Série d'exercices de TD #1
(Transformées en Z et Z inverse)

Ex #1 :

a- Calculer la transformée en Z (T.Z) de chaque signal analogique $x_a(t)$ suivant :

- $x_a(t)=u(t)$ avec $u(t)=1$ pour $t>0$ et 0 ailleurs

- $x_a(t)=e^{-at}u(t)$

- $x_a(t)=tu(t)$

b- Déterminer la TZ des séquences suivantes :

- $x(n)=a^n$

- $x(n)=n-5$

- $x(n)=n+1$

- $x(n)=(n+2)^2$

- $x(n)=2^n n^2$

c- Soit un système linéaire invariant dans le temps avec la réponse impulsionnelle :

$$h(n)=\begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

et la séquence d'entrée est donnée par :

$$x(n)=\begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- Déterminer la TZ de la séquence de sortie $y(n)$.

Ex #2 :

a- Calculer la T.Z inverse (TZI) de la fonction ci-dessous :

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

b- Déterminer la TZI de X(z) par la méthode de fraction rationnelle

$$X(z)=\frac{1}{6-5z^{-1}+z^{-2}}$$

c- Calculer la TZI de la fonction $X(z)$ par la méthode en série de puissance

$$X(z)=\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

d- Calculer la TZI de la fonction suivante utilisant la méthode des résidus

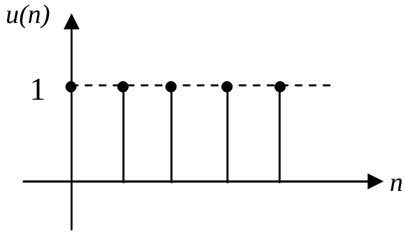
$$H(z)=\frac{6-9z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}}$$

Solutions du TD#1 :

Ex #1 :

a- La T.Z pour des signaux analogiques :

- $x_a(t)=u(t)$ *avec* $u(t)=1$ pour $t\geq 0$ et 0 ailleurs



$$X(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Cette série est une série géométrique ($\sum_{k=0}^{m} q^k = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$)

Alors $X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$ avec $|z|>1$

- $x_a(t) = e^{-at}$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-aTn}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-aT}z\right)^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

avec $\left|e^{aT}z\right|>1$ or $\left|z^{-1}\right|<e^{aT}$, $|z|>e^{aT}$

- $x_a(t)=tu(t)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} nTz^{-n} = Tz^{-1}+2Tz^{-2}+,... \quad (1)$$

$$z^{-1}X(z)=Tz^{-2}+2Tz^{-3}+,... \quad (2)$$

(1)-(2) $\Rightarrow (1-z^{-1})X(z)=Tz^{-1}+Tz^{-2}+Tz^{-3},...$ (3)

$$z^{-1}(1-z^{-1})X(z)=Tz^{-2}+Tz^{-3}+Tz^{-4},... \quad (4)$$

(4)-(3) $\Rightarrow (1-z^{-1})^2 X(z)=Tz^{-1}$

Finalement, on trouve

$$X(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

On peut utiliser la propriété de la multiplication par la variable d’évolution

$$(\, Z\{n^k x(n)\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^k X(z)\,)$$

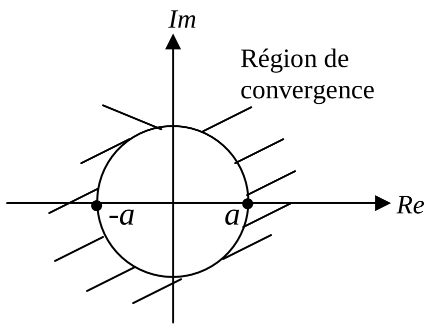
$$Z\{nTu(n)\} = -zT\,\frac{dU(z)}{dz} = -zT\left(\frac{z}{z-1}\right)' = -zT\,\frac{1.(z-1)-z.1}{(z-1)^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

b- Calcul de la T.Z de *x(n)* :

- $x(n) = a^n u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n \quad \text{avec } \left|\frac{a}{z}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$



- $x(n) = n-5$

La TZ de ce signal discret est obtenue par l’utilisation de la propriété du retard.

$$Z\{x(n-5)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-5)z^{-n}$$

$$= \sum_{j=-5}^{\infty} x(j)z^{-(j+5)}$$

$$Z\{x(n-5)\} = z^{-5}\sum_{j=-5}^{\infty} x(j)z^{-j} \quad \text{avec } x(j)=0 \text{ pour } j<0$$

D’où

$$Z\{x(n-5)\} = z^{-5}\sum_{j=0}^{\infty} x(j)z^{-j} z^{-5} X(z)$$

$$= z^{-5}\left(\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right)$$

- $x(n) = n+1$

La TZ de ce signal discret est obtenue par l’utilisation de la propriété de l’avance.

