Table des matières

0.1 Introduction

Cours polycopié pour le module Espaces de suites et leurs opérateurs.

Dahmane Achour. E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz

Le présent polycopié reprend un cours de deuxième année Master "Analyse Fonctionnelle" donné à l'Université de Mohamed Boudiaf-M'sila pendant les années 2018-2020. Ce cours vise à fournir aux étudiants les propriétés essentielles concernant les espaces de suites de Banach $\ell_p(X)$, $\ell_p^w(X)$, $\ell_p \langle X \rangle$ et les idéaux d'opérateurs (au sens de Pietsch). Comme tout cours de Mathématique, il doit être lu avec un stylo et une feuille de papier blanche à la main pour vérifier pas à pas que toutes les assertions sont correctes. Chaque chapitre de ce cours se termine par des exercices non corrigés.

Objectifs. Le but de ce cours est de fournir les outils nécessaires et largement utilisées dans la théorie des idéaux d'opérateurs. Il a aussi pour objectif fondamental de guider l'étudiant dans la résolution des problèmes parfois difficiles.

0.2 Espace de Banach

Définition 0.2.1 *(Suite de cauchy)*
Soit (X, d) un espace métrique. On appelle suite de cauchy dans X une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geq n_0 : \ d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

Définition 0.2.2 *(Espace complet)*
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est complet si toute suite de cauchy converge dans X.

Définition 0.2.3 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une fonction $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ est dite norme si pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \, ,$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Autrement dit, toute norme est positivement homogène, c'est-à-dire vérifie (2) et satisfait l'inégalité triangulaire (3). Un espace vectoriel muni d'une norme est dit normé.

Définition 0.2.4 *(Espace de Banach)*
On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.

Définition 0.2.5 *Soient X un espace normé et $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est dite absolument convergente dans X si la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ est convergente.*

Théorème 0.2.1 *Un espace normé X est de Banach si et seulement si toute série de X absolument convergente est convergente.*

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y

Proposition 0.2.1 $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ *est un espace vectoriel normé pour la norme*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq y} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Définition 0.2.6 *(Convexité) Soit X un espace vectoriel et A une partie de X.*

1) On dit que A est convexe si

$$\forall x, y \in A \text{ et } \forall \lambda \in]0,1[: \lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

2) Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit convexe si son épigraphe est convexe.

De façon équivalente, on dira que φ est convexe si $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in]0,1[\ \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$.

Définition 0.2.7 *(Semi-continue inferieure) Soit X un espace topologique. Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit semi-continue infieurement si l'une des trois propriétés sont vérifiée:*

i) *L'épigraphe epi$(\varphi) = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R}, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$*

ii) *L'ensemble $\{x \in X, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans X pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

iii) *Pour tout $x \in X$, tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x, on a:*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k \geq n} \varphi(x_k)) \geq \varphi(x)$$

Exemple 0.2.1 *1. toute fonction continue est semi-continue infieurement.*

2. une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est continue $\Longleftrightarrow$ si f et $(-f)$ sont semi-continue infieurement.

Définition 0.2.8 *Un hyperplan (affine) est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\} \qquad (H \text{ est fermé} \Leftrightarrow f \text{ bornée})$$

Théorème 0.2.2 *(Théoreme de Hahn Banach, forme géométrique) Soient A et B deux ensembles convexes non vides et disjoints d'un espace vectoriel normé réel X. Si A est ouvert,il existe une forme linéaire continue f sur X ($f \in X^*$).et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha \leq f(b)$. En particulier, A et B sont séparés par l'hypothèse affine fermé H.*

Définition 0.2.9 *(Théoreme de graphe férmé)*
Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire. Alors, T est continue si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé dans l'espace de Banach $X \times Y$.

