Table des matières

0.1 Introduction

Cours polycopié pour le module Espaces de suites et leurs opérateurs.
Dahmane Achour. E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz

Le présent polycopié reprend un cours de deuxième année Master "Analyse Fonctionnelle" donné à l'Université de Mohamed Boudiaf-M'sila pendant les années 2018-2020. Ce cours vise à fournir aux étudiants les propriétés essentielles concernant les espaces de suites de Banach $\ell_p(X)$, $\ell_p^w(X)$, $\ell_p \langle X \rangle$ et les idéaux d'opérateurs (au sens de Pietsch). Comme tout cours de Mathématique, il doit être lu avec un stylo et une feuille de papier blanche à la main pour vérifier pas à pas que toutes les assertions sont correctes. Chaque chapitre de ce cours se termine par des exercices non corrigés.

Objectifs. Le but de ce cours est de fournir les outils nécessaires et largement utilisées dans la théorie des idéaux d'opérateurs. Il a aussi pour objectif fondamental de guider l'étudiant dans la résolution des problèmes parfois difficiles.

0.2 Espace de Banach

Définition 0.2.1 *(Suite de cauchy)*
Soit (X,d) un espace métrique. On appelle suite de cauchy dans X une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geq n_0 : \ d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

Définition 0.2.2 *(Espace complet)*
Soit (X,d) un espace métrique. On dit que X est complet si toute suite de cauchy converge dans X.

Définition 0.2.3 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une fonction $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ est dite norme si pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \, ,$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Autrement dit, toute norme est positivement homogène, c'est-à-dire vérifie (2) et satisfait l'inégalité triangulaire (3). Un espace vectoriel muni d'une norme est dit normé.

Définition 0.2.4 *(Espace de Banach)*
On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.

Définition 0.2.5 *Soient X un espace normé et $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est dite absolument convergente dans X si la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ est convergente.*

Théorème 0.2.1 *Un espace normé X est de Banach si et seulement si toute série de X absolument convergente est convergente.*

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y

Proposition 0.2.1 *$(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ est un espace vectoriel normé pour la norme*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x\neq y} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Définition 0.2.6 *(Convexité) Soit X un espace vectoriel et A une partie de X.*

1) On dit que A est convexe si

$$\forall x, y \in A \text{ et } \forall \lambda \in]0,1[: \lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

2) Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit convexe si son épigraphe est convexe.

De façon équivalente, on dira que φ est convexe si $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in]0,1[\; \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$.

Définition 0.2.7 *(Semi-continue inferieure) Soit X un espace topologique. Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit semi-continue infieurement si l'une des trois propriétés sont vérifiée:*

i) *L'épigraphe epi$(\varphi) = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R}, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$*

ii) *L'ensemble $\{x \in X, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans X pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

iii) *Pour tout $x \in X$, tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x, on a:*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} \varphi(x_k)) \geq \varphi(x)$$

Exemple 0.2.1 *1. toute fonction continue est semi-continue infieurement.*

2. une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est continue $\Longleftrightarrow$ si f et $(-f)$ sont semi-continue infieurement.

Définition 0.2.8 *Un hyperplan (affine) est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\} \qquad (H \text{ est fermé} \Leftrightarrow f \text{ bornée})$$

Théorème 0.2.2 *(Théoreme de Hahn Banach, forme géométrique) Soient A et B deux ensembles convexes non vides et disjoints d'un espace vectoriel normé réel X. Si A est ouvert,il existe une forme linéaire continue f sur X $(f \in X^*)$.et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha \leq f(b)$. En particulier, A et B sont séparés par l'hypothèse affine fermé H.*

Définition 0.2.9 *(Théoreme de graphe férmé)*
Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire. Alors, T est continue si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé dans l'espace de Banach $X \times Y$.

