Table des matières

0.1 Introduction

Cours polycopié pour le module Espaces de suites et leurs opérateurs.

Dahmane Achour. E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz

Le présent polycopié reprend un cours de deuxième année Master "Analyse Fonctionnelle" donné à l'Université de Mohamed Boudiaf-M'sila pendant les années 2018-2020. Ce cours vise à fournir aux étudiants les propriétés essentielles concernant les espaces de suites de Banach $\ell_p(X)$, $\ell_p^w(X)$, $\ell_p \langle X \rangle$ et les idéaux d'opérateurs (au sens de Pietsch). Comme tout cours de Mathématique, il doit être lu avec un stylo et une feuille de papier blanche à la main pour vérifier pas à pas que toutes les assertions sont correctes. Chaque chapitre de ce cours se termine par des exercices non corrigés.

Objectifs. Le but de ce cours est de fournir les outils nécessaires et largement utilisées dans la théorie des idéaux d'opérateurs. Il a aussi pour objectif fondamental de guider l'étudiant dans la résolution des problèmes parfois difficiles.

0.2 Espace de Banach

Définition 0.2.1 *(Suite de cauchy)*
Soit (X, d) un espace métrique. On appelle suite de cauchy dans X une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geq n_0 : \ d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

Définition 0.2.2 *(Espace complet)*
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est complet si toute suite de cauchy converge dans X.

Définition 0.2.3 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une fonction $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ est dite norme si pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \,,$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Autrement dit, toute norme est positivement homogène, c'est-à-dire vérifie (2) et satisfait l'inégalité triangulaire (3). Un espace vectoriel muni d'une norme est dit normé.

Définition 0.2.4 *(Espace de Banach)*
On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.

Définition 0.2.5 *Soient X un espace normé et $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est dite absolument convergente dans X si la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ est convergente.*

Théorème 0.2.1 *Un espace normé X est de Banach si et seulement si toute série de X absolument convergente est convergente.*

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y

Proposition 0.2.1 $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ *est un espace vectoriel normé pour la norme*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq y} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Définition 0.2.6 *(Convexité) Soit X un espace vectoriel et A une partie de X.*

1) On dit que A est convexe si

$$\forall x, y \in A \ \text{ et } \forall \lambda \in]0,1[: \lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

2) Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit convexe si son épigraphe est convexe.

De façon équivalente, on dira que φ est convexe si $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in]0,1[\ \varphi(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$.

Définition 0.2.7 *(Semi-continue inferieure) Soit X un espace topologique. Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit semi-continue infieurement si l'une des trois propriétés sont vérifiée:*

i) *L'épigraphe epi$(\varphi) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$*

ii) *L'ensemble $\{x \in X, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans X pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

iii) *Pour tout $x \in X$, tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x, on a:*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k \geq n} \varphi(x_k)) \geq \varphi(x)$$

Exemple 0.2.1 *1. toute fonction continue est semi-continue infieurement.*

2. une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est continue $\Longleftrightarrow$ si f et $(-f)$ sont semi-continue infieurement.

Définition 0.2.8 *Un hyperplan (affine) est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\} \qquad (H \text{ est fermé} \Leftrightarrow f \text{ bornée})$$

Théorème 0.2.2 *(Théoreme de Hahn Banach, forme géométrique) Soient A et B deux ensembles convexes non vides et disjoints d'un espace vectoriel normé réel X. Si A est ouvert,il existe une forme linéaire continue f sur X $(f \in X^*)$.et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha \leq f(b)$. En particulier, A et B sont séparés par l'hypothèse affine fermé H.*

Définition 0.2.9 *(Théoreme de graphe férmé)*
Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire. Alors, T est continue si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé dans l'espace de Banach $X \times Y$.

Définition 0.2.10 *(Théoreme de Banach-Steinhauss) Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et $(T_n)_n$ une famille de suites dans $\mathcal{L}(X, Y)$. On suppose que X est complet et que, pour tout $x \in X$,*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\|_Y < \infty.$$

On a alors

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

0.3 La convergence faible

Définition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach. La suite $(x_n)_n$ de X est dite converge faiblement vers $x \in X$ si*

$$\forall f \in X^* : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$$

et on écrit $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite de X. On a*

a) Si $(x_n)_n$ converge vers x fortement, alors elle est convergente faiblement vers x, i.e.,

$$\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0 \right) \Longrightarrow \left(x_n \xrightarrow{w} x \right)$$

b) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée. De plus on a

$$\|x\| \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n\| .$$

c) d) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, et $f_n \longrightarrow f$ fortement $(\|f_n - f\|_{E^*} \longmapsto 0)$ dans E^*, alors $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$

On notera X et Y deux espaces de Banach. La norme sur X est usuellement notée $\|.\|_X$ ou simplement $\|.\|$, l'orsqu'un seul espace est en jeu. La boule unité fermée de X sera notée B_X. On désigne par X^* le dual topologique de X : l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale $\|f\|_{X^*} = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. On note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y.