Définition 0.2.10 *(Théoreme de Banach-Steinhauss) Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et $(T_n)_n$ une famille de suites dans $\mathcal{L}(X, Y)$. On suppose que X est complet et que, pour tout $x \in X$,*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\|_Y < \infty.$$

On a alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

0.3 La convergence faible

Définition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach. La suite $(x_n)_n$ de X est dite converge faiblement vers $x \in X$ si*

$$\forall f \in X^* : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$$

et on écrit $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite de X. On a*

a) Si $(x_n)_n$ converge vers x fortement, alors elle est convergente faiblement vers x, i.e.,

$$\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0 \right) \Longrightarrow \left(x_n \xrightarrow{w} x \right)$$

b) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée. De plus on a

$$\|x\| \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n\|.$$

c) d) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, et $f_n \longrightarrow f$ fortement $(\|f_n - f\|_{E^*} \longmapsto 0)$ dans E^*, alors $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$

On notera X et Y deux espaces de Banach. La norme sur X est usuellement notée $\|.\|_X$ ou simplement $\|.\|$, l'orsqu'un seul espace est en jeu. La boule unité fermée de X sera notée B_X. On désigne par X^* le dual topologique de X : l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale $\|f\|_{X^*} = \sup_{x\in X} |f(x)|$. On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y.

On dira que deux espaces de Banach X, Y sont isomorphes $(X \sim Y)$ si il existe un opérateur invertible I (dit isomorphisme) de X dans Y. Un opérateur linéaire continu $T : X \longrightarrow Y$ tel que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour quelques $c > 0$ et tout $x \in X$ est dit isomorphisme.

Une isométrie est un opérateur linéaire continu $I : X \longrightarrow Y$ telle que $\|I(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Deux espaces de Banach X, Y sont isométriques $(X \simeq Y)$ s'il existe une isométrie entre X et Y.

Chapitre 1

Espaces de suites de Banach

1.1 Espaces de suites faiblement p-sommable

Définition 1.1.1 *(L'espace des suites faiblement p-sommables) Une suite* (x_n) *(resp.*$(x_i)_{1\leq i\leq n}$*) dans* X *est faiblement p-sommables si la suite scalaire* $(x^*(x_n))$ *(resp.*$(x^*(x_i)_{1\leq i\leq n}$*) est dans* ℓ_p *pour tout* $x^* \in X^*$*. On note* $\ell_p^w(X)$*(resp.*$\ell_p^{n\ w}(X)$*) l'espace des suites* (x_i) *(resp.*$(x_i)_{1\leq i\leq n}$*) dans* X *faiblement p-sommables telle que*

$$\ell_p^w(X) := \{(x_n)_n \subset X : (\langle x^*, x_n\rangle)_n \in \ell_p, x^* \in X^*\}.$$

Pour tout $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$*, on pose*

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \|(x_n)_n\|_{\ell_p^w(X)} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*; x_n\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \quad si \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|(x_n)_n\|_{\ell_\infty^w(X)} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sup_n |\langle x^*; x_n\rangle| \quad si \quad p = \infty$$

Théorème 1.1.1 *L'expression*

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*; x_n\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}$$

est finie. De plus, $\|\cdot\|_{p,w}$ *définit une norme sur* $\ell_p^w(X)$*.*

Preuve. Soit $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, on peut associeé à x l'opérateur

$$T : X^* \longrightarrow \ell_p$$

défini par

$$T(x^*) = (x^*(x_n))_n.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*; x_n\rangle|^p < \infty$ pour tout $x^* \in X^* \Longrightarrow (x^*(x_n))_n \in \ell_p$ pour tout $x^* \in X^*$ et donc T est bien défini et linéaire. Comme X^* et ℓ_p sont des espaces de Banach, nous pouvons utiliser le théorème du graphe fermé pour montrer sa continuité. Il s'agit de montrer que si $\begin{cases} x_k^* \to_k x^* \\ T(x_k^*) \to_k \eta = (\eta_n)_n \text{ dans } \ell_p, \end{cases}$ alors $T(x^*) = \eta$.

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$|x_k^*(x_n) - \eta_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_k^*(x_i) - \eta_i|^p \to_k 0,$$

donc $x_k^*(x_n) \to_k \eta_n$ pour tout $n \geq 1$.

D'autre part

$$|x_k^*(x_n) - x^*(x_n)| \leq \|x_n\| \, \|x_k^* - x^*\|_{X^*} \to_k 0.$$

(i.e, $(x_k^*)_k$ converge vers $x^* \in X^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(x_k^*(x_n))_k$ est converge vers $x^*(x_n)$).