Définition 0.2.10 *(Théoreme de Banach-Steinhauss) Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et $(T_n)_n$ une famille de suites dans $\mathcal{L}(X, Y)$. On suppose que X est complet et que, pour tout $x \in X$,*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\|_Y < \infty.$$

On a alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

0.3 La convergence faible

Définition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach. La suite $(x_n)_n$ de X est dite converge faiblement vers $x \in X$ si*

$$\forall f \in X^* : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$$

et on écrit $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite de X. On a*

a) Si $(x_n)_n$ converge vers x fortement, alors elle est convergente faiblement vers x, i.e.,

$$\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0 \right) \Longrightarrow \left(x_n \xrightarrow{w} x \right)$$

b) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée. De plus on a

$$\|x\| \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n\| .$$

c) d) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, et $f_n \longrightarrow f$ fortement $(\|f_n - f\|_{E^*} \longmapsto 0)$ dans E^*, alors $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$

On notera X et Y deux espaces de Banach. La norme sur X est usuellement notée $\|.\|_X$ ou simplement $\|.\|$, l'orsqu'un seul espace est en jeu. La boule unité fermée de X sera notée B_X. On désigne par X^* le dual topologique de X : l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale $\|f\|_{X^*} = \sup_{x\in X} |f(x)|$. On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y.

On dira que deux espaces de Banach X, Y sont isomorphes $(X \sim Y)$ si il existe un opérateur invertible I (dit isomorphisme) de X dans Y. Un opérateur linéaire continu $T : X \longrightarrow Y$ tel que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour quelques $c > 0$ et tout $x \in X$ est dit isomorphisme.

Une isométrie est un opérateur linéaire continu $I : X \longrightarrow Y$ telle que $\|I(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Deux espaces de Banach X, Y sont isométriques $(X \simeq Y)$ s'il existe une isométrie entre X et Y.

Chapitre 1

Espaces de suites de Banach

1.1 Espaces de suites classique

Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Soit

$$\mathcal{S} = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\mathcal{S}$ muni de le loi $(+)$

$$(x + y) = (x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$$

et le loi $(.)$

$$\lambda x = \lambda (x_n)_n = (\lambda x_n)_n, \lambda \in \mathbb{K}$$

est un espace véctoriel.

Soit les sous espaces suivants

$$\ell_\infty(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathcal{S} : \sup_n |x_n| < \infty \right\}$$
$$c_0(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathcal{S} : x_n \underset{n \to \infty}{\to} 0 \right\}$$
$$c(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathcal{S} : x_n \underset{n \to \infty}{\to} \ell \in \mathbb{C} \right\}$$

ℓ_∞ : l'espace des suites bornées.

c_0 : l'espace des suites convergents vers 0.

c : l'espace des suites convergents.

Théorème 1.1.1 *Les ensembles ℓ_∞, c_0, c munis de la norme*

$$\|x\|_\infty = \|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \forall n \in \mathbb{N}$$

sont des espaces de Banach.

Remarque 1.1.1 *L'espace c_0 c'est un sous-espace fermé de ℓ_∞ donc un espace de Banach.*

Rappelons que $\ell_p(\mathbb{K}) = \ell_p$ est l'espace vectoriel des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p$ converge.
Alors $\ell_p(\mathbb{K})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$ définie par:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$.

Proposition 1.1.1 *Soit $1 \le p \le +\infty$. Alors*
1) $(c_0)^* = \ell_1$ isomorphisme isometrique. De plus on a

$$\|(x_n)_n\|_1 = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right| : (\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_n)_n\|_\infty \le 1\right\}. \tag{1.1.1}$$

2) $(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$ isomorphisme isometrique pour $p \ge 1$. De plus on a

$$\|(x_n)_n\|_p = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right| : (\alpha_i)_i \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_n)_n\|_{p^*} \le 1\right\}. \tag{1.1.2}$$

1.2 Espaces de suites p-sommable

Tout d'abord, si X un espace de Banach, nous noterons $X^{\mathbb{N}}$ l'espace de toute les suites $(x_i)_i$ d'éléments de X. L'ensemble $X^{\mathbb{N}}$ est espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition

$$(x_n)_n + (x_n)_n := (x_n + y_n)_n,$$

et la loi

$$\lambda.(x_n)_n := (\lambda x_n)_n, \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.2.1 *(L'espace des suites p-sommables). Une suite* (x_n) *(resp.*$(x_i)_{1\leq i\leq n}$*) dans* X *est absolument p-sommables si la suite scalaire* $(\|x_n\|)$ *(resp.*$(\|x_i\|)_{1\leq i\leq n}$*) est dans* ℓ_p*. On note* $\ell_p(X)$ *(resp.*$\ell_p^n\ (X)$*) l'espace de suites* $(x_n)_n$ *(resp.*$(x_i)_{1\leq i\leq n}$*) dans* X *absolument p-sommables. Pour tout* $x=(x_n)_n\in\ell_p(X)$*, on pose*