On dira que deux espaces de Banach X, Y sont isomorphes $(X \sim Y)$ si il existe un opérateur invertible I (dit isomorphisme) de X dans Y. Un opérateur linéaire continu $T : X \longrightarrow Y$ tel que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour quelques $c > 0$ et tout $x \in X$ est dit isomorphisme.

Une isométrie est un opérateur linéaire continu $I : X \longrightarrow Y$ telle que $\|I(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Deux espaces de Banach X, Y sont isométriques $(X \simeq Y)$ s'il existe une isométrie entre X et Y.

Chapitre 1

Espaces de suites de Banach

1.1 Espaces de suites fortement p-sommables

Définition 1.1.1 *Soit $1 < p \leq \infty$. On dit que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ est une suite Cohen fortement p-sommables si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^* (x_n)$ est convergente pour tout $(x_n^*)_{n \geq 1} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$. L'espace des suites Cohen fortement p-sommables sera noté $\ell_p \langle X \rangle$.*

Théorème 1.1.1 *L'espace $\ell_p \langle X \rangle$ est un espace normé et la norme est donnée par*

$$\left\| (x_n)_{n \geq 1} \right\|_{\langle p \rangle} = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^* (x_n) \right| : \| (x_n^*)_{n \geq 1} \|_{p^*,\omega} \leq 1 \right\}. \qquad \text{(norme-coh)}$$

Preuve. Soit $(x_n)_{n \geq 1} \in \ell_p \langle X \rangle$. Montrons que $\| \cdot \|_{\langle p \rangle}$ est fini.
On peut considérer la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ comme une forme lineaire $f \in [\ell_{p^*,\omega}(X^*)]^*$ définit par

$$f : \ell_{p^*,\omega}(X^*) \to \mathbb{K}; f \left((x_n^*)_{n=1}^{\infty} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^* (x_n)$$

On définit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des formes lineaire dans $\ell_{p^*}^w(X^*)$ par

$$f_n((x_n^*)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* (x_i) .$$

Il est facile de remarquer que toutes les f_n sont continues, et par définition de f_n et f, on a f_n converge vers f pour tout les points de $\ell_{p^*}^w(X^*)$, et comme $\ell_{p^*}^w(X^*)$ est complet; on applique le théorème de Banach Steinhaus, on obtient: f est continue et $\| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_{\langle p \rangle} = \sup\limits_{\|(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^* (x_n) \right| = \| f \| < \infty$. ■

Proposition 1.1.1 *Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n)$ est convergete pour tout $(x_n^*)_{n\geq 1} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$ si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)|$ est convergete aussi pour tout $(x_n^*)_{n\geq 1} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$.*

Dans ce cas

$$\left\|(x_n)_{n\geq 1}\right\|_{\langle p\rangle} = \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)| : \|(x_n^*)_{n\geq 1}\|_{p^*,w} \leq 1\right\}$$

Preuve. La première inégalité ($\leq$) dans (**??**) est évidente. Pour l'inégalité inverse,pour tout $(x_n^*)_n \in B_{\ell_{p^*}^w(^*)}$, on peut choisir une suite scalaire $(\lambda_n)_n$, avec $|\lambda_n| = 1$, por tout n tel que

$$x_n^*(x_n) = \lambda_n x_n^*(x_n) = |\psi_n(x_n)|\,.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x_n)$$

et puisque $\|(x_n^*)_n\|_{p^*,\omega} = \|(\psi_n)_n\|_{p^*,\omega}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\sup_{\left\|(\varphi_n)_n\right\|_{p^*,q^*}^{w}\leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)| &= \sup_{\left\|(\psi_n)_n\right\|_{p^*,q^*}^{w}\leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x_n) \\ &\leq \sup_{\left\|(\psi_n)_n\right\|_{p^*,q^*}^{w}\leq 1} \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x_n)\right|.\end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.2 $(\ell_p\langle X\rangle, \|\cdot\|_{\langle p\rangle})$ *est un espace de Banach.*

Preuve. D'après le Théorème **??** $\|\cdot\|_{\langle p\rangle}$ est une norme. Donc, il suffit de montrer que $\ell_p\langle X\rangle$ est un sous-espace vectoriel complet.
Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy dans $\ell_p\langle X\rangle$ telle que $x_n = (x_{n,i})_{i=1}^{\infty}$:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0 : \| x_n - x_m \|_{\langle p\rangle} < \varepsilon$$

d'après la Proposition **??** on a

$$\| x_n - x_m \|_p \leq \| x_n - x_m \|_{\langle p\rangle} < \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $l_p(X)$. On pose

