

Chapitre III

III.1 Application du théorème de Bernoulli

Nous voudrions maintenant connaître la variation de la charge hydraulique totale d'un fluide qui s'écoule entre deux états.

Suivant la figure ci-dessus, le volume V_c en état (1) à une charge hydraulique totale (H_1) et en état (2) à une charge hydraulique totale (H_2).

$$\text{Etat 1 : } H_1 = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1$$

$$\text{Etat 2 : } H_2 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

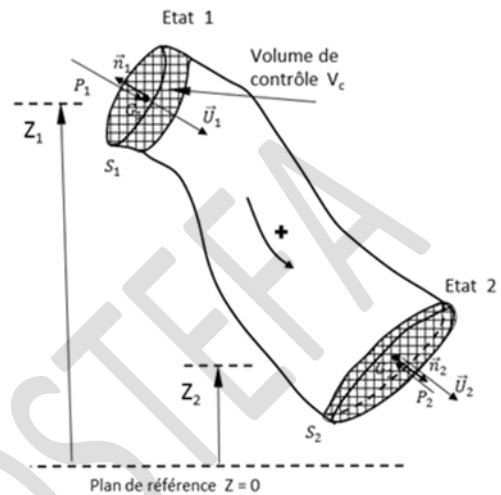
Bilan entre deux états : $H_1 = H_2 + \Delta H_{12}$

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \Delta H_{12} \quad (I-1)$$

ΔH_{12} : Pertes de charge entre l'état (1) et l'état (2) en [$m_c \text{ fluide}$].

Cette équation est appelée aussi l'équation de Bernoulli.

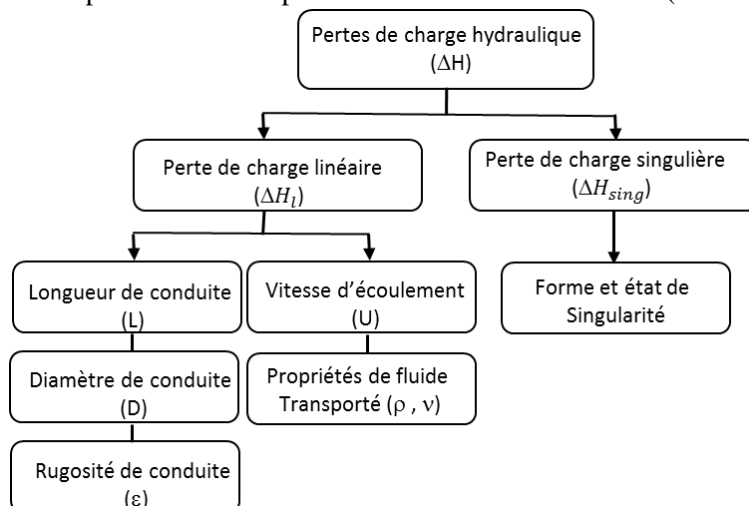
Les pertes de charge ΔH_{12} sont liées aux plusieurs grandeurs hydrauliques et géométriques. Elles dépendent au régime d'écoulement, à la géométrie et à la nature de surface intérieure de la conduite.



III.2 Pertes de charge hydraulique

Les pertes de charge par frottement sont produites dans la section transversale par l'interaction entre les volumes élémentaires de fluide en déplacement et les parois internes de son contenant (ex. conduite, accessoire, compteurs ...). De façon générale, les pertes d'énergie sont causées par :

- Frottement contre les surfaces internes,
- Effet de la turbulence,
- Action des forces de viscosité moléculaire,



- Obstacles induisant un changement prononcé des lignes de courants.

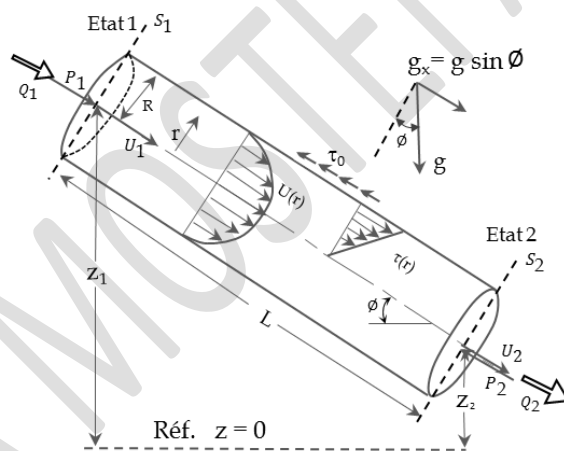
Deux types de perte de charge existent linéaires et singuliers :

Perte de charge linéaire ou régulière (ΔH_l) : due aux frottements du fluide contre la paroi intérieure d'une conduite rectiligne de longueur L.

Perte de charge singulière ou locale (ΔH_{sing}) : due aux frottements du fluide dans la singularité (Coude, vanne, variation brusque du diamètre ...).

III.2.1 Perte de charge linéaire

Pour un écoulement en charge et établi dans une conduite (Profil de vitesse est le même dans toutes les sections transversales). La perte de charge linéaire est proportionnelle aux frottements (contraintes de cisaillement de la paroi). Pour estimer ce terme, on applique les trois lois de conservation d'énergie (Equation de Bernoulli), de quantité de mouvement (Equation d'Euler) et de masse (Equation de continuité). Plusieurs travaux réalisés dans le cadre de modélisation du terme ΔH_l , on peut citer les formules les plus utilisées :



1. Formule de Darcy-Weisbach
2. Formule Hazan – Williams

- **Formule de Darcy-Weisbach**

La formule est : $\Delta H_l = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$

Avec : L est la longueur de la conduite [m], D est le diamètre interne de la conduite [m], λ est le coefficient de perte de charge linéaire [sans dimension], U est la vitesse moyenne de l'écoulement [m/s] et g est l'accélération de la gravité.

Soit : $\lambda = f(R_e, \frac{\epsilon}{D})$ avec le nombre de Reynolds ($R_e = UD/(\mu/\rho)$) et la rugosité relative ϵ/D de la conduite.

Unité :

$$[\Delta H_l] = m_{cf} \begin{matrix} \text{Mètre} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{Colonne} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{Fluide utilisé} \end{matrix}$$

- **Formule de Hazan-Williams**

Cette formule est très utilisée aux États-Unis d'Amérique (USA) et donnée par la formule suivante :

$$J = \frac{\Delta H_l}{L} = \frac{10,675 Q^{1,852}}{C_{HW}^{1,852} D^{4,87}} \quad (I-2)$$

Avec : C_{HW} est le coefficient de rugosité de Hazan-Williams [sans dimension], Q est le débit volumique [m³/s] et D est le diamètre intérieur de la conduite [m]

Matériau de conduite	C_{HW}
Laiton	130-140
Égout en brique	100
En fonte	
Nouveau, sans doublure	130
10 ans, vieux	107-113
20 ans, vieux	89-100
30 ans	75-90
40 ans	64-83
Béton ou béton doublé	
Formes d'acier	140
Formes en bois	120
Centrifugé	135
Cuivre	130-140
Fer galvanisé	120
Verre	140
Conduire	130 140
Plastique	140-150
Acier	
Nouveau sans doublure	140 150
Rivé	110
Étain	130
Argile vitrifiée (bon état)	110-140
Bois (condition moyenne)	120

III.2.2 Détermination du coefficient de perte de charge linéaire (λ)

Il existe plusieurs possibilités pour estimer le coefficient λ de la formule de Darcy-Weisbach, nous citons des formules expérimentales et aussi des diagrammes. Le coefficient de perte de charge linéaire λ est une fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative ε / D .

III.2.2.1 Formules expérimentales

En régime laminaire ($R_e \leq 2000$), l'équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\lambda = \frac{64}{R_e}$$

Régime turbulent ($R_e > 4000$)

- **Ecoulement turbulent lisse**

L'effet de rugosité de la paroi est faible sur l'écoulement, c.-à-d., lorsque la valeur de ε est inférieure ou égale à la hauteur de la couche limite laminaire de l'écoulement.

Pour $R_e > 4000$ et $\frac{\varepsilon R_e \sqrt{\lambda}}{D} \leq 12$

L'épaisseur de la sous-couche limite est suffisante pour englober toutes les aspérités de la conduite qui se comporte dès lors comme un tuyau lisse, voir la figure (I.6).

Deux expressions empiriques sont souvent utilisées :

- **Formule de Blasius (1911)** : pour un nombre de Reynolds $R_e < 10^5$

$$\lambda = (100 R_e)^{-0,25} = 0,3164 R_e^{-0,25}$$

- **Formule de Karman-Prandtl (1930)** : pour un nombre de Reynolds $R_e > 5 \cdot 10^5$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2,51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right)$$

- **Ecoulement turbulent rugueux**

Pour $R_e > 4000$ et $\frac{\varepsilon R_e \sqrt{\lambda}}{D} \geq 200$

L'écoulement est sous l'effet de rugosité de la paroi. La rugosité de paroi joue un rôle déterminant pour estimer le coefficient de perte de charge linéaire.

