Sortante} - Q_{Entrant}.\vec{U}_{Entrante}\right)$$

Les forces externes

$\vec{F}_1 = P_1 \times S_1$, $\vec{F}_2 = P_2 \times S_2$, $\vec{F}_3 = P_3 \times S_3$, et la réaction $\vec{R}$.

Les pressions : $P_1 = P_2 = P_3 = P_{atm}$ (le volume de contrôle se trouve dans une pression atmosphérique.

Les débits rentrants : $Q_1 = Q$

Les débits sortants : Q_2 et Q_3

Suivant le principe de conservation de masse (pour un fluide incompressible) :
$Q_1 = Q_2 + Q_3$ et par symétrie géométrique, on peut considérer que :

$$Q_2 = Q_3 = Q/2$$

L'équation vectorielle d'Euler devient :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{R} = \rho\left(\left(Q_2\vec{U}_2 + Q_3\vec{U}_3\right) - Q_1\vec{U}_1\right)$$

Par projection suivant l'axe $(\overrightarrow{ox})$:

$$F_1 - R = \rho(-Q_1U_1)$$

$F_1 = P_1 \times S_1 = 0$ Parce que $P_1 = P_{atm}$ et la pression relative est nulle.

Donc : $R = \rho Q U_1$

Suivant le principe action / réaction d'un objet non déformable : $\vec{F} = -\vec{R}$

La force appliquée sur la plaque est : $F = \rho Q U_1$