Il en resulte que $x^*(x_n) = \eta_n$ pour tout $n \geq 1$. D'où $T(x^*) = (x^*(x_n))_n = (\eta_n)_n = \eta$. Par conséquent T est de graphe fermé et donc borné, en d'autre terme

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup \left\{ (\sum_{n \in \mathbb{N}} |x^*(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} : x^* \in B_{X^*} \right\} = \|T\| < \infty$$

qui est ce qui nous voulions. On peut conclure facilement que $\|\cdot\|_{p,w}$ est une norme sur $\ell_p^w(X)$. ■

Exemple 1.1.1 *Soit* $(e_n)_n$ *est la base canonique de* ℓ_{p^*}, *alors* $(e_n)_n \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$ *et* $\|(e_n)_n\|_{p,w} = 1$.

Nous considérons les relations entre les espaces de suites.

Théorème 1.1.2 *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *Alors*

i) $\ell_\infty^w(X) = \ell_\infty(X)$,

ii) $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$.

iii) $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ *pour tout* $1 \leq p < \infty$ *si et seulement si* $\dim(X)$ *est finie.*

Démonstration. iii) Puisque $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$, il suffit de montrer que $\ell_p^w(X) \subset \ell_p(X)$. On suppose que $\dim X = m$, alors X est isomorphe à $\mathbb{K}^m$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$. Soit $(x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$ et π_i désigne la i-ème projection de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_n\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_{\mathbb{K}^m}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m} \left|x_n^j\right|^p\right)^{\frac{p}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m} \left|\pi_j\left(x_n\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\pi_j\left(x_n\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{m}\sup_{\|\varphi\|\leq 1}\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\varphi\left(x_n\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= m^{\frac{1}{q}} \|(x_n)_n\|_{p,w}.
\end{aligned}$$

Théorème 1.1.3 *$(\ell_p^w(X), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. *$\ell_p^w(X)$ est complet. Si $p = \infty$ on a $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X)$, il est donc que $\ell_\infty^w(X)$ est un Banach. Pour $1 \leq p < \infty$. Ici, nous utilisons un raisonnement direct; un peu plus tard (voir Proposition 1.3), nous allons indique une façon différante). Soit $(x^k)_k$ où $x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p^w(X)$, une suite de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq: $\forall k, k' \geq N$ on a :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left\langle x^*, x_n^k\right\rangle - \left\langle x^*, x_n^{k'}\right\rangle\right|^p \leq \epsilon^p, \forall x^* \in B_{X^*}. \tag{1.1.1}$$

Pour tout $x^* \in B_{X^*}$.chaque terme de cette série est dominée par ϵ^p,donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|x_n^k - x_n^{k'}\right\| = \sup\left\{\left|\left\langle x_n^k, x^*\right\rangle - \left\langle x_n^{k'}, x^*\right\rangle\right| : x^* \in B_{X^*}\right\} \leq \epsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X, comme X est complet , elle est donc convergente vers une limite x_n ,ça nous permet d'associer à chaque composante une limite, donc la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$converge vers une limite qui est $x = (x_n)_n$. Il reste de vérifier que $x \in \ell_p^w(X)$.D'après (1.1.1) et soit k'tend vers l'infinie. Alors, quand $k' \geq N$ on a

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left\langle x^*, x_n - x_n^k\right\rangle\right|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \forall x^* \in B_{X^*}$$

donc $x - x^k$ et x appartient a $\ell_p^w(X)$. ■

■

Lemme 1.1.1 *Soient* $(x_n)_n \in \ell_p^w(X)$ *et* $(\alpha_n)_n \in \ell_{p^*}(\mathbb{K})$. *Alors, la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ *est convergente dans* X.

Preuve. Pour $k \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de Hahn-Banach et l'inégalité de Hölderon a

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{n=m+1}^{k} \alpha_n x_n \right\|_X \\ &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left| \sum_{n=m+1}^{k} \alpha_n \psi(x_n) \right| \\ &\leq \left(\sum_{n=m+1}^{k} |\alpha_n|^{p^*} \right)^{\frac{1}{q^*}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=m+1}^{k} (|x^*(x_n)|)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Maintenant en prenant la limite lorsque $k, m \to \infty$, on obtient que $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_n x_n)_n$ est une suite de Cauchy sequence dans X, qui est un espace Banach. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_n$ est convergente dans X. ■

Proposition 1.1.1 *(TD) Soientt* X *un espace de Banach et* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors*

1) $\ell_p^w(X) = \mathcal{L}(\ell_{p^*}, X)$ *isomorphisme isometrique pour* $1 < p \leq +\infty$.