- **Formule de Nikuradse (1933)** : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3,71 D} \right)$

Il existe aussi des formules généralisées empiriques pour estimer le coefficient λ dans les régimes turbulent (hydrauliquement lisse et rugueux) et transitoire.

- **Formule de Colebrook-White (1839)** : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3,71 D} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right)$

La formule est une équation implicite applicable aux régimes transitoires et turbulents. La résolution de l'équation nécessite l'application d'une méthode itérative :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3,71 D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda_{j-1}}} \right)$$

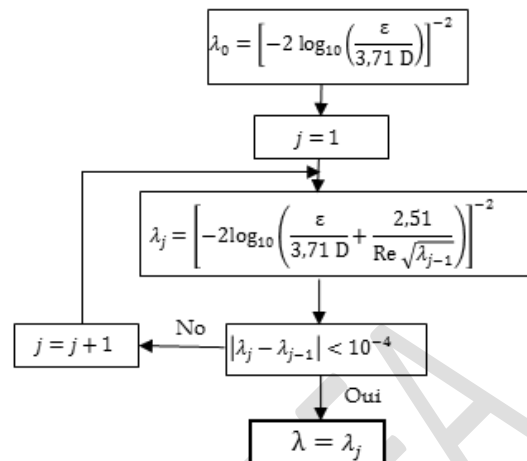
$$|\lambda_j - \lambda_{j-1}| < \xi \quad , \xi \text{ est la tolérance.}$$

- **Formule de Swamee-Jain (1976) :**

Pour $\frac{\varepsilon}{D} < 10^{-2}$ et $Re > 5 \cdot 10^3$

Cette formule explicite donne une solution directe et propose une bonne approximation de la valeur de λ .

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[\log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3,71 D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2}$$



Le tableau suivant résume les différentes formules utilisées pour estimer le coefficient de perte de charge linéaire λ .

Conduite			Régime d'écoulement	Formule
Lisse	Rugueuse homogène	Rugueuse hétérogène		
+			Laminaire ($Re \leq 2000$)	Poiseuille $\lambda = 64/Re$
+			Turbulent lisse $10^4 < Re < 10^5$	Blasius $\lambda = 0,3164 Re^{-0,25}$
+			Turbulent lisse $Re > 10^5$	Karman-Prandtl $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$
	+	+	Turbulent rugueux	Nikuradse $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3,71 D} \right)$
+	+	+	Transitoire et turbulent rugueux / semi-rugueux	Colebrook-White $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3,71 D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$
+	+	+	Transitoire et turbulent $\varepsilon/D < 10^{-2}$ $Re > 5 \cdot 10^3$	Formule de Swamee-Jain $\lambda = \frac{0,25}{\left[\log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3,71 D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2}$

Tableau III.1. Différentes formules d'estimation du coefficient λ

III.2.2.2 Diagramme (Abaque) de Moody et Stanton (1944)

Le diagramme permet d'évaluer graphiquement le coefficient de perte de charge linéaire λ en fonction de deux nombres adimensionnels : Le nombre de Reynolds Re et la rugosité relative ε/D . Le diagramme suivant représente la récapitulation des formules connues de λ pour différents régimes d'écoulement.

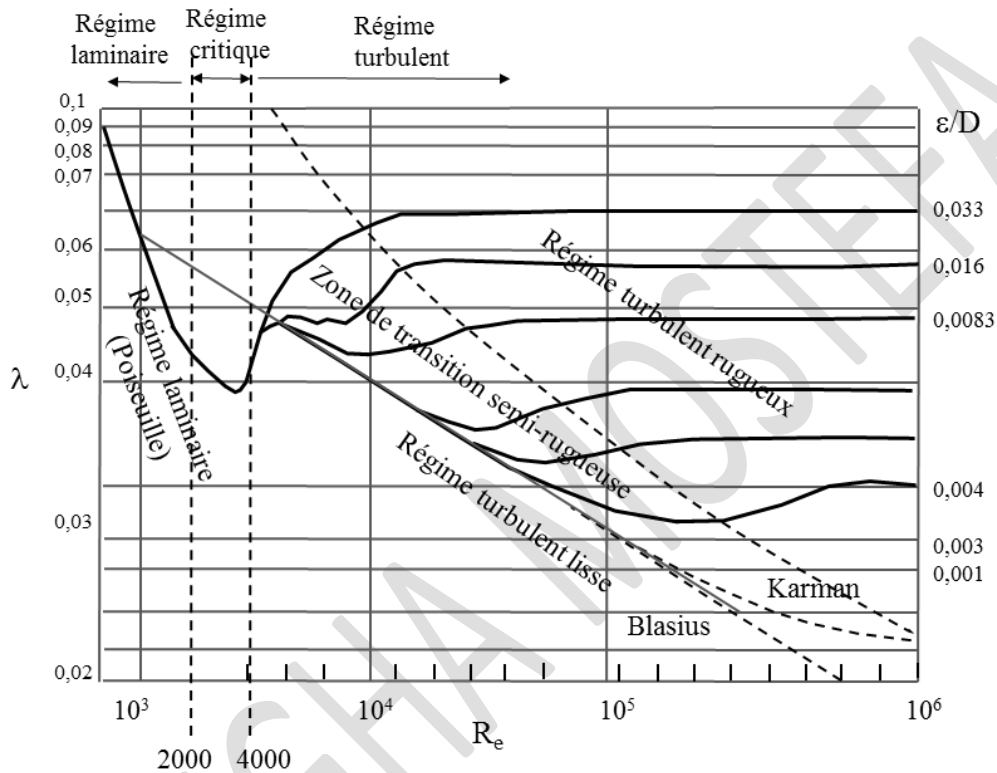


Figure III.1 Présentation des régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds et ε/D

L'utilisation du diagramme :

Le mode d'utilisation est indiqué sur le diagramme avec un exemple explicatif d'un nombre de Reynolds de $Re = 4 \cdot 10^4$ et une rugosité relative de $\varepsilon/D = 0,01$ qui donne la valeur de $\lambda = 0,0387$

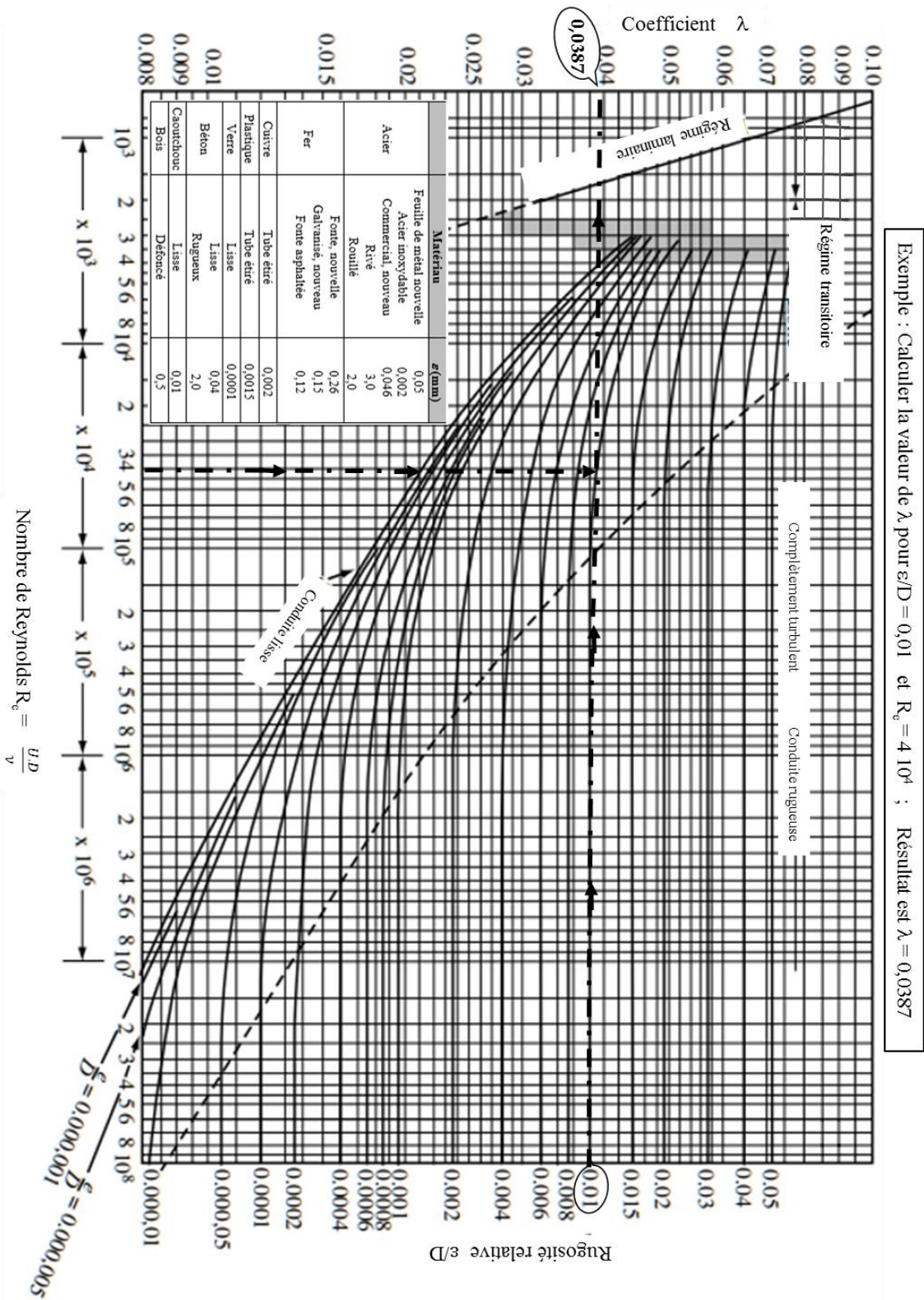


Figure III.2 Diagramme ou Abaque de Moody

III.2.2.3 Graphe de HRS (1990)

