Table des matières

Préliminaires **1**

0.1 Introduction 1

0.2 Espace de Banach 2

0.3 La convergence faible 4

1 Espaces de suites de Banach **6**

1.1 Le dual de $\ell_p(X)$ 6

1.2 Les énoncés d'exercices 11

0.1 Introduction

Cours polycopié pour le module Espaces de suites et leurs opérateurs.
Dahmane Achour. E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz

Le présent polycopié reprend un cours de deuxième année Master "Analyse Fonctionnelle" donné à l'Université de Mohamed Boudiaf-M'sila pendant les années 2018-2020. Ce cours vise à fournir aux étudiants les propriétés essentielles concernant les espaces de suites de Banach $\ell_p(X)$, $\ell_p^w(X)$, $\ell_p \langle X \rangle$ et les idéaux d'opérateurs (au sens de Pietsch). Comme tout cours de Mathématique, il doit être lu avec un stylo et une feuille de papier blanche à la main pour vérifier pas à pas que toutes les assertions sont correctes. Chaque chapitre de ce cours se termine par des exercices non corrigés.

Objectifs. Le but de ce cours est de fournir les outils nécessaires et largement utilisées dans la théorie des idéaux d'opérateurs. Il a aussi pour objectif fondamental de guider l'étudiant dans la résolution des problèmes parfois difficiles.

0.2 Espace de Banach

Définition 0.2.1 *(Suite de cauchy)*
Soit (X, d) un espace métrique. On appelle suite de cauchy dans X une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geq n_0 : \ d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

Définition 0.2.2 *(Espace complet)*
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est complet si toute suite de cauchy converge dans X.

Définition 0.2.3 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une fonction $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ est dite norme si pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \,,$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Autrement dit, toute norme est positivement homogène, c'est-à-dire vérifie (2) et satisfait l'inégalité triangulaire (3). Un espace vectoriel muni d'une norme est dit normé.

Définition 0.2.4 *(Espace de Banach)*
On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.

Définition 0.2.5 *Soient X un espace normé et $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est dite absolument convergente dans X si la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ est convergente.*

Théorème 0.2.1 *Un espace normé X est de Banach si et seulement si toute série de X absolument convergente est convergente.*

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y

Proposition 0.2.1 *$(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ est un espace vectoriel normé pour la norme*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq y} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Définition 0.2.6 *(Convexité) Soit X un espace vectoriel et A une partie de X.*

1) On dit que A est convexe si

$$\forall x, y \in A \text{ et } \forall \lambda \in]0,1[: \lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

2) Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit convexe si son épigraphe est convexe.

De façon équivalente, on dira que φ est convexe si $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in]0,1[\ \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$.

Définition 0.2.7 *(Semi-continue inferieure) Soit X un espace topologique. Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit semi-continue infieurement si l'une des trois propriétés sont vérifiée:*

i) *L'épigraphe epi$(\varphi) = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R}, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$*

ii) *L'ensemble $\{x \in X, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans X pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

iii) *Pour tout $x \in X$, tout suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers x, on a:*

$$\lim_{n \to \infty} \inf \varphi(x_n) = \lim_{n \to \infty} (\inf_{k \geq n} \varphi(x_k)) \geq \varphi(x)$$

Exemple 0.2.1 *1. toute fonction continue est semi-continue infieurement.*

2. une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est continue $\Longleftrightarrow$ si f et $(-f)$ sont semi-continue infieurement.

Définition 0.2.8 *Un hyperplan (affine) est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\} \qquad (H \text{ est fermé} \Leftrightarrow f \text{ bornée})$$

Théorème 0.2.2 *(Théoreme de Hahn Banach, forme géométrique) Soient A et B deux ensembles convexes non vides et disjoints d'un espace vectoriel normé réel X. Si A est ouvert,il existe une forme linéaire continue f sur X $(f \in X^*)$.et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha \leq f(b)$. En particulier, A et B sont séparés par l'hypothèse affine fermé H.*

Définition 0.2.9 *(Théoreme de graphe férmé)*
Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire. Alors, T est continue si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé dans l'espace de Banach $X \times Y$.