2) $\ell_1^w(X) = \mathcal{L}(c_{0,} X)$ *isomorphisme isometrique pour* $p = 1$.

Proposition 1.1.2 *On a*

$$\|(y_n^*)_n\|_{p,w} = \sup_{y \in B_Y} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y(y_n^*)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } (y_n^*)_n \in \ell_p^w(Y^*)$$

1.2 Les énoncés d'exercices

Exercice 1

Soit X un espace de Banach réel et $1 \leq p \leq \infty$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\psi(x_n)|^p < +\infty$ pour toute $\psi \in X^*$ (i.e., $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p^w(X)$).

a- En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer que l'aplication linéaire

$$\begin{array}{rccl} T : & X^* & \longrightarrow & \ell_p \\ & \psi & \longmapsto & (\psi(x_n))_n \end{array}$$

est continue.

b- En déduire que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p,w} = \sup\limits_{\psi\in B_{X^*}} (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\psi(x_n)| < +\infty$.

Exercice 2

i) Soit X un espace de Banach réel et $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que

a- $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$.

b- $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X)$ et $\|(x_n)_n\|_\infty = \|(x_n)_n\|_{\infty,w}$.

ii) Soit $X = c_0$ l'espace des suites réelles qui convergente vers 0. Cet espace est muni de sa norme usuelle $\|.\|_\infty$. On considère les suites $(e_n)_n$ où $e_n = (0, ...0, \underbrace{1}_{n-ième}, ..., 0, ...)$. Montrer que

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_\infty = 1$ et $e_n \in c_0$.

b) $(e_n)_n \notin \ell_1(c_0)$.

c) $(e_n)_n \in \ell_1^w(c_0)$.

iii) En déduire que l''inclusion (2.a) est stricte.

Exercice 3

Soit $1 < p < \infty$. On considère l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} T & : \mathcal{L}(\ell_{p^*}, X) & \longrightarrow & \ell_p^w(X) \\ & u & \longmapsto & (u(e_n))_n \end{array}$$

où $(e_n)_n$ est la base canonique de ℓ_{p^*}. Montrer que

a) $(e_n)_n \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$ et $\|(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p,w} = 1$.

b) T est linéaire et bien défini.

c) la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u(e_n)$ est convergente pour tout $(\alpha_n)_n \in \ell_{p^*}(\mathbb{K})$.

d) $\|T(u)\| = \|u\|$.

e) T est surjective

f) En déduire que $\mathcal{L}(\ell_{p^*}, X)$ et $\ell_{p,w}(X)$ sont isomorphe isométrique et $(\ell_p^w(X), \|\cdot\|_{p,w})$ est un espace de Banach.

Exercice 4

Soit $(x_n^*)_n \in \ell_p^w(X^*)$. Montrer que

$$\|(x_n^*)_n\|_{p,w} = \sup_{x \in B_X} (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n^*, x\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 5

1) Soient X un espace de Banach et $1 < p < \infty$. On définit les opérateurs $I_k : X \longrightarrow \ell_p^w(X)$ par

$$I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

où x est dans la k-ème position. Montrer que I_k est bien défini, linéaire et continu et $\|I_k(x)\|_{p,w} = \|x\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. On peut associeé à T l'opérateurs linéire

$$\begin{array}{rccl} \widehat{T}^{p,w} & : \ell_p^w(X) & \longrightarrow & \ell_p^w(Y) \\ & (x_n)_n & \longmapsto & \widehat{T}^{p,w}((x_n)_n) = (T(x_n))_n \end{array}$$

Montrer que $\widehat{T}^{p,w}$ est continu et $\left\|\widehat{T}^{p,w}\right\| = \|T\|$.

Bibliographie

[1] J. Cohen, Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973) 177-200.

[2] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely Summing Operators.Cambridage University press, Cambridage(1995)

[3] A. Grothendieck, Sur certaines classes des suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Bol.Soc.Mat.S˜ao Paulo.8(1956) 81-110., C. R. Math. Acad. Sci. Paris 233 (1951) 1556-1558.

[4] M.C. Matos, Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations (2005).

[5] A. Pietsch, Operator ideals. Deutsch. Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.