En combinant les équations de Darcy-Weisbach et de Colebrook-White, ces équations donnent une expression explicite pour U

$$U = -2\sqrt{2g D \Delta H/L} \log \left(\frac{\epsilon}{3,71 D} + \frac{2,51 \nu}{D\sqrt{2g D \Delta H/L}} \right) \quad (I-3)$$

Cette formule forme la base des diagrammes de conception produits par HR. Wallingford (1990). Un graphe typique est reproduit à la figure suivante.

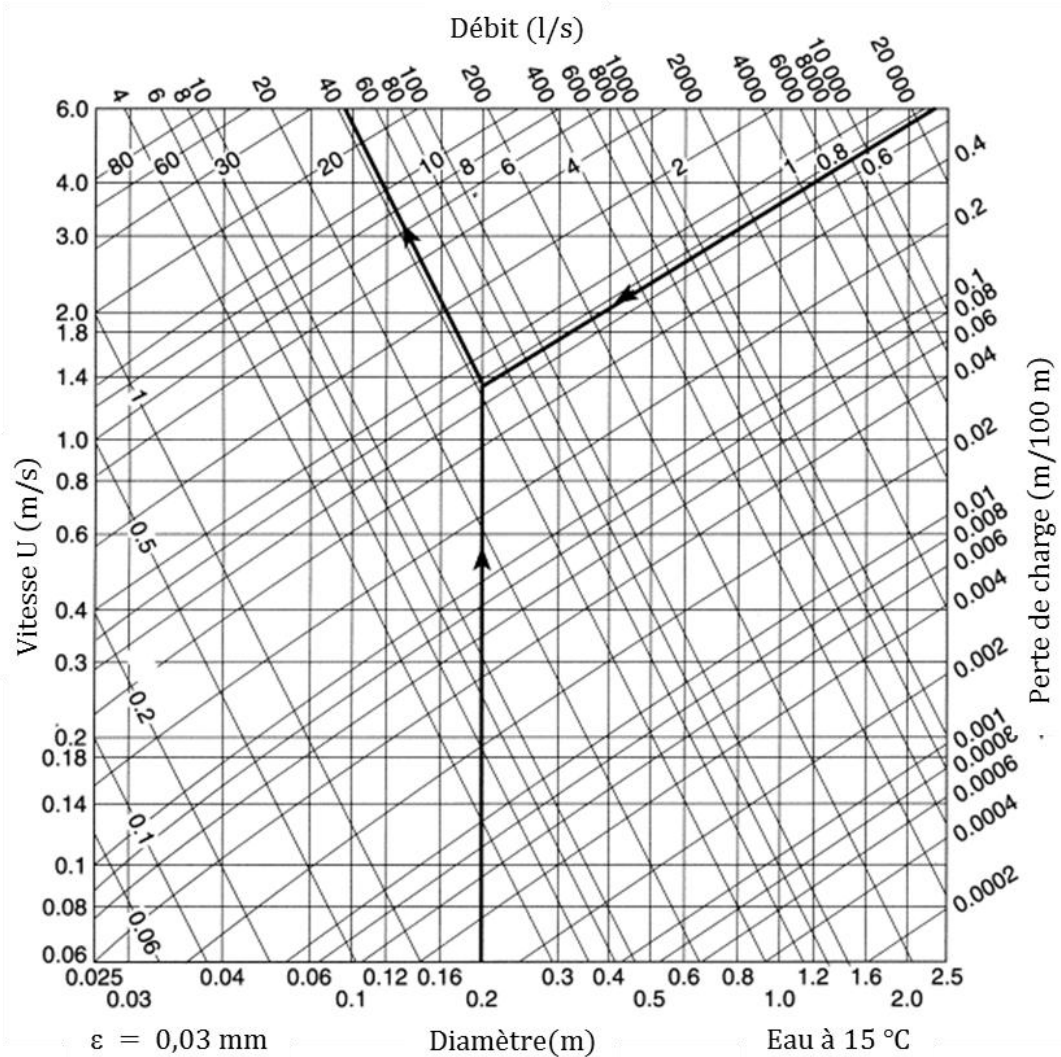


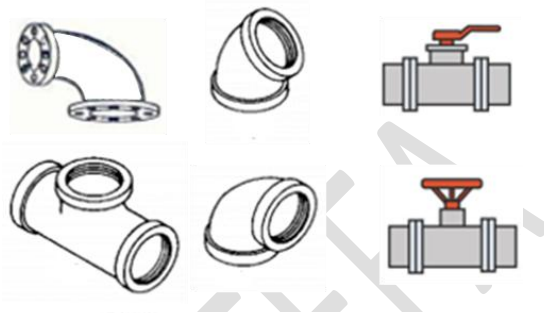
Figure III.3 Graphe de HRS

En utilisant le graphe HRS, la solution de la formule combinée de Colebrook-White et de Darcy-Weisbach se trouve à l'intersection de la ligne de perte de charge unitaire (gradient hydraulique) (incliné vers le bas, de gauche à droite) avec le diamètre (vertical) et la lecture du débit (ligne inclinée vers le bas de gauche à droite).

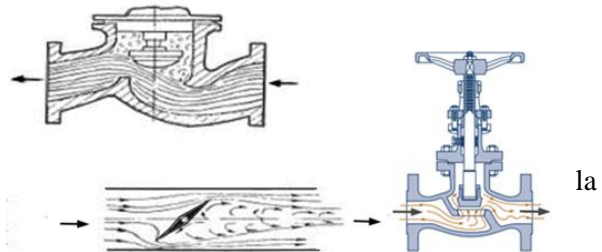
III.2.2 Pertes de charge singulières

Les pertes de charge singulières ou locales sont dues aux modifications locales de l'écoulement dans les accessoires. Ces pertes sont causées par les frottements et les chocs face aux obstacles et les décollements de la couche limite dans ces accessoires tels que :

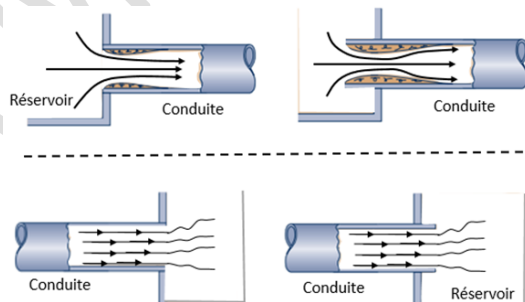
- Changement de section : élargissement, rétrécissement
- Changement de direction et dérivation : Coudes, Tés, Tés-y
- Appareil de contrôle : Vannes, robinets, clapets
- Instruments de mesure : Venturis, Diaphragmes, compteurs



Les figures suivantes montrent le comportement d'écoulement au passage des singularités, comme la courbure des lignes de courant, la formation de zones de recirculation, le décollement près des parois et rencontre des obstacles.



Chaque singularité possède un coefficient qui dépend essentiellement de sa forme. La perte locale est liée à la charge cinétique de l'écoulement prise en une section de référence.



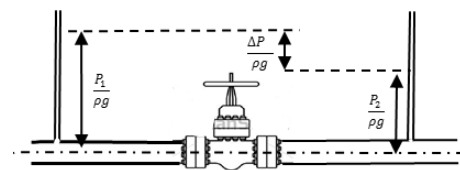
$$\Delta H_{sing} \propto \frac{U^2}{2g}$$

$$\Delta H_{sing} = K_{sing} \frac{U^2}{2g}$$

(I-4)

Le coefficient de perte singulière (K_{sing}) est estimé par l'expérimental en utilisant la formule :

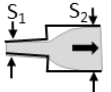
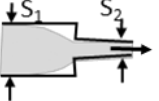
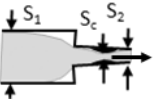
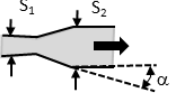
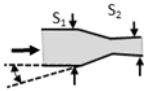
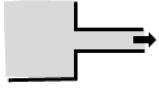
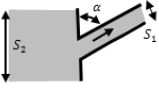
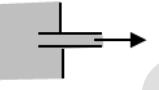

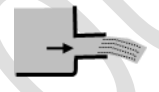
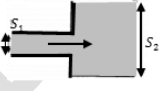
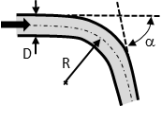
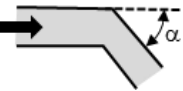
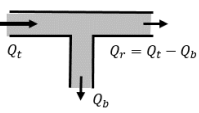
$$K_{sing} = \frac{\Delta P}{\rho U^2 / 2}$$



Les coefficients de singularité sont donnés dans la documentation technique. Il existe des abaques qui donnent l'équivalence des singularités en longueur de conduite droite L, provoquant la même perte de charge, voir le chapitre III.

