3- نوع توزيع المعاينة للمتوسط

سيتم هنا تناول طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط لما يكون المجتمع طبيعيا أو غير طبيعي.

3-1- نوع توزيع المعاينة للمتوسط عندما يكون للمجتمع توزيع طبيعي

إذا كان المجتمع الذي تتم منه المعاينة له توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 فإن متوسط العينة المسحوبة أيضا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري $\sigma^2_{\overline{X}}$ ، ونكتب:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

ومنه: $$z = \frac{(\overline{x} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

مثال 2:

يختار مراجع عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع من 1000 حساب مدين يفترض أنها تتوزع طبيعيا حيث متوسط قيمة الحساب المدين للمجتمع هي 26000 دج بانحراف معياري 4500 دج.

ما هو احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 28250 دج؟

الحل:

$\mu = 26000$, $\sigma = 4500$, $N = 1000$, $n = 16$

$P(\overline{X} < 28250) = ?$

$n = 16 :\quad n/N = 16/1000 = 0.016 < 0.05$ (نهمل معامل الإرجاع)

$\Rightarrow \sigma_m = \sigma/\sqrt{n} = 4500/\sqrt{16} = 1125$

$X \sim N(26000, 4500) \quad \Rightarrow \quad \overline{X} \sim N(4500, 1125)$

$$\mathcal{Z} = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{28250 - 26000}{1125} = 2$$

$$P(\overline{x} < 28250) = P(\mathcal{Z} < 2) = 0.5 + P(0 < \mathcal{Z} < 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

أي أن احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 28250 هو: 0.9772

2-3- نوع توزيع المعاينة لمتوسط العينة عندما يكون المجتمع له توزيع غير طبيعي

تصادفنا العديد من الحالات التي لا يمكننا فيها تحديد طبيعة توزيع المجتمع، الأمر الذي يحولنا عن تحديد توزيع المعاينة لمتوسط العينة، ومع ذلك فقد تمكن علماء الإحصاء من إثبات أن توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ هو التوزيع الطبيعي في حالة العينات ذات الأحجام الكبيرة أيا كان توزيع المجتمع، وهذه النتيجة الحاسمة تعرف باسم نظرية النهاية المركزية[1].

نظرية النهاية المركزية

إذا كان حجم العينة كبيرا ($n \geq 30$)، فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\overline{X}$ يقترب من التوزيع الطبيعي، بغض النظر عن شكل المجتمع الأصلي ذي المتوسط μ والانحراف المعياري σ، ولذلك يمكن حساب احتمال أن يكون $\overline{X}$ لعينة عشوائية من خلال القيمة الإحصائية لـ $\mathcal{Z}$ وفق العلاقة الشهيرة:

$$\overline{X} \approx N(\mu, \sigma_{\overline{X}}) \quad \text{ويكون:} \quad \mathcal{Z} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}}$$

مثال 3:

شركة مختصة في صناعة الحافلات وتقترح 70 كغ لوزن الراكب بانحراف معياري 10 كغ، إذا علمت أنها قامت بتصميم حافلة لنقل العمال حمولتها القصوى هي 2880 كغ وتتسع إلى 36 عاملا، فما هو احتمال أن تحمل هذه الحافلة أكبر من حمولتها؟

الحل:

نلاحظ أن: $\overline{X} = \frac{2400}{36} = 80$

المطلوب حساب: $P(\overline{x} > 80) = ?$

$\mu = 70, \sigma = 10, X \sim ?, n = 36.$

توزيع المجتمع مجهول لكن حجم العينة 36 أكبر من 30.

[1]: للاستزادة أكثر حول الفكرة الأساسية لنظرية النهاية المركزية يمكن الى: أنيس اسماعيل كنجو، **الإحصاء والاحتمال**، مكتبة العبيكان، الرياض، المملكة العربية السعودية، 2000.

وبالاستناد على نظرية النهاية المركزية نستنتج بأن متوسطات أوزان العمال تقترب من التوزيع الطبيعي.

$$\mathcal{Z} = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{80 - 70}{24/\sqrt{36}} = 2.5$$

$$P(\overline{x} > 80) = P\left(\mathcal{Z} > 2.5\right) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062.$$

4- توزيع المعاينة للنسبة

في العديد من الحالات تكون المعلمة الأساسية هي النسبة p، ومن أمثلة ذلك نسبة الفواتير التي بها أخطاء، نسبة المكالمات التليفونية التي تتجاوز حدا قياسيا، نسبة شيكات العملاء التي بدون رصيد، نسبة الوحدات المرتجعة من العملاء، والنسبة p' في العينة هي أفضل إحصاءة يمكن استخدامها للاستدلال عن النسبة P في المجتمع.