$$\begin{aligned} \|(x_n)_n\|_p &= \|(x_n)_n\|_{\ell_p(X)} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad & si\ 1\leq p<\infty \\ \|(x_n)_n\|_\infty &= \|(x_n)_n\|_{\ell_\infty(X)} &= \sup_n \|x_n\| \quad & si\ p=\infty \end{aligned}$$

Exercice 1.2.1 *Soit* $\alpha_j\geq 0, 1\leq j\leq m$ *et* $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+...+\frac{1}{r_m}, r, r_j\in\,]0,+\infty]$ *on a*

$$\frac{1}{r}\prod\nolimits_{j=1}^{m}\alpha_j^r\leq\sum\nolimits_{j=1}^{m}\frac{1}{r_j}\alpha_j^{r_j}$$

Cas particuliere pour $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}$ $(m=2, r=1, r_1=p\ \ , r_2=p^*)$ *on a*

$$\alpha\beta\leq\frac{1}{p}\alpha^p+\frac{1}{p^*}\beta^{p^*} \tag{1.2.1}$$

Preuve. La fonction exponentielle étant convexe, on a

$$\exp(tx+(1-t)y)\leq t\exp(x)+(1-t)\exp(y)$$

pur tout $x,y\in\mathbb{R}$ et $t\in[0,1]$, et l'inégalité cherchée s'obtient en prenant x et y tel que $\exp(x)=\alpha^p$ et $\exp(y)=\beta^{p^*}$ et $t=\frac{1}{p},(1-t)=\frac{1}{p^*}$ ■

Proposition 1.2.1 *(Inégalité de Hölder). Soient* X *un espace vectoriel normé et* $1\leq p\leq+\infty$*. On a*

i) $\sum_{i=1}^n\|x_i\|\,\|y_i\|\leq\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n\|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}$

et $\sum_{i=1}^n\|x_i\|\,\|y_i\|\leq\sup\limits_{1\leq i\leq n}\|y_i\|\sum_{i=1}^n\|x_i\|$ *pour* $p=1$.

ii) Soient $(x_n)_n\in\ell_p(X),(y_n)_n\in\ell_q(X)$ *et* $s,q,r\in[1,+\infty[$ *avec* $\frac{1}{r}=\frac{1}{s}+\frac{1}{q}$*. Alors* $(\|x_n\|\,\|y_i\|)_i\in\ell_r$*. De plus on a*

$$\left\|(\|x_i\|\,\|y_i\|)_{i=1}^n\right\|_r\leq\left\|(x_i)_{i=1}^n\right\|_s\cdot\left\|(y_i)_{i=1}^n\right\|_q. \tag{1.2.2}$$

Preuve. Les cas $p=1$ et $p=\infty$ étant immédiats par la définition, supposons que $1<p<+\infty$.

i) On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \neq 0$ ou $\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^{p^*} \neq 0$. On pose

$$c_i = \frac{\|x_i\|}{\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \ , \ 1 \leq i \leq n$$

et

$$d_i = \frac{\|y_i\|}{\left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}} \ , \ 1 \leq i \leq n.$$

D'après (1.2.1) on a

$$c_i d_i \leq \frac{1}{p} c_i^p + \frac{1}{p^*} d_i^{p^*}.$$

Ce qui implique

$$\frac{\|x_i\| \|y_i\|}{\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}} \leq \frac{1}{p} \frac{\|x_i\|^p}{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p} + \frac{1}{p^*} \frac{\|x_{yi}\|^{p^*}}{\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^{p^*}} \forall\ 1 \leq i \leq n$$

On utilise la somme sur les deux coté

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\|}{\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p}{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p} + \frac{1}{p^*} \frac{\sum_{i=1}^{n} \|x_{yi}\|^{p^*}}{\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^{p^*}}.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

ii) $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\left(\frac{p}{r}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{q}{r}\right)} \Rightarrow p > r$ ou $q > r$. On pose : $\|X_i\| = \|x_i\|^r$ et $\|Y_i\| = \|y_i\|^r$.
D'après *(i)* ona :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^r \|y_i\|^r &= \sum_{i=1}^{n} \|X_i\| \|Y_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|X_i\|^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|Y_i\|^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}} \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^r \|y_i\|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Si $p = r, (q = +\infty)$ on utiliser (ii). ■