Le tableau suivant donne une idée précise sur le terme de perte de charge singulière,

c.-à-d. la relation entre le coefficient K_{sing} et la vitesse moyenne (vitesse amont ou aval de la singularité utilisée pour représenter la charge cinétique $K_{sing} \times U^2 / 2g$).

Forme	Nomination	Coefficient K_{sing}	Perte de charge singulière
	Elargissement brusque	$(\frac{S_2}{S_1} - 1)^2$	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$
	Rétrécissement brusque	$0,5(1 - \frac{S_2}{S_1})$	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$
	Rétrécissement brusque	$(\frac{S_2}{S_c} - 1)^2$	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$
	Divergence	$(1 - \frac{S_1}{S_2})^2 \sin(\alpha)$	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$
	Convergent	$(\frac{S_1}{S_2} - 1)^2 \sin(\alpha)$	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_1^2}{2g}$
	Entrée brusque	0,5	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$
	Entrée brusque inclinée	$0,5 + 0,3\cos(\alpha) + 0,2\cos^2(\alpha)$	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$
	Entrée brusque allongée	0,8	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$
	Entrée progressive	0,04	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$
	Sortie à l'air libre	1,0	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_2^2}{2g}$
	Arrivée vers un réservoir	1,0	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U_1^2}{2g}$
	Coude arrondi	$\frac{\alpha}{\pi} [0,131 + 1,847 (\frac{D}{R})^{7/2}]$	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U^2}{2g}$
	Coude brusque	$\sin^2(\alpha) + 2 \sin^4(\frac{\alpha}{2})$	$\Delta H_{sing} = k_{sing} \frac{U^2}{2g}$
	Tés branchement de prise	K_r, K_b Voir l'annexe	$\Delta H_r = K_r \frac{U_t^2}{2g}$ $\Delta H_b = K_b \frac{U_t^2}{2g}$

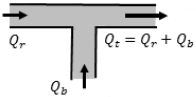
	<p>Tés branchement de dérivation</p>	<p>K_r, K_b Voir l'annexe</p>	$\Delta H_r = K_r \frac{U_r^2}{2g}$ $\Delta H_b = K_b \frac{U_b^2}{2g}$
---	--	--	---

Tableau III.2. Coefficient de perte de charge singulière K_{sing} en fonction de la forme de singularité.

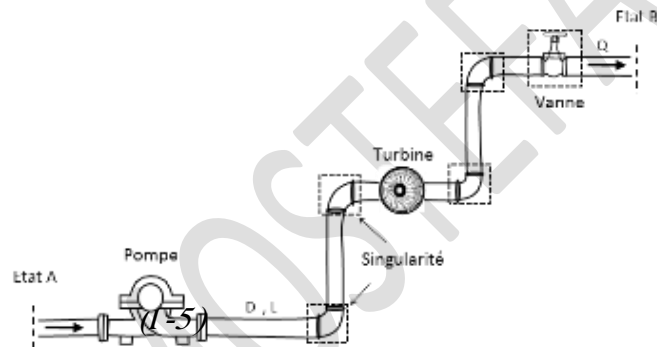
III.3 Equation de Bernoulli généralisée

Pour un écoulement permanent, un fluide incompressible et en présence des machines hydrauliques (pompe, turbine) dans un système de conduites, l'équation de Bernoulli entre les deux états (A) et (B) est :

$$\text{Etat A : } H_A = \frac{U_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + Z_A$$

$$\text{Etat B : } H_B = \frac{U_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + Z_B$$

$$H_A + H_{mt} = H_B + H_{tur} + \Delta H_{AB}$$



Les pertes de charge entre (A) et (B) sont :

$$\Delta H_{AB} = \sum \Delta H_l + \sum \Delta H_{Sing}$$

Avec : H_{mt} est la charge manométrique totale d'une pompe (gains) et H_{tur} est la charge consommée par une turbine (pertes).

III.4 Présentation du diagramme de charge

$$H = H_s + H_c \quad (I-6)$$

$H_s = \frac{P}{\rho g} + Z$ est la charge piézométrique et $H_c = \frac{U^2}{2g}$ est la charge cinétique

Les lignes de charge sont utilisées pour connaître la répartition des énergies potentielles et cinétiques ainsi que les pertes et les gains d'énergie le long d'une conduite hydraulique.

La représentation de ces grandeurs est faite au centre de gravité de la section transversale par la préparation des étapes suivantes :

- Choisir une référence d'altitude Z ,
- Localiser les singularités sur la conduite d'écoulement,
- Faire les calculs pour trouver les grandeurs aux états (sections transversales) concernés de Q , P , H_s et H_c .

La figure (I.13) montre les lignes de charge piézométrique (H_S) et cinétique (H_C) d'une conduite inclinée en présence des pertes de charge (ΔH).

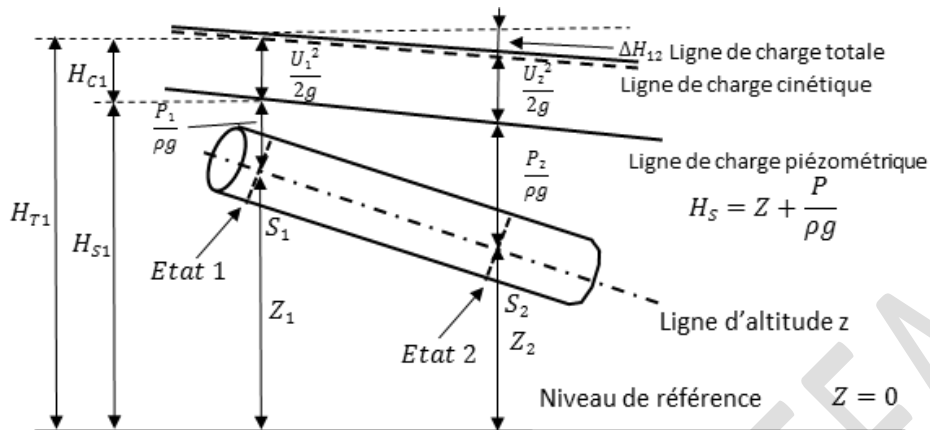


Figure III.4 Présentation des lignes de charge piézométrique et cinétique d'un écoulement dans une conduite inclinée.

Calcul hydraulique dans les conduites

III.5 Calcul hydraulique dans les conduites (Cas fréquemment rencontrés)

a) Conduite de diamètre constant

On peut évaluer le débit qui traverse une conduite, en utilisant l'équation de Bernoulli entre les sections (A) et (B).

$$H_A = H_B + \Delta H_{AB}$$

La perte de charge totale étant causée par le frottement dans la conduite seulement, donnée par la formule de Darcy-Weisbach :

$$\Delta H_{AB} = H_A - H_B =$$

$$\frac{\lambda L U^2}{D 2g} = \frac{8\lambda L}{\pi^2 g D^5} Q^2$$

$$H_A = \frac{U_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + Z_A ,$$

$$H_B = \frac{U_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + Z_B$$

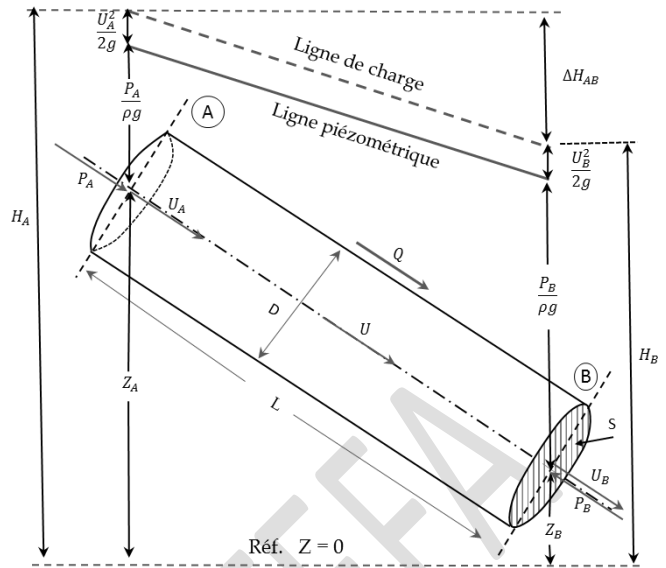
et $Q = S \cdot U = \frac{\pi D^2}{4} \cdot U$