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x, \text{ et } x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$$

on a

$$\| x_n - x_m \|_{\langle p\rangle} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^{\infty}\in B_{l_{p^*,w}(X)}} \left|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i} - x_{m,i})\right| < \varepsilon$$

pour $m \longrightarrow \infty$, cela donne

$$\sup_{(x_i^*)_{i=1}^{\infty}\in B_{\ell_{p^*,\omega}(X)}} \left|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i} - x_i)\right| < \varepsilon$$

Ce qui implique que $\| x_n - x \|_{\langle p\rangle} < \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}
&\| x \|_{\langle p\rangle} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i)\right| : \| (x_i^*)_{i=1}^{\infty} \|_{p^*,\omega} \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i - x_{n,i}) + x_i^*(x_{i,n})\right| : \| (x_i^*)_{i=1}^{\infty} \|_{p^*,\omega} \leq 1\right\} \\
&\leq \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*,\omega}\leq 1} \left|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i - x_{n,i})\right| + \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*,\omega}\leq 1} \left|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i})\right| \\
&< \varepsilon + \| x_n \|_{\langle p\rangle}
\end{aligned}$$

donc, $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p\langle X\rangle$, alors, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x$ dans $\ell_p\langle X\rangle$, d'où $\ell_p\langle X\rangle$ est complet. ■

1.2 Les énoncés d'exercices

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On sait que:

1) $(c_0)^* = \ell_1$ isomorphisme isometrique. De plus on a

$$\|(x_n)_n\|_1 = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right| : (\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_n)_n\|_\infty \leq 1\right\}. \tag{1.2.1}$$

2) $(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$ isomorphisme isometrique pour $p \geq 1$. De plus on a

$$\|(x_n)_n\|_p = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right| : (\alpha_i)_i \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_n)_n\|_{p^*} \leq 1\right\}. \tag{1.2.2}$$

Exercice 1. *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$, *Montrer que*

1) $\ell_p \langle X \rangle \subset \ell_p\ (X) \subset \ell_p^w (X)$ *et*

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,\omega} \leq \| \ \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq \| \ \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle p \rangle},$$

pour tout $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \langle X \rangle$ et $1 < p \leq +\infty$.

2) $\ell_1 \langle X \rangle = \ell_1\ (X)$ et

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle 1 \rangle}$$

Démonstration. 1) On a: $\ell_p\ (X) \subset \ell_p^w (X)$ et $\|(x_n)_n\|_{p,\omega} \leq \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p$ *pour tout* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$.

D'autre part, soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \langle X \rangle$, d'après (**??**) et comme $B_{\ell_{p^*}\ (X)} \subset B_{\ell_{p^*,\omega}\ (X)}$ on a

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}(X)}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &\leq \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*,\omega}(X)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle p \rangle} \end{aligned}$$

alors, $\ell_p \langle X \rangle \subset \ell_p\ (X)$ et $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle p \rangle}$

2) Pour $p = 1, p^* = \infty$, soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1 \langle X \rangle$, d'après (**??**) on a

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \\ &= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\infty}(X)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\infty,\omega}(X)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle 1 \rangle} \end{aligned}$$

Exercice 2

1) Soient X un espace de Banach et $1 < p < \infty$. On définit les opérateurs $I_k : X \longrightarrow \ell_p \langle X \rangle$ par

$$I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

où x est dans la k-ème position. Montrer que I_k est bien défini, linéaire et continu et $\|I_k(x)\|_{\langle p \rangle} = \|x\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On peut associeé à T l'opérateur linéire

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{T}^{\langle p \rangle} & : & \ell_p \langle X \rangle & \longrightarrow & \ell_p \langle Y \rangle \\ & & (x_n)_n & \longmapsto & \widehat{T}^p((x_n)_n) = (T(x_n))_n \end{array}$$

Montrer que $\widehat{T}^{\langle p \rangle}$ est continu et $\left\| \widehat{T}^{\langle p \rangle} \right\| = \|T\|$.

Bibliographie

[1] J. Cohen, Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973) 177-200.

[2] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely Summing Operators.Cambridage University press, Cambridage(1995)

[3] A. Grothendieck, Sur certaines classes des suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Bol.Soc.Mat.S˜ao Paulo.8(1956) 81-110., C. R. Math. Acad. Sci. Paris 233 (1951) 1556-1558.

[4] M.C. Matos, Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations (2005).

[5] A. Pietsch, Operator ideals. Deutsch. Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.