Proposition 1.2.2 *Soient* $(x_n) \in \ell_p(X)$,$(y_n) \in \ell_q(Y)$ *et* , $r, p, q \in]0, +\infty[$ *tel que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Alors*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^r \|y_n\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \|(x_n)\|_p \|(y_n)\|_q$$

Preuve. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder (1.2.2) pour n fixé et passer à la limite pour n tend vers $+\infty$. ■

Théorème 1.2.1 *Soit* $p \geq 1$. $\left(\ell_p(X), \|\cdot\|_p\right)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. Soient $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell_p(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\|\lambda x\|_p = \|(\lambda x_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

alors $\lambda x \in \ell_p(X)$ et $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$.
Pour $p = 1$ on a,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \|(x_n + y_n)_n\|_1 \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} \|x_i + y_i\| \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n} \|y_i\| = \|(x_n)_n\|_1 + \|(y_n)_n\|_1. \end{aligned}$$

Soit maintenant $p > 1$. Puisque $\|x_n + y_n\|^p = \|x_n + y_n\| \|x_n + y_n\|^{p-1}$, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_n + y_n\|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|x_n + y_n\|^{p-1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \|x_n + y_n\|^{p-1}\right).$$

D'après l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \|x_n\| \|x_n + y_n\|^{p-1} &\leq \|(x_n)_n\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_n + y_n\|^{p^*(p-1)}\right)^{\frac{1}{p^*}} \text{ et} \\ \sum_{i=1}^{n} \|y_n\| \|x_n + y_n\|^{p-1} &\leq \|(y_n)_n\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_n + y_n\|^{p^*(p-1)}\right)^{\frac{1}{p^*}}, \end{aligned}$$

de puis $p = p^*(p-1)$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_n + y_n\|^p \leq \left(\|(x_n)_n\|_p + \|(y_n)_n\|_p\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_n + y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p^*}},$$

il s'ensuit que

$$\|(x_n)_n + (y_n)_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_p + \|(y_n)_n\|_p < \infty,$$

et aussi $\|(x_n)_n\|_p = 0$ implique que $\|x_n\| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $(x_n)_n = 0$. Ce qui montre que $\left(\ell_p(X), \|\cdot\|_p\right)$ est un espace vectoriel normé.

Montrons que $\left(\ell_p(X), \|\cdot\|_p\right)$ est complet. Soit $(x^{(n)})_n$ (où $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_i \in \ell_p(X)$) est une suite de Cauchy dans $\ell_p(X)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} \left\|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right\|^p \leq \varepsilon^p, \tag{1.2.3}$$

alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right\| \leq \varepsilon,$$

On en déduit d'abord que pour chaque i fixé, $(x_i^{(n)})_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach X, donc elle converge vers un certain $x_i \in X$, posons $x = (x_i)_i$. Montrons que $x \in \ell_p(X)$. D'après (1.2.3) ceci revient à dire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} \left\|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ on déduit que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} \left\|x_i^{(n)} - x_i\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

maintenant en faisant $N \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\left\|x - x^{(n)}\right\|_p \leq \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq n_0. \tag{1.2.4}$$

Alors, $x^{(n_0)} - x = \left(x_i^{(n_0)} - x_i\right)_i \in \ell_p(X)$ et enfin puisque $x^{(n_0)} \in \ell_p(X)$ on a

$$x = x^{(n_0)} - (x^{(n_0)} - x) \in \ell_p(X),$$

et d'après (1.2.4), nous avons $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x^{(n)} = x$. Donc $\ell_p(X)$ est un espace de Banach. ■

Proposition 1.2.3 *Si* $(1 \leq q \leq p \leq \infty)$ *alors*

$$\ell_q(X) \subset \ell_p(X)$$

et

$$\|(x_n)_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_q, \text{ pour tout } (x_n)_n \in \ell_q(X),$$

de plus, l'inclusion $I : \ell_q(X) \hookrightarrow \ell_p(X)$, $I((x_n)_n) = (x_n)_n$ *n'est pas une isométrie.*

Preuve. Soit $(x_n)_n \in \ell_q(X)$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\|x_n\| \leq 1 \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

$\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0\right.$. Alors, pour $\varepsilon = 1$ donné $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq tel que:$n \geq n_0 \implies \|x_n\| \leq 1$). Donc pour $n \geq n_0$ on a $\|x_n\|^p \leq \|x_n\|^q$, par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p = \lim_{k\longrightarrow+\infty} \sum_{n=n_0}^{k} \|x_n\|^p \leq \lim_{k\longrightarrow+\infty} \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^q < \infty,$$

ceci implique que

$$(x_n)_n \in \ell_p(X) \quad \text{et} \quad \|(x_n)_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_q \ .$$

Soit $(x_n)_n = (x, x, 0, 0, ..) \in \ell_q(X)$ avec $x \in X, x \neq 0$. Alors si $p < \infty$,

$$\|I((x_n)_n)\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|x\| \neq \|(x_n)_n\|_q = 2^{\frac{1}{q}} \|x\| ,$$

et si $p = \infty$,

$$\|I((x_n)_n)\|_\infty = \|x\| \neq \|(x_n)_n\|_q = 2^{\frac{1}{q}} \|x\| ,$$

ce qui montre que I n'est pas une isométrie. ■

Maintenant on note par $c_0(X)$ l'espace de suites $(x_n)_n$ d'éléménts de X convergeant vers zéros. i.e.,

$$c_0(X) = \left\{(x_n)_n \subset X : \lim_n \|x_n\| = 0\right\}.$$

Proposition 1.2.4 *$c_0(X)$ est un sous-espace fermé de $\ell_\infty(X)$.*

Preuve. En effet , soit $(x^{(n)})_n$ une suite dans $c_0(X)$ telle que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x^{(n)} = x \in \ell_\infty(X),$$

notons que $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_k \in c_0(X)$ et $x = (x_k)_k$ et montrons que $(x_k)_k \in c_0(X)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|x^{(n)} - x\right\|_\infty = \sup_k \left\|x_k^{(n)} - x_k\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

De plus il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| x_k^{(n)} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } k \geq k_0.$$

Par suite, por tout $k \geq k_0$ on a

$$\|x_k\| \leq \left\| x_k^{(n_0)} - x_k \right\| + \left\| x_k^{(n_0)} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} x_k = 0$ ce qui donne $(x_k)_k = x \in c_0(X)$. ■

1.3 Les énoncés d'exercices

Exercice 1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < +\infty$ $(1 \leq p < \infty)$ (i.e., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X)$). Montrer que:

a- si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $\ell_p(X) \subset \ell_q(X)$ et

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p, \text{ pour tout } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X).$$

b- l'inclusion $i : \ell_p(X) \hookrightarrow \ell_q(X)$, $i((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une isométrie.

Exercice 2

Soient X un espace de Banach et $1 < p < \infty$. On définit les opérateurs $I_k : X \longrightarrow \ell_p(X)$ par

$$I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

où x est dans la k-ème position. Montrer que I_k est bien défini, linéaire et continu et $\|I_k(x)\|_{\langle p \rangle} = \|x\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. On peut associeé à T l'opérateurs linéire

$$\begin{array}{rcll} \widehat{T}^p & : & \ell_p(X) & \longrightarrow & \ell_p(Y) \\ & & (x_n)_n & \longmapsto & \widehat{T}^p((x_n)_n) = (T(x_n))_n \end{array}$$

Montrer que $\widehat{T}^p$ est continu et $\left\| \widehat{T}^p \right\| = \|T\|$.

Bibliographie

[1] J. Cohen, Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973) 177-200.

[2] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely Summing Operators.Cambridage University press, Cambridage(1995)

[3] A. Grothendieck, Sur certaines classes des suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Bol.Soc.Mat.S˜ao Paulo.8(1956) 81-110., C. R. Math. Acad. Sci. Paris 233 (1951) 1556-1558.

[4] M.C. Matos, Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations (2005).

[5] A. Pietsch, Operator ideals. Deutsch. Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.