Le débit est donné par :

$$Q = \sqrt{(H_A - H_B) / \left(\frac{8\lambda L}{\pi^2 g D^5}\right)} = \sqrt{\Delta H_{AB} / \left(\frac{8\lambda L}{\pi^2 g D^5}\right)}$$

Remarque

Il existe autre forme de $\Delta H_{AB} = f(Q)$



$$\Delta H_{AB} = R \cdot Q^2 \quad \text{(III-1)}$$

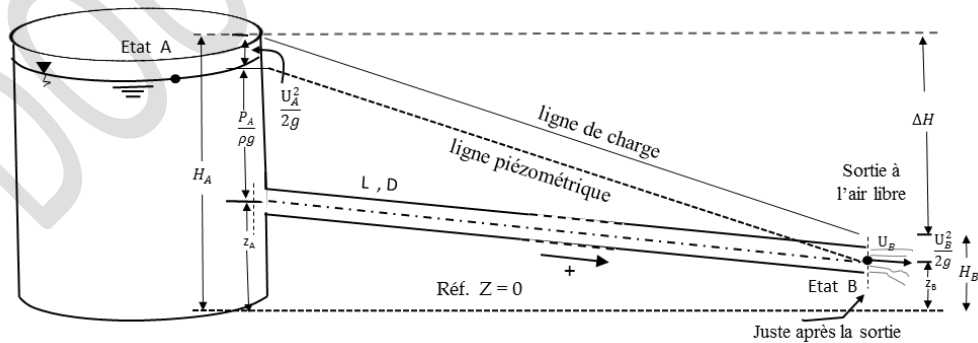
$R = \frac{8\lambda L}{\pi^2 g D^5}$ est la résistance hydraulique de la conduite dépend de la longueur (L), du diamètre (D) et du coefficient de perte de charge linéaire (λ). L'unité de R est :

$[R] = \frac{m}{\frac{m^3}{s^2} \cdot m^5} = \frac{s^2}{m^5}$ pour des débits en m^3/s

Ou $[R] = \frac{m}{(l/s)^2} = \frac{m \cdot s^2}{l^2}$ pour des débits en l/s.

a) Conduite entre un réservoir et une sortie de conduite à l'air libre

Si le fluide est transporté par gravité, l'écoulement est appelé gravitationnel. Le fluide en état (B) est en contact de l'air libre (Pression atmosphérique, $P_B = 0$) et la vitesse U_B est inconnue. Supposant que les pertes de charge singulières sont négligeables.



L'équation de Bernoulli entre les deux états (A) et (B)

$$\left(\frac{U_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + Z_A\right) = \left(\frac{U_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + Z_B\right) + \Delta H_{AB}$$

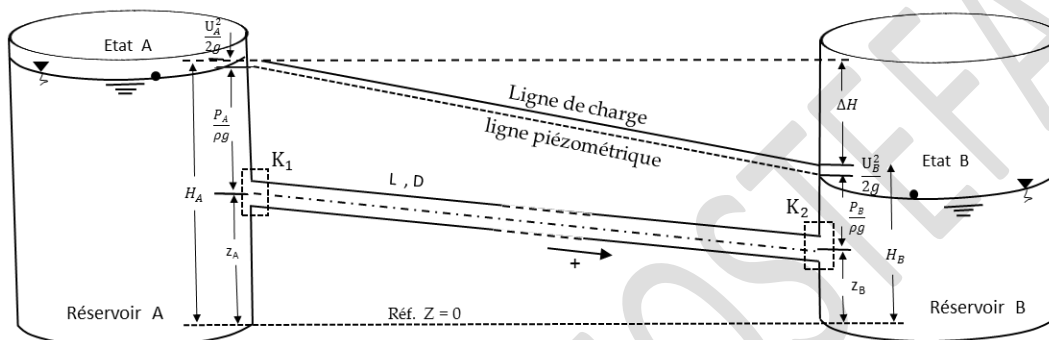
$$0,0 + 0 + Z_A = \left(\frac{U_B^2}{2g} + 0 + Z_B\right) + \Delta H_{AB}$$

$$\text{Donc : } Z_A - Z_B = \frac{U_B^2}{2g} + \frac{\lambda L U_B^2}{D 2g} = \frac{8}{\pi^2 g D^4} \left(1 + \frac{\lambda L}{D}\right) Q^2$$

$$\text{Finalement : } Q = \sqrt{\frac{(Z_A - Z_B)}{\frac{8}{g \pi^2 D^4} \left(1 + \frac{\lambda L}{D}\right)}}$$

b) Conduite simple entre deux réservoirs

Le fluide s'écoule par gravité du point de l'état (A) à l'état (B). Dans ce cas, les pertes de charge linéaires et singulières entrée et sortie de la conduite sont considérées.



D'après l'équation de Bernoulli appliquée entre les états (A) et (B),

$$Z_A - Z_B = \Delta H_{AB}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{AB} &= (0,0 + 0 + Z_A) - (0,0 + 0 + Z_B) = \frac{\lambda L U^2}{D 2g} + K_1 \frac{U^2}{2g} + K_2 \frac{U^2}{2g} \\ &= \left(\frac{\lambda L}{D} + K_1 + K_2\right) \frac{U^2}{2g} = \frac{8 \left(\frac{\lambda L}{D} + K_1 + K_2\right)}{\pi^2 g D^4} Q^2 \end{aligned}$$

$$\text{Le débit est donné par : } Q = \sqrt{\frac{(Z_A - Z_B)}{8 \left(\frac{\lambda L}{D} + K_1 + K_2\right) / (\pi^2 g D^4)}}$$

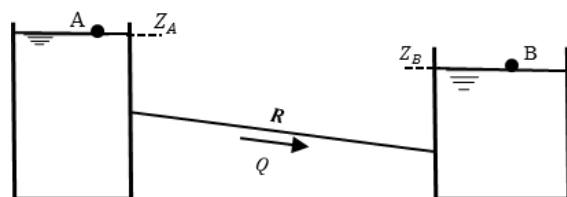
La résistance hydraulique est :

$$R = \frac{8 \lambda L}{\pi^2 g D^5} \left(1 + \frac{D}{\lambda L} K_1 + \frac{D}{\lambda L} K_2\right)$$

Remarque

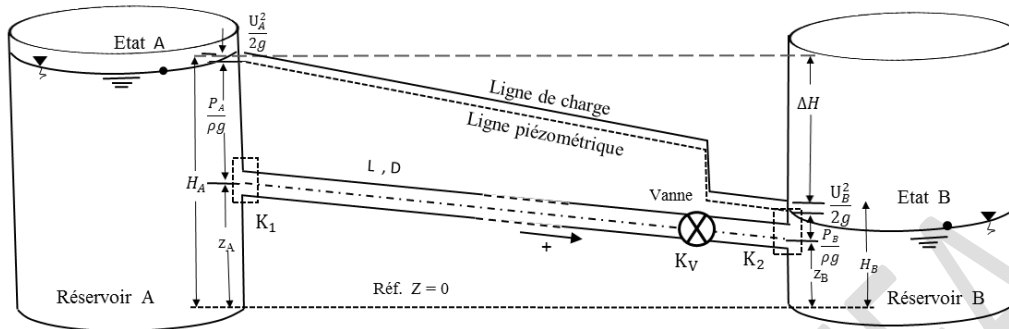
On peut représenter le système hydraulique par un schéma de calcul décrit par la différence de $\Delta Z = Z_A - Z_B$ et la résistance hydraulique R .

$$\text{Le débit est donné par : } Q = \sqrt{\frac{\Delta Z}{R}}$$



c) Conduite simple avec une vanne entre deux réservoirs

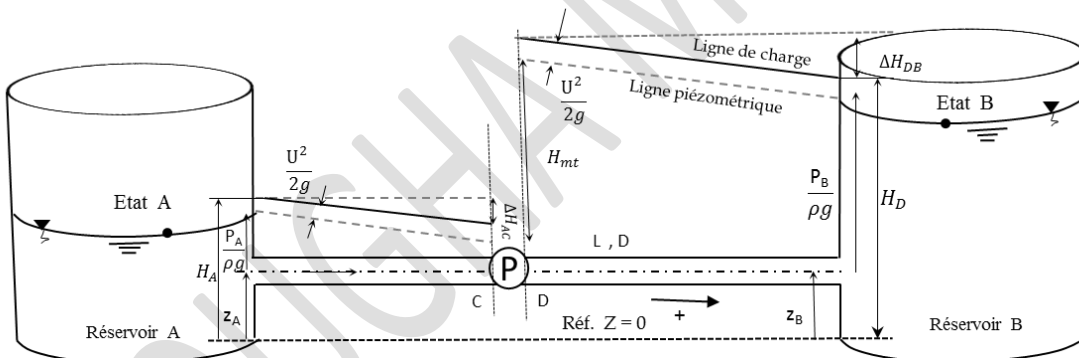
Dans un robinet-vanne, le coefficient de perte de charge locale K_V varie de près de zéro à l'infini suivant la position d'ouverture, d'où :



$$Q = \sqrt{\frac{(Z_A - Z_B)}{\frac{8}{\pi^2 g D^4} \left(\frac{\lambda L}{D} + K_V + K_1 + K_2 \right)}}$$

d) Conduite simple avec une pompe entre deux réservoirs

La pompe apporte un supplément de charge hydraulique H_{mt} dans le système. En écrivant l'équation de Bernoulli entre les deux états (A) et (B) (Pertes de charge singulières négligeables), il donne :



$$\frac{U_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + z_A + H_m = \frac{U_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + z_B + \Delta H_{AC} + \Delta H_{DB}$$

$$0,0 + 0 + z_A = 0,0 + 0 + z_B + \Delta H_{AC} - H_{mt} + \Delta H_{DB}$$

En simplifiant, on obtient : $z_A - z_B = \frac{\lambda L U^2}{D 2g} \Big|_{AC} - H_m + \frac{\lambda L U^2}{D 2g} \Big|_{DB}$