Définition 0.2.10 *(Théoreme de Banach-Steinhauss) Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et $(T_n)_n$ une famille de suites dans $\mathcal{L}(X, Y)$. On suppose que X est complet et que, pour tout $x \in X$,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\|_Y < \infty.$$

On a alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

0.3 La convergence faible

Définition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach. La suite $(x_n)_n$ de X est dite converge faiblement vers $x \in X$ si*

$$\forall f \in X^* : \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = f(x)$$

et on écrit $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite de X. On a*

a) Si $(x_n)_n$ converge vers x fortement, alors elle est convergente faiblement vers x, i.e.,

$$\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n - x\| = 0\right) \Longrightarrow \left(x_n \xrightarrow{w} x\right)$$

b) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée. De plus on a

$$\|x\| \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\|.$$

c) d) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, et $f_n \longrightarrow f$ fortement $(\|f_n - f\|_{E^*} \longmapsto 0)$ dans E^*, alors $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$

On notera X et Y deux espaces de Banach. La norme sur X est usuellement notée $\|.\|_X$ ou simplement $\|.\|$, l'orsqu'un seul espace est en jeu. La boule unité fermée de X sera notée B_X. On désigne par X^* le dual topologique de X : l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale $\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in X} |f(x)|$. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y.

On dira que deux espaces de Banach X, Y sont isomorphes $(X \sim Y)$ si il existe un opérateur invertible I (dit isomorphisme) de X dans Y. Un opérateur linéaire continu $T : X \longrightarrow Y$ tel que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour quelques $c > 0$ et tout $x \in X$ est dit isomorphisme.

Une isométrie est un opérateur linéaire continu $I : X \longrightarrow Y$ telle que $\|I(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Deux espaces de Banach X, Y sont isométriques $(X \simeq Y)$ s'il existe une isométrie entre X et Y.

Chapitre 1

Espaces de suites de Banach

1.1 Le dual de $\ell_p(X)$

Si $x^* = (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}(X^*)$ où p^* est l'exposant conjugué de p, alors la formule

$$\psi_{x^*}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n), x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X) \tag{1.1.1}$$

définit une forme $\psi_{x^*} \in [\ell_p(X)]^*$.

En effet, en appliquant l'inégalité de Hôlder, on obtient que $\psi_{x^*}(x)$ est bien défini et

$$|\psi_{x^*}(x)| \leq \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \|(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\|_{p^*}.$$

Par conséquent,

$$\psi_{x^*} \in [\ell_p(X)]^* \, et \, \|\psi_{x^*}\| \leq \|x^*\|_{p^*} \text{ pour tout } x^* \in \ell_{p^*}(X^*).$$

Ainsi, l'application linéaire $J : \ell_{p^*}(X^*) \to [\ell_p(X)]^*$ définie par $J(x^*) = \psi_{x^*}$ est continue, de norme ≤ 1. Comme $c_0(X)$ est un sous-espace de $\ell_\infty(X)$, les mêmes formules définissent aussi une application linéaire continue $J : \ell_1(X^*) \to [c_0(X)]^*$ de norme ≤ 1.