On pose $y(n)=n \Rightarrow x(n) = y(n+1)$

$$Z\{x(n)\} = Z\{y(n+1)\} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n+1)z^{-n}$$

$$= z^1\left(Y(z) - \sum_{j=0}^{1-1} y(j)z^{-j}\right)$$

$$Z\{x(n)\} = z\left(\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - y(0)\right) = z\left(\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - 0\right) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

- $x(n) = (n+2)^2$

La TZ de ce signal numérique est obtenue en utilisant la propriété de la multiplication par la variable d'évolution :

Pour $y(n)= n^2$, $Y(z) = -z\dfrac{d\left(\dfrac{z}{(z-1)^2}\right)}{dz} = \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

Maintenant, on applique la propriété de l'avance. D'où

$$X(z) = Z\{y(n+2)\} = z^2\left(Y(z) - \sum_{j=0}^{2-1} y(j)z^{-j}\right)$$

$$= z^2\left(\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - (0^2 z^{-0} + 1^2 z^{-1})\right) = \frac{z^3(z+1)}{(z-1)^3} - z = \frac{z(4z^2-3z+1)}{(z-1)^3}$$

La méthode directe est donnée par

$$Z\{(n+2)^2\} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)^2 z^{-n}$$

$$= \sum_{j=-5}^{\infty}(n^2+4n+4))z^{-n} = \sum_{j=-5}^{\infty} n^2 z^{-n} + 4\sum_{j=-5}^{\infty} nz^{-n} + 4\sum_{j=-5}^{\infty} 1.z^{-n}$$

$$= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + 4\frac{z}{(z-1)^2} + 4\frac{z}{z-1} = \frac{z(4z^2-3z+1)}{(z-1)^3}$$

- $x(n) = 2^n n^2$

La TZ est obtenue par l'utilisation de la table ($Z\{a^n n^2\} = \dfrac{az(z+a)}{(z-a)^3}$)

Alors $Z\{2^n n^2\} = \dfrac{2z(z+2)}{(z-2)^3}$

On peut aussi utiliser la dérivée

$$Z\{2^n\} = \frac{z}{z-2}$$

$$Z\{2^n n\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-2}\right) = \frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$Z\{2^n n^2\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{(z-2)^2}\right) = \frac{2z(z+2)}{(z-2)^3}$$

1- Calcul de $Y(z)$= ?

Puisque $y(n) = x(n) * h(n)$

$Y(z) = X(z)H(z)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}\quad \text{avec } |z|>0$$

Finalement, on trouve

$$Y(z)=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z^{2}(1-z^{-N})}{(z-1)(z-a)}\quad \text{avec } |z|>0$$

2- Calcul de *x*(*n*)= ?

$$X(z)=\frac{z^{2}}{6z^{2}-5z+1}=\frac{z^{2}}{6(z-1/2)(z-1/3)}$$

$$X(z)=\frac{z}{6}\left(\frac{A}{z-1/2}+\frac{B}{z-1/3}\right)$$

$$A=\lim_{z\to 1/2}\frac{z}{z-1/3}=3$$

$$B=\lim_{z\to 1/3}\frac{z}{z-1/2}=-2$$

$$X(z)=\frac{1}{2}\frac{z}{z-1/2}-\frac{1}{3}\frac{z}{z-1/3}$$

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u(n)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}u(n)$$

<u>Ex #2</u> :

(a) Calcul de la TZ inverse (TZI) de $H(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$:

D'après la table des transformée en Z, on obtient directement la TZI. D'où

$$h(n)=a^{n}u(n)$$

(b) Calcul de la TZI de $H(z)=\dfrac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$:

1- La méthode de fractions rationnelles :

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$=\frac{A}{z-1}-\frac{B}{z-e^{-aT}}$$

Avec $\begin{cases} A = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)\left[\dfrac{(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}\right] = 1 \\ B = \lim\limits_{z\to e^{-aT}}(z-e^{-aT})\left[\dfrac{(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}\right] = -1 \end{cases}$

Alors, $H(z) = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z-e^{-aT}}$

A partir de la table, on peut facilement obtenir la réponse impulsionnelle $h(nT)$

$h(nT) = 1 - e^{-anT}$

2- La méthode en série de puissance (méthode de division polynomiale) :

La division euclidienne de deux polynômes de $H(z)$ donne

$(1-e^{-aT})z$	$z^2-(1+e^{-aT})z+e^{-aT}$
$(1-e^{-aT})z-(1-e^{-a2T})+(e^{-aT}-e^{-a2T})z^{-1}$	$(1-e^{-aT})z^{-1}+(1-e^{-a2T})z^{-2}+(1-e^{-a3T})z^{-3}+\ldots$
$(1-e^{-a2T})-(e^{-aT}-e^{-a2T})z^{-1}$	
$(1-e^{-a2T})-(1-e^{-a2T})(1-e^{-aT})z^{-1}+$ $e^{-aT}(1-e^{-a2T})z^{-2}$	

$$\begin{aligned} H(z) &= (1-e^{-aT})z^{-1}+(1-e^{-a2T})z^{-2}+(1-e^{-a3T})z^{-3}+\ldots \\ &= x(0)+x(T)z^{-1}+x(2T)z^{-2}+x(3T)z^{-3}+\ldots \end{aligned}$$

Alors on peut déduire $h(nT)$ comme

$h(nT) = 1 - e^{-anT}$

3- La méthode des résidus :

$h(nT)$ est la somme des résidus de $H(z)z^{n-1}$ aux pôles de $H(z)$.

Les pôles de $H(z) = \dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ sont : $z_1=1$ et $z_2=e^{-aT}$

Le résidu à un pôle $z=a$ d'ordre q de la fonction $X(Z)Z^{n-1}$ est donné par :

$$\mathrm{Re}\,s_a^q = \lim_{z\to a}\frac{1}{(q-1)!}\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left[H(Z)Z^{n-1}(z-a)^q\right]$$

$$\mathrm{Re}\,s_1^1 = \lim_{z\to 1}\frac{1}{(1-1)!}\frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}}\left[\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}Z^{n-1}(z-1)\right] = 1$$

$$\operatorname{Re} s^{1}_{e^{-aT}} = \lim_{z \to e^{-aT}} \left[\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})} Z^{n-1} (z-e^{-aT}) \right] = -e^{-anT}$$

Alors

$$h(nT) = \operatorname{Re} s^{1}_{1} + \operatorname{Re} s^{1}_{e^{-aT}} = 1 - e^{-anT}$$

(c) Calcul de la TZI de *H*(*z*) :

$$H(z) = \frac{6-9z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}} = \frac{6z^2-9z}{z^2-2.5z+1}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{6z-9}{(z-2)(z-0.5)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-0.5}$$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{z\to 2}(z-2)\left[\dfrac{6z-9}{(z-2)(z-0.5)}\right] = 2 \\ B = \lim\limits_{z\to 0.5}(z-0.5)\left[\dfrac{6z-9}{(z-2)(z-0.5)}\right] = 4 \end{cases}$$

On utilise la table, on obtient

$$h(n) = (4(0.5)^n + 2^{n+1})u(n)$$

(d) Calcul de la TZI de *H*(*z*) utilisant la méthode de fractions rationnelles.

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}+0.356z^{-2}}$$

Les pôles de *H*(*z*) sont :

z_1=0.5+j0.3257

z_2=0.5-j0.3257

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})}$$

$$= 2.8082 - \frac{1.8082-4.8082z^{-1}}{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})}$$

$$\frac{1.8082-4.8082z^{-1}}{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})} = \frac{A_1}{1-z_1z^{-1}} - \frac{A_2}{1-z_2z^{-1}}$$

A_1=0.904+j5.993

A_2=0.904-j5.993