La valeur de cette hauteur manométrique de fonctionnement peut être obtenue (cas simplifié, les diamètres : $D_{AC} = D_{DB}$) :

$$H_{mt} = \frac{8\lambda \sum L}{\pi^2 g D^5} Q^2 - \Delta Z$$

En général, on approxime la courbe caractéristique d'une pompe par une fonction parabolique de type :

$$H_{mt} = aQ^2 + bQ + c$$

En regroupant les longueurs de conduites de mêmes diamètres, on écrit :

$$\Delta H = H_A - H_B = \frac{8\lambda \sum L}{\pi^2 g D^5} Q^2 - (aQ^2 + bQ + c) = RQ^2 - (aQ^2 + bQ + c)$$

En regroupant les coefficients, on obtient le polynôme quadratique suivant :

$$(R - a)Q^2 - bQ - (c + H_A - H_B) = 0$$

Dont la solution est : $Q = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4(R-a)(c + H_A - H_B)}}{2(R-a)}$

Il faudra choisir la solution physique acceptable, c'est-à-dire celle qui correspond à un point sur la courbe de pompe.

III.6 Calcul hydraulique complexe

Bien souvent, avant de faire le dimensionnement d'un système hydraulique, il est nécessaire de simplifier (transformer) en remplaçant les pertes singulières par son équivalent en pertes linéaires et en regroupant les conduites en série ou en parallèle pour former des conduites équivalentes. Les techniques de transformation d'un système hydraulique (réseau réel) vers un schéma de calcul permettent d'éviter des erreurs au niveau des calculs et de gagner de temps.

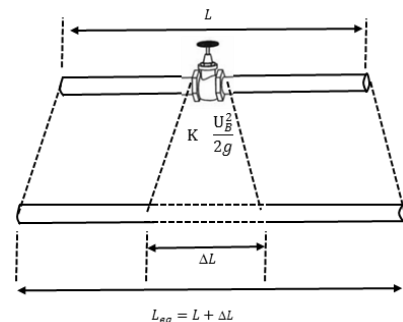
III.6.1 Techniques de transformation

Le but de ces techniques est pour organiser et faciliter les calculs d'un système hydraulique complexe.

III.6.1.1 Techniques analytiques

a) Longueur équivalente

L'objectif est de transformer des pertes de charge singulières en perte de charge linéaire. Nous désirons remplacer (virtuellement) cette singularité (ex. Vanne) par un supplément de longueur de conduite sur laquelle se produirait une perte de charge linéaire égale à la perte de charge singulière, voir la figure ci-face. La longueur équivalente qui viendra majorer la longueur réelle pour tenir compte des pertes de charge singulières.



$$H_A = H_B + \Delta H_{AB}$$

Avec : $\Delta H_{AB} = \frac{\lambda L}{D} \frac{U^2}{2g} + K \frac{U^2}{2g} = \frac{\lambda}{D} \left(L + \frac{D}{\lambda} K \right) \frac{U^2}{2g} = \frac{\lambda}{D} \frac{(L + \Delta L)}{\text{Longueur équivalente}} \frac{U^2}{2g} = \frac{\lambda}{D} L_{\text{éq}} \frac{U^2}{2g}$

Donc : $L_{\text{éq}} = \left(L + \frac{D}{\lambda} K \right)$ et $\Delta L = \frac{D}{\lambda} K$ (longueur supplémentaire)

On peut généraliser la situation, dans le cas d'une conduite de section constante porte plusieurs singularités, la longueur équivalente devient :

$$L_{\text{éq}} = \left(L + \sum_i^n \frac{D}{\lambda} K_i \right) \quad (\text{III-2})$$

Avec : L est la somme des longueurs linéaires des tronçons de même diamètre.

La notion de longueur équivalente permet d'estimer l'importance des pertes de charge singulières par rapport aux pertes de charge linéaires moyennant le rapport :

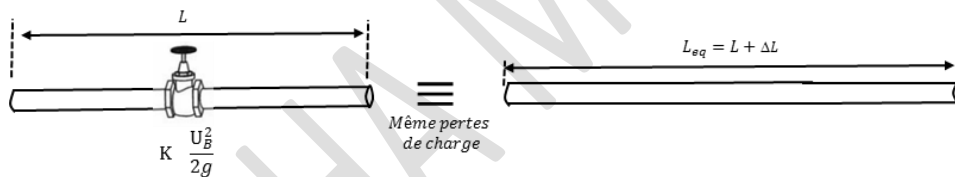
$$= \frac{L_{\text{éq}} - L}{L} \times 100\%$$

Application 1

Trouver la longueur d'une conduite de 0,10 m de diamètre et de $\lambda = 0,02$ pour être équivalente à une autre conduite de 100 m de long, de même diamètre et rugosité, dont laquelle la perte de charge singulière (ex. une vanne) a une valeur de $K = 2$.

Les pertes de charge doivent être les mêmes dans les deux conduites :

$$\underbrace{\lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} + \sum K \frac{U^2}{2g}}_{\text{Conduite réelle}} = \underbrace{\lambda \frac{L_{\text{eq}}}{D} \frac{U^2}{2g}}_{\text{Conduite équivalente}}$$



$$\lambda \frac{L}{D} + K = \lambda \frac{L_{\text{eq}}}{D} \quad ; \quad L_{\text{eq}} = L + K \frac{D}{\lambda}$$

En remplaçant les valeurs connues, la longueur équivalente est : $L_{\text{eq}} = 110 \text{ m.}$

Le pourcentage d'importance des pertes de charge singulières de la conduite :

$$\frac{L_{\text{éq}} - L}{L} \times 100\% = \frac{110 - 100}{100} \times 100\% = 10\%$$

Remarque : Lorsqu'on utilise la formule de Hazan - Williams ΔL peut être calculé à partir de la formule : $\Delta L = 0,00773 K Q^{0,148} C_{HW}^{1,852} D^{0,8703}$

Le tableau suivant propose l'équivalent des singularités en longueur de conduite afin de calculer la perte de charge totale dans les systèmes hydrauliques.

Singularité	$L_{\text{éq}}/D$
Coude à 90°	30
Coude 90° (grand diamètre)	20
Coude de rue à 90°	50
Coude à 45°	16
Coude de rue à 45°	25
Tés, couler dans le tronçon	20
Tés, flux dans la branche	60

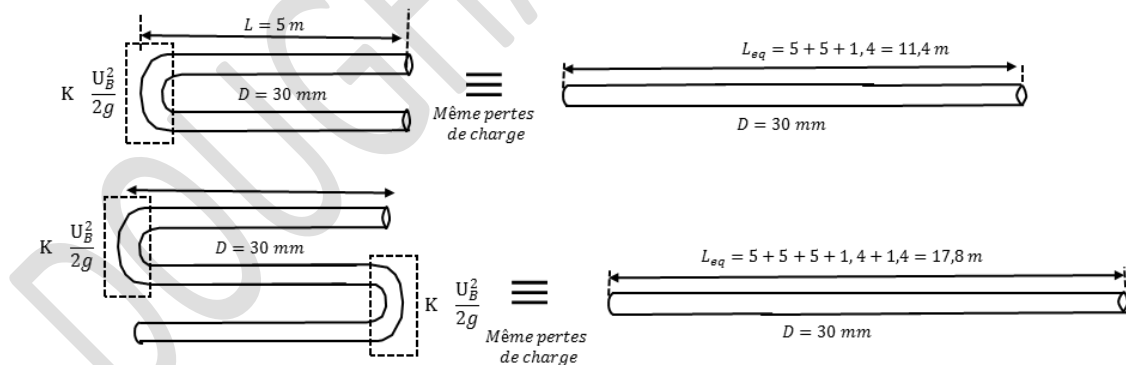
Singularité	$L_{\text{éq}}/D$	
Vanne à clapet ouvert	340	
Vanne à angle ouvert	150	
Vanne d'arrêt	100 % ouverte	8
	75 %	35
	50 %	160
	25 %	900
Robinet à tournant ouvert	150	
Vanne papillon ouverte	45	

Figure III.5 Longueur équivalente pour divers raccords et vannes (D : diamètre).