Théorème 1.1.1 *Soit $1 < p < +\infty$. Alors $(\ell_p(X))^*$ est isomorphisme isometrique à $\ell_{p^*}(X^*)$, où une suite $x^* = (x_n^*)_n$ dans $\ell_{p^*}(X^*)$ est identifiée à la fonctionnelle linéaire f donnée par*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \textit{ pour tout } x = (x_n)_n \in \ell_p(X). \tag{1.1.2}$$

Preuve. On considère l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rccl} J: & \ell_{p^*}(X^*) & \longrightarrow & (\ell_p(X))^* \\ & (x_n^*)_n & \longmapsto & J((x_n^*)_n) = f, \end{array}$$

telle que f est la fonctionnelle linéaire comme dans (**??**). De plus, pour $(x_j)_j \in \ell_p(X)$ et par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{array}{rcl} |f((x_j)_j)| & = & \left|\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_j)\right| \\ & \leq & \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left\|x_j^*\right\| \|x_j\| \\ & \leq & \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left\|x_j^*\right\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ & = & \left\|(x_j^*)_j\right\|_{p^*} \|(x_j)_j\|_p . \end{array}$$

Ainsi, f est bien défini, continue et $\|f\| \leq \left\|(x_j^*)_j\right\|_{p^*}$. Par conséquent, J est bien définit, continu et $\|J\| \leq 1$. D'autre part, nous définissons l'application linéaire I par

$$I : (\ell_p(X))^* \longrightarrow \ell_{p^*}(X^*),\ I(T) = (T \circ I_k)_k\,,$$

où I_k est l'opérateur linéaire de X dans $\ell_p(X)$ donné par $I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \cdots)$, où x est la k-ème position dans la suite $I_k(x)$. L'application I_k est bien définie, linéaire et continue, avec $\|I_k(x)\|_p = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Il est claire que $T \circ I_k = x_k^* \in X^*$, pour tout $T \in (\ell_p(X))^*$. On montre que $(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}(X^*)$, donc (d'après (**??**)) il suffit de montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k\right| < \infty \text{ pour tout } (\alpha_k)_k \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_k)_k\|_p \leq 1.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $x_k \in X, \|x_k\| \leq 1$, telle que ($\|T \circ I_k\| = \sup_{x_k \in B_X} |T \circ I_k(x_k)|$)

$$\|T \circ I_k\| \;\leq\; |T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}}\ .$$

Soit $(\beta_k)_k \subset \mathbb{K}$ avec $|\beta_k| = 1$ et $|T \circ I_k(x_k)| = T \circ I_k(x_k)\beta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour chaque $(\alpha_k)_k \in B_{\ell_p}$, et par l'inégalité de Hölder on obtien

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(|T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}} \right) |\alpha_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)| \, |\alpha_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}} |\alpha_k| \\
&\qquad (\text{car } \sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\alpha_k = T((\alpha_n x_n)_n) \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}} |\alpha_k| < \infty) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)| \, |\alpha_k| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{p^*}}{2^k} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\alpha_k\beta_k \right| + \varepsilon \|(\alpha_k)_k\|_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\alpha_k\beta_k \right| &= |T((\alpha_k\beta_k x_k)_k)| \\
&\leq \|T\| \, \|(\alpha_k\beta_k x_k)_k\|_p \\
&\leq \|T\| \, \|(\alpha_k)_k\|_p ,
\end{aligned}$$

nous pouvons conclure que

$$(*) \leq (\|T\| + \varepsilon) \|(\alpha_k)_k\|_p .$$

Donc

$$\|(\|T \circ I_k\|)_k\|_{p^*} = \sup_{\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\| \in B_{\ell_p}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k \right| \leq \|T\| + \varepsilon < \infty.$$

Ce qui implique que $(\|T \circ I_k\|)_k \in \ell_{p^*}$. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous avons $(T \circ I_k)_k \in \ell_{p^*}(X^*)$, avec $\|(T \circ I_k)_k\|_{p^*} \leq \|T\|$ pour tout $T \in (\ell_p(X))^*$. Donc, I est bien définit, continue et $\|I\| \leq 1$.

En fin puisque $I \circ J = id_{\ell_{p^*}(X^*)}$ et $J \circ I = id_{(\ell_p(X))^*}$. Par conséquent, $\ell_{p^*}(X^*)$ et $(\ell_p(X))^*$ sont isomorphes isométriquement. ■

Théorème 1.1.2 *On a l'identification isomorphisme isometrique*

$$(c_0(X))^* = \ell_1(X^*).$$

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'opérateur linéaire

$$I_k : X \longrightarrow c_0\left(X\right),\ I_k\left(x\right) = \left(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots\right),$$

où x est dans la k-ème position. Il est clair que cet opérateur est linéaire borné et

$$\left\|I_k\left(x\right)\right\|_\infty = \left\|x\right\|,\ \text{pour tout } x \in X.$$

Soit l'opérateur linéaire

$$I : \left(c_0\left(X\right)\right)^* \longrightarrow \ell_1(X^*),\ I(T) = \left(T \circ I_k\right)_k.$$

Montrons que I est bien défini c'est-à-dire montrons que

$$\left(T \circ I_k\right)_k \in \ell_1(X^*) \text{ pour tout } T \in \left(c_0\left(X\right)\right)^*,$$

donc (d'après (**??**)) il suffit de montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \left\|T \circ I_k\right\| \alpha_k\right| < \infty \text{ pour tout } \left(\alpha_k\right)_k \subset \mathbb{K}, \left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty \leq 1.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $T \circ I_k \in X^*$, de plus on a

$$\left\|T \circ I_k\right\| \leq \left\|T\right\| \left\|I_k\right\| = \left\|T\right\|.$$

D'où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_k \in B_X$, telle que

$$\left\|T \circ I_k\right\| \leq \left|T \circ I_k(x_k)\right| + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Pour chaque $\left(\alpha_k\right)_k \subset \mathbb{K}, \left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty \leq 1$, on peut écrit

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{\infty} \left\|T \circ I_k\right\| \alpha_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left|T \circ I_k(x_k)\right| \left|\alpha_k\right| + \tfrac{\varepsilon}{2^k} \left|\alpha_k\right|\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|T \circ I_k(x_k)\right| + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\varepsilon}{2^k} \left|\alpha_k\right| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left|T \circ I_k(x_k)\right| + \varepsilon \left\|\left(\alpha_k\right)_k\right\|_\infty \\
&= (*).
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\beta_k \in \mathbb{K}$, $\left|\beta_k\right| = 1$, telle que

$$\left|T \circ I_k(x_k)\right| = T \circ I_k(x_k)\beta_k.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}(*) &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} T\circ I_k(x_k)\beta_k\right| + \varepsilon\left\|(\alpha_k)_k\right\|_\infty \\ &\leq \|T\|\left\|\sum_{k=1}^{\infty} I_k(\beta_k x_k)\right\| + \varepsilon\left\|(\alpha_k)_k\right\|_\infty \\ &\leq \|T\|\left\|(\alpha_k)_k\right\|_\infty + \varepsilon\left\|(\alpha_k)_k\right\|_\infty .\end{aligned}$$

Ce qui conclut que

$$\left\|(\|T\circ I_k\|)_k\right\|_1 = \sup_{\left\|(\alpha_k)_k\right\|_\infty \leq 1}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\|T\circ I_k\|\,\alpha_k\right| \leq \|T\| + \varepsilon < \infty.$$

Cela montre que $(\|T\circ I_k\|)_k \in \ell_1$, et bien sûr $(T\circ I_k)_k \in \ell_1(X^*)$, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a

$$\|I(T)\| = \left\|(T\circ I_k)_k\right\|_1 \leq \|T\| \text{ pour tout } T\in (c_0(X))^* .$$

Alors I est continue avec une norme $\|I\| \leq 1$. D'autre part, on définit un opérateur linéaire

$$J : \ell_1(X^*) \longrightarrow (c_0(X))^* ,$$

tel que

$$J(x^*)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x_k),$$

pour tout $x^* = (x_k^*)_k \in \ell_1(X^*)$ et $x = (x_k)_k \in c_0(X)$. Avec ces notations on obtien

$$\begin{aligned}|J(x^*)(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x_k)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k^*\|\,\|x_k\| \\ &\leq \left\|(x_k)_k\right\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k^*\| \\ &= \|x^*\|_1\,\|x\|_\infty < \infty.\end{aligned}$$

Puisque $x\in c_0(X)$ est arbitraire on déduit que J est bien défini, continu et $\|J\| \leq 1$. D'autre part l'application I est une bejection et $I^{-1} = J$ car

$$I\circ J = id_{\ell_1(X^*)} \text{ et } J\circ I = id_{(c_0(X))^*}.$$

Ainsi, pour tout $x^*\in \ell_1(X^*)$ on a

$$\|x^*\|_1 = \|I\circ J(x^*)\|_1 \leq \|J(x^*)\| ,$$

d'où $\|J(x^*)\| = \|x^*\|_1$, alors J est une isométrie et par conséquent $I : (c_0(X))^* \longrightarrow \ell_1(X^*)$ est une isométrie. Par conséquent, $\ell_1(X^*)$ et $(c_0(X))^*$ sont isomorphes isométriquement. ■

1.2 Les énoncés d'exercices

Exercice 1. Montrer que $(\ell_1(X))^* = \ell_\infty(X^*)$ isomorphisme isometrique.

Démonstration. On définit les opérateurs $I_k : X \longrightarrow \ell_1(X)$ par

$$I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

où x est dans la k-ème position et $I : (\ell_1(X))^* \longrightarrow \ell_\infty(X^*)$ par $I(T) = (T \circ I_k)_{k=1}^\infty$. Cet opérateur est bien défini, linéaire et continu avec

$$\|I(T)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|T \circ I_k\| \leq \|T\|,$$

pour tout $T \in (\ell_1(X))^*$, ce qui entraine que $\|I\| \leq 1$. Maintenent on définit l'opérateur $J : \ell_\infty(X^*) \longrightarrow (\ell_1(X))^*$ par

$$J(x^*)(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j^*(x_j).$$

Où $x^* = \left(x_j^*\right)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(X^*)$ et $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1(X)$. J est linéaire, bien définie et continue, avec $\|J\| \leq 1$. Puisque $|J(x^*)(x)| \leq \|x^*\|_\infty \|x\|_1$.

D'autre part on a

$$I \circ J = id_{\ell_1(X^*)} \text{ et } J \circ I = id_{(c_0(X))^*}.$$

Ainsi, pour tout $x^* \in \ell_\infty(X^*)$ on a

$$\|x^*\|_\infty = \|I \circ J(x^*)\|_\infty \leq \|J(x^*)\| \leq \|x^*\|_\infty,$$

Donc J (et par conséquent I) est une isométrie. Par conséquent, $\ell_\infty(X^*)$ et $(\ell_1(X))^*$ sont isomorphes isométriquement.

Exercice 2. Soit $1 \leq p < \infty$, montrer que

$$\| (x_n)_n \|_p = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| : (x_n^*)_{n=1}^\infty \in X^*, \| (x_n^*)_{n=1}^\infty \|_{p^*} \leq 1 \right\}. \tag{1.2.1}$$

Exercice 2. Montrer que

$$\| (x_n)_n \|_{p,\omega} = \sup \left\{ \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \right\| : \| (\lambda_n)_{n=1}^\infty \|_{p^*} \leq 1 \right\},$$

pour tout $(x_n)_n \in \ell_p^w(X)$.

Bibliographie

[1] J. Cohen, Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973) 177-200.

[2] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely Summing Operators.Cambridage University press, Cambridage(1995)

[3] A. Grothendieck, Sur certaines classes des suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Bol.Soc.Mat.S˜ao Paulo.8(1956) 81-110., C. R. Math. Acad. Sci. Paris 233 (1951) 1556-1558.

[4] M.C. Matos, Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations (2005).

[5] A. Pietsch, Operator ideals. Deutsch. Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.