4- توزيع المعاينة للتباين

بالعودة للمثال[1] رقم (1) من هذا الفصل سيتم حساب متوسط تباينات جميع العينات المسحوبة في حالتي المعاينة النفادية وغير النفادية ومقارنة متوسط التباينات في كل حالة منها مع تباين المجتمع:

أولا: في حالة المعاينة النفادية (السحب دون إرجاع)

تحسب تباينات العينات ذات n الحجم وفق العلاقة التالية:

$$S^2 = \sum \frac{(x_i-\overline{x})^2}{2}$$

العينة	المتوسط الحسابي	$(x_i - \overline{x})^2/2$
(2،4)	3	1
(2،6)	4	4
(2،8)	5	9
(2،10)	6	16
(4،6)	5	1
(4،8)	6	4
(4،10)	7	9
(6،8)	7	1
(6،10)	8	4
(8،10)	9	1
المجموع	/	50

$$E(S^2) = \frac{\sum S^2}{25} = \frac{50}{10} = 5$$

[1]: سامح جزماتي، **الاحتمالات والإحصاء**، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية، جامعة حلب، دمشق، 1989. ص ص.

ثانيا: في حالة المعاينة غير النفادية (السحب مع الإرجاع).

العينة	المتوسط الحسابي	$(x_i - \overline{x})^2/2$
(2 ،2)	2	0
(2،4)	3	1
(6 ،2)	4	4
(8 ،2)	5	9
(10 ،2)	6	16
(2 ،4)	3	1
(4 ،4)	4	0
(6 ،4)	5	1
(8 ،4)	6	4
(10 ،4)	7	9
(2 ،6)	4	4
(4 ،6)	5	1
(6 ،6)	6	0
(8 ،6)	7	1
(10 ،6)	8	4
(8،2)	5	9
(4 ،8)	6	4
(6 ،8)	7	1
(8 ،8)	8	0
(10 ،8)	9	1
(10،2)	6	16
(4 ،10)	7	9
(6 ،10)	8	4
(8 ،10)	9	1
(10 ،10)	10	0
المجموع	/	100

$$E(S^2) = \frac{\sum S^2}{25} = \frac{100}{25} = 4.$$

$$E(S^2) = 4 = 8\,.(\frac{2-1}{2})\,(\frac{5}{5-1}) = \sigma^2(\frac{n-1}{n})\,(\frac{N}{N-1}).$$

5- توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

في الحالة التي يكون عندنا عينتين مأخوذتين من مجتمعين مختلفين فإنه يمكن استنتاج كل من الفروق والمجاميع وتوزيعها لعدة خصائص تتعلق بهما كما يلي:

1-6 الفروق والمجاميع للمتوسط الحسابي والتباين والنسبة لتوزيع المعاينة

إذا كانت كانت $x_1, x_2, \ldots x_n$ عينة مأخوذة من توزيع متوسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1، أو له صفة معينة نسبتها هي p_1 وكانت $y_1, y_2, \ldots y_n$ عينة أخرى مأخوذة من توزيع آخر متوسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2، وله صفة معينة نسبتها p_2.

فإنه يمكن الحصول على توزيع الفروق والمجاميع للأوساط الحسابية والتباينات ونسب المعاينة وفق العلاقات التالية[1]:

الجدول 2-1: توزيع الفروق والمجاميع للأوساط الحسابية والتباينات ونسب المعاينة

	المتوسط الحسابي	التباين	النسبة
الفروق	$\mu_{\bar{x}-\bar{y}} = \mu_1 - \mu_2$	$\sigma^2_{\bar{x}-\bar{y}} = \sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\bar{y}}$	$\mu_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = p_1 - p_2$
المجاميع	$\mu_{\bar{x}+\bar{y}} = \mu_1 + \mu_2$	$\sigma^2_{\bar{x}+\bar{y}} = \sigma^2_{\bar{x}} + \sigma^2_{\bar{y}}$	$\mu_{\bar{p}_1 + \bar{p}_2} = p_1 + p_2$

المصدر: من تلخيص الباحث.

مثال 6:

أخذت عينة حجمها 30 وحدة من توزيع متوسط الحسابي 75 وتباينه 25، وأخذت عينة ثانية حجمها 60 من توزيع آخر مستقل متوسطه الحسابي 60 وتباينه 15.

أوجد الفروق والمجاميع للمتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للتوزيعين.

[1]: دلال القاضي وآخرون، **الإحصاء للإداريين والاقتصاديين**، دار الحامد، عمان، الأردن، 2005، ص ص (215- 219). بتصرف

الحل:

أولا: بالنسبة للفروق

المتوسط الحسابي : $\mu_{\bar{x}-\bar{y}} = 75 - 60 = 15$

أما الفروق بين الانحرافين : $\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{25}{30} + \frac{15}{60}} = 1.04$

ثانيا: بالنسبة للمجاميع:

المتوسط الحسابي : $\mu_{\bar{x}+\bar{y}} = 75 + 60 = 135$

أما المجاميع بين الانحرافين : $\sigma_{\bar{x}+\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{25}{30} + \frac{15}{60}} = 1.04$

2-6 طبيعة توزيع المعاينة لمجموع أو الفرق بين متوسطين

إذا كانت العينتان المسحوبتان من مجتمعين طبيعيين أو حجم كل منهما يساوي أو يفوق 30 مفردة فإن الفرق بين متوسطي العينتين أو مجموعهما يتبع أو يقترب من التوزيع الطبيعي[1]، حيث:

$$\left(\bar{x}-\bar{y}\right) \to N\left(\mu_1-\mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \Rightarrow \frac{\left(\bar{x}-\bar{y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \to N(0,1)$$

مثال 7:

تم سحب عينتين عشوائيتين من شركتين مختلفتين لإنتاج الأدوية، وكانت الأجور المدفوعة من قبل الشركتين تتبع التوزيع الطبيعي، وأن معدل الأجور المدفوعة من الشركة الأولى إلى 25 عاملا تساوي 35000 دج بانحراف معياري 4000 دج، أما معدل الأجور لـ 40 عاملا فهو 28000 دج بانحراف معياري 6000 دج.

- ما هو احتمال أن يزيد معدل الأجور في