1-4 المتوسط والخطأ المعياري للنسبة

إذا كان لدينا مجتمع ما نسبة صفة معينة فيه هي P ، وتم سحب عينة منه ذات حجم n نسبة نفس تلك الصفة فيها هي p' ، فإن قيمة كل من المتوسط الحسابي والإنحراف المعياري لتوزيع المعاينة يكونان كما يلي:

$$\mu_{p'} = p \ , \ \sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

حيث:

$\mu_{p'}$: متوسط توزيع المعاينة للنسبة.

p: نسبة النجاح في المجتمع.

q: نسبة الفشل في المجتمع. $q = 1 - p$

$\sigma_{p'}$: الانحراف المعياري للإحصائية p' .

مثال 4:

حدد كلا من المتوسط والخطأ المعياري لنسبة العينة في كل حالة مما يلي:

أ- عينة حجمها 100 ، سحبت من مجتمع نسبته 0.5

ب- عينة حجمها 20 سحبت من مجتمع نسبته 0.5

ت- ما هو تعليقك على النتيجتين ؟

الحل:

أ- متوسط العينة للنسبة في الحالة أ.

لدينا: $\mu_{p'} = p = 0.5$ (متوسط العينة للنسبة)

- الانحراف المعياري لنسبة العينة:

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.5\,(1-0.5)}{100}} = 0.05.$$

ب-متوسط العينة في الحالة ب:

لدينا: $\mu_{p'} = p = 0.5$ (متوسط العينة للنسبة)

- الانحراف المعياري لنسبة العينة:

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.5\,(1-0.5)}{20}} = 0.11$$

ج- نلاحظ بأن قيمة متوسط النسبة لم تتغير بتغير حجم العينة في نفس المجتمع، بينما ارتفعت قيمه الانحراف المعياري بانخفاض حجم العينة.

2-4- نوع توزيع المعاينة للنسبة p في العينة

النظرية الموالية توضح طبيعة توزيع p' .

إذا تم أخذ عينات عشوائية من الحجم n $(n > 30)$ من مجتمع ذي الحدين بمتوسط $\mu = np$ وتباين $\sigma^2 = npq$ ، فإن توزيع المعاينة لـ **p’** (والتي تمثل نسبة النجاح)، يتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي $\mu_{p'}$ وانحراف معياري $\sigma_{p'}$، حيث أن:

$$\mu_{p'} = p \ , \ \sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

فإن: $p' \approx N(P, \sigma_{p'})$

وتكون قيمة $\mathcal{Z}$ تساوي: $\mathcal{Z} = \frac{p'-p}{\sqrt{pq/n}}$

و $p' = \frac{X}{n}$ هي قيمة المتغير العشوائي القياسي.

مثال 5:

إذا كان احتمال نجاح الطالب بدون ديون في كلية العلوم الاقتصادية هو 0.9، أخذت عينة عشوائية حجمها 49 طالبا من أولئك الذين يدرسون في الكلية، ما هو احتمال أن تزيد نسبة هؤلاء الطلبة بدون دوين على 80% ؟

الحل:

لدينا: $\mu_{p'} = p = 0.9$ (متوسط العينة للنسبة)

أما الانحراف المعياري فيحسب كما يلي:

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.9\,(1-0.9)}{49}} = 0.042.$$

وبما أن حجم العينة $n = 49 > 30$ وبالاعتماد على النظرية السابقة فإنه يمكن التقريب للتوزيع الطبيعي ويكون لدينا:

$$P(p' > 0.8) = p\left(\mathcal{Z} > \frac{p'-p}{\sigma_{p'}}\right)$$

$$= p\left(\mathcal{Z} > \frac{0.8-0.9}{0.042}\right) = p(\mathcal{Z} > -2.38)$$

$$P\,(p' > 0.8) = P\,(\mathcal{Z} > -2.38) = 0.5 + P\,(0 < \mathcal{Z} < 2.38)$$

$$= 0.5 + 0.4913 = 0.9913$$