Application 2

Les tuyaux de 10 m de long en totalité et un coude de 180° ont les mêmes pertes de charge que le tuyau équivalent de $D = 30$ mm et de 11,4 m de long. Même chose pour le tuyau serpentin de longueur totale 15 m et deux singularités (coude de 180°) le tous est l'équivalent d'un tuyau linéaire de $L_{\text{eq}} = 5 + 5 + 5 + 1,1 + 1,4 = 17,8$ m.

L'utilisation du monogramme suivant facilite l'estimation de la longueur équivalente.



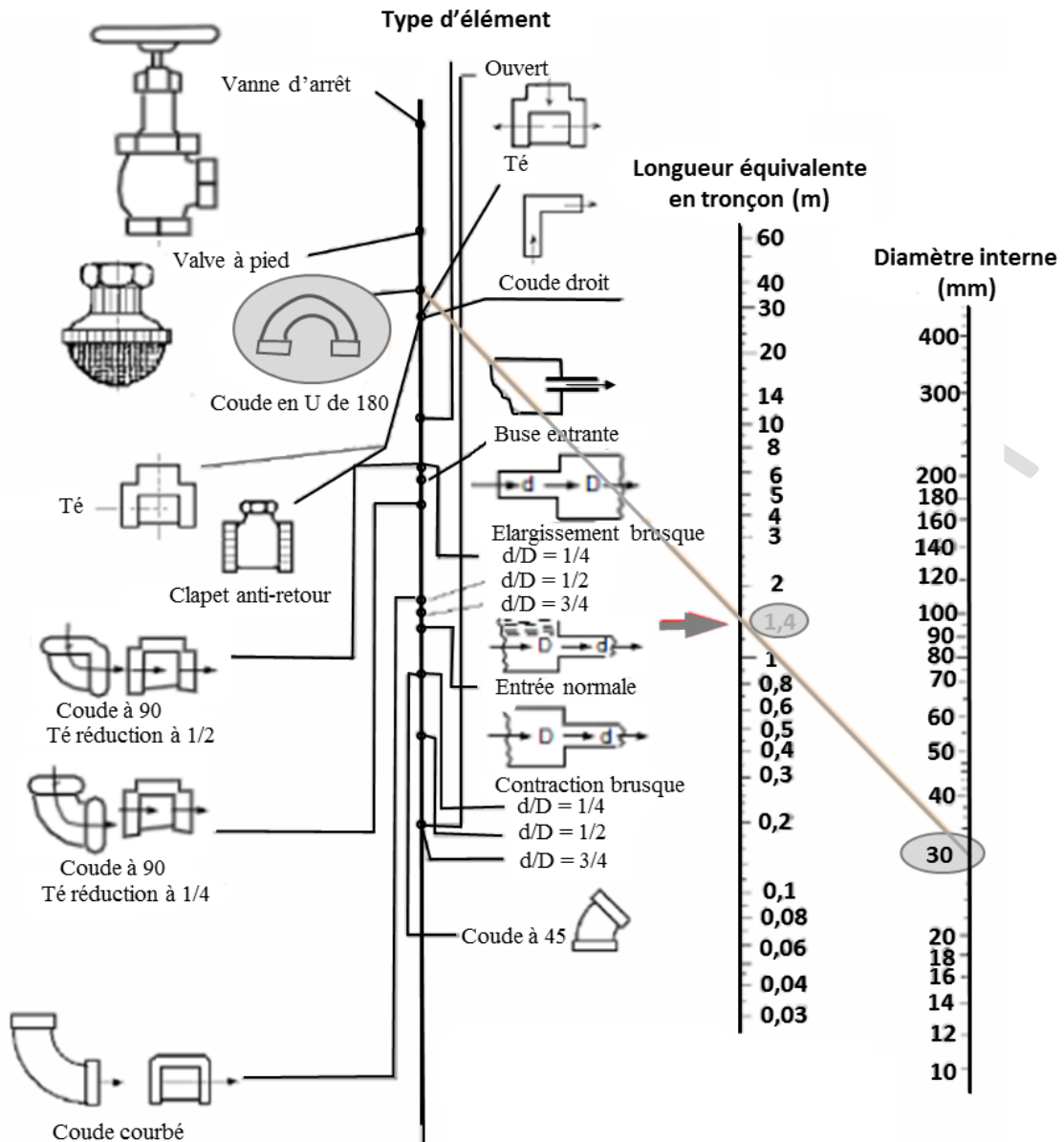


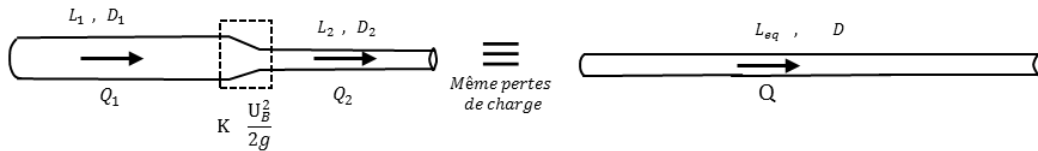
Figure III.6 Monogramme d'estimation de la longueur équivalente

b) Association des conduites en série

On veut remplacer un nombre de conduites placées en série par une conduite équivalente qui fait véhiculer le même débit que l'ensemble des conduites avec une perte de charge donnée. Le débit de circulation est le même et la perte de charge totale est la somme de toutes les pertes de charge.

$$\Delta H_T = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \dots + \Delta H_j + \dots + \Delta H_n = \sum_1^n \Delta H_i$$

Le débit ne varie pas le long des conduites : $Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n = Q$



$$\Delta H_T = \sum_1^n \frac{\lambda}{D_i} (L_{\text{éq}})_i \frac{U_i^2}{2g} \quad , \quad L_{\text{éq}} : \text{incluse des singularités de la conduite.}$$

Comme les débits sont égaux, l'équation devient d'après la formule de Darcy-Weisbach :

$$\Delta H_T = \sum_1^n \frac{8\lambda(L_{\text{éq}})_i}{\pi^2 g D_i^5} Q^2 = \sum_1^n (R_{\text{éq}})_i Q^2 \quad \text{Avec : } (R_{\text{éq}})_i = \frac{8\lambda(L_{\text{éq}})_i}{\pi^2 g D_i^5}$$

$(R_{\text{éq}})_i$: est la résistance hydraulique de la conduite (i). Dans le cas de l'utilisation de la formule de

Hazan-Williams, la résistance est donnée : $(R_{\text{éq}})_i = \left(\frac{1}{C_{HWi}}\right)^{1,85} \frac{(L_{\text{éq}})_i}{D_i^{4,87}}$

La conduite équivalente est présentée par : $\Delta H_{\text{eq}} = \frac{8\lambda L_{\text{EQ}}}{\pi^2 g D^5} Q^2 = R_{\text{EQ}} \cdot Q^2$

Avec R_{EQ} est la résistance hydraulique équivalente.

Alors $\Delta H_T = \Delta H_{\text{eq}}$

$$R_{\text{EQ}} = \sum_1^n (R_{\text{éq}})_i \quad \text{(III-3)}$$

Donc pour des conduites en série, la résistance équivalente s'exprime comme la somme des résistances de chaque conduite.

Remarque :

Généralement le diamètre choisi de la conduite équivalente est celui de la conduite la plus longue.

c) Association des conduites en parallèle

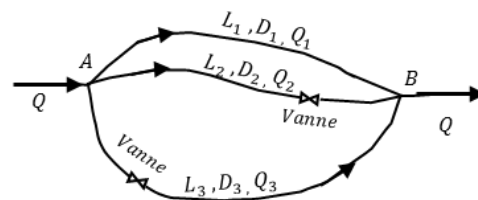
Pour remplacer des conduites en parallèle par une conduite équivalente, il faut assurer que ces conduites ont les mêmes points de départ (A) et d'arrivée (B) séparément, voir la figure ci-contre.

Dans ce cas, la différence de charge hydraulique entre (A) et (B) est la même pour toutes les conduites

$$\Delta H_1 = \Delta H_2 = \Delta H_3 = \dots = \Delta H_n = \Delta H$$

et le débit total est égal à la somme des débits :

$$Q_T = \sum_1^n Q_i$$



La conduite équivalente devra donc véhiculer un débit égal au débit total sous une perte de charge égale à la perte de charge unique.

Pour une conduite (i) quelconque, on peut écrire le débit en fonction de la charge :

$$Q_i = \sqrt{\frac{\Delta H_i}{(R_{\text{éq}})_i}}$$

En combinant entre ces trois équations, et on trouve : $\sqrt{\frac{\Delta H_{eq}}{R_{EQ}}} = \sum_1^n \sqrt{\frac{\Delta H_i}{(R_{eq})_i}}$

$$\frac{1}{\sqrt{R_{EQ}}} = \sum_1^n \frac{1}{\sqrt{(R_{eq})_i}} \quad (III-4)$$

d) Conduite à soutirage continu

- Cas 1

Cas d'un réseau d'irrigation (pivot d'arrosage). Desserte de débits égaux bien répartis.

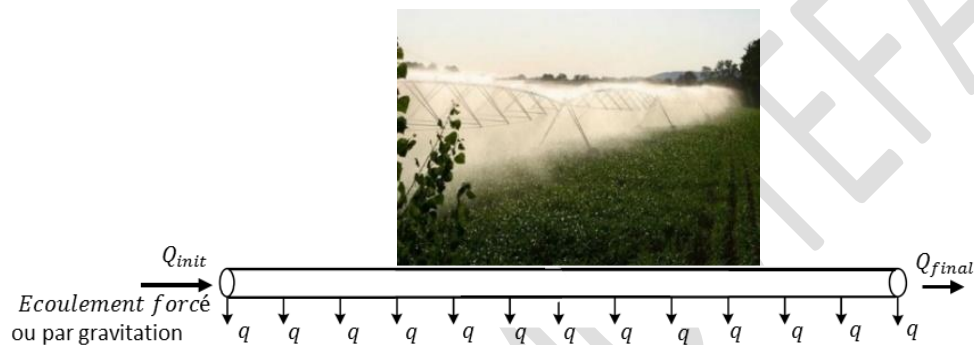


Figure III.7 Distribution de débit uniforme.

- Cas 2

Réseau secondaire de distribution d'eau potable

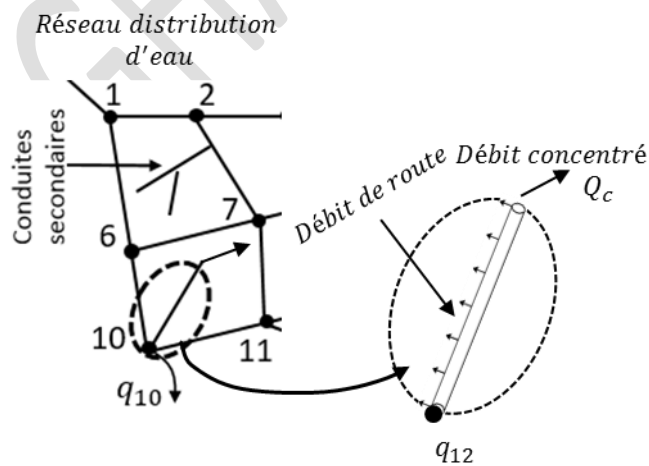


Figure III.8 Conduite secondaire dans un réseau de distribution d'eau potable.

L'eau peut circuler par gravitation ou par pompage (Fig. 3,5) avec des retraits $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$

Le débit Q qui coule dans la conduite est : $Q = \sum_1^n q_j + Q_c$

Pour une répartition uniforme de q le débit est devenu $Q = L \times q + Q_c$

III.7 Typologie des systèmes hydrauliques

III.3.1.1 Systèmes hydrauliques urbains

- **Réseau d'adduction des eaux potables**

L'objectif du réseau d'adduction est de transférer de l'eau d'un réservoir vers d'autres réservoirs et quelques fois d'un ou plusieurs forages ou unité de production vers un réservoir pendant une durée bien limitée.

- **Réseau de distribution d'eau potable**

L'objectif du réseau est d'acheminer de l'eau d'un réservoir vers les abonnés et en même temps doit satisfaire des exigences suivantes :

- Débits demandés par l'abonné,
- Pression de service aux nœuds,
- Respecter les normes admissibles de vitesse et de pression.

Selon la liaison entre les différents tronçons, on distingue trois types de réseaux :

a) Réseau ramifié

Le réseau à un sens unique des écoulements : des tronçons principaux vers les tronçons secondaires, de branchement d'un ensemble de conduites ou autres équipements s'appelle un nœud, voir la figure (III.5). Un réseau ramifié est couramment utilisé pour l'approvisionnement en eau en milieu rural.

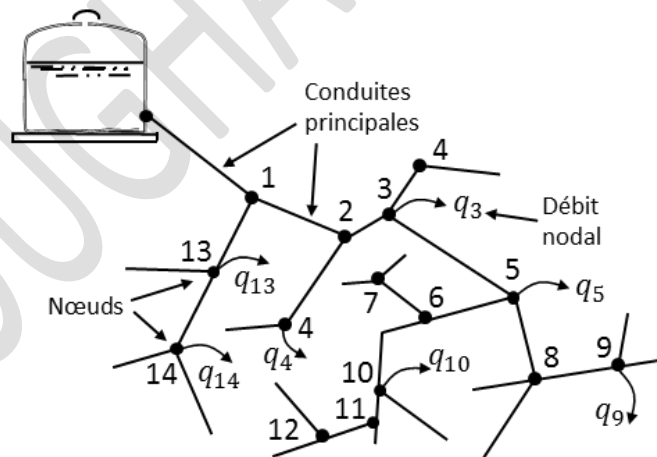


Figure III.9 Réseau ramifié de distribution d'eau potable (réseau principal)

b) Réseau maillé

Le réseau maillé est un ensemble de liaisons entre les différents tronçons formant des mailles, voir la figure (II.6).

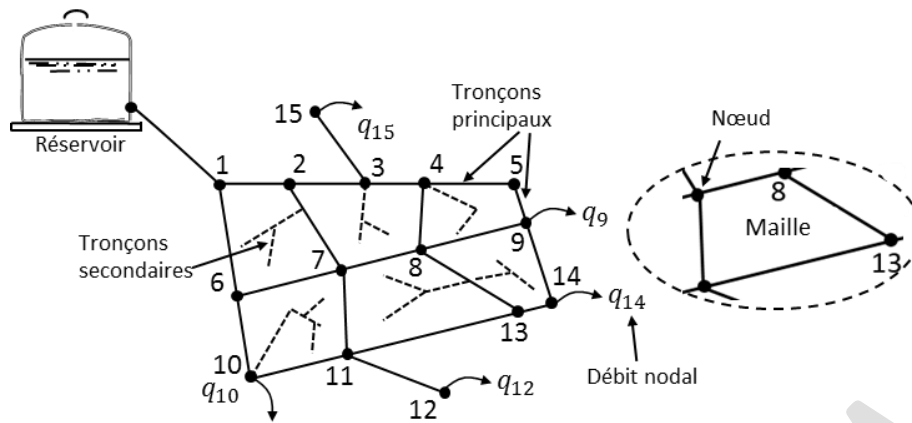


Figure III.10 Réseau maillé de distribution d'eau potable (réseau principal et secondaire)

Ce type de réseau assure une bonne répartition des débits en cas de rupture d'une conduite, il suffit de l'isoler et tous les abonnés situés à l'aval seront alimentés par les autres tronçons avec une répartition plus uniforme de pression et du débit.

c) Réseau mixte

On peut rencontrer un réseau mixte (un mélange de réseau maillé et de réseau ramifié) dans des agglomérations rurales en voie de développement.

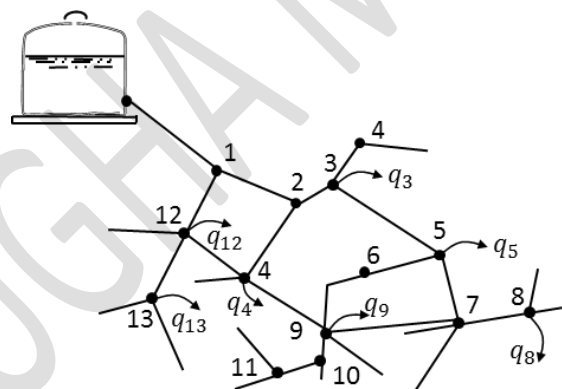
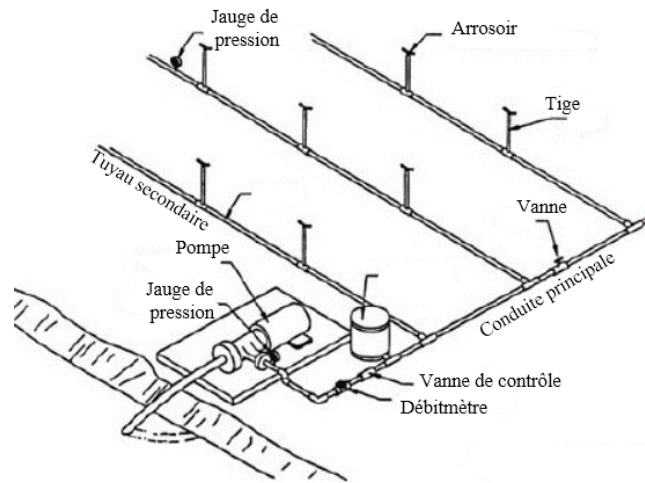


Figure III.11 Description d'un réseau mixte de distribution d'eau potable (réseau principal)

- Réseau d'irrigation



III.7.1.2 Systèmes hydrauliques industriels

- Conduite principale de transport de pétrole (pipeline),
- Réseaux de conduites de raffinage du pétrole,
- Réseaux de conduites en agro-alimentaires.



Figure III.12 Photos des systèmes d'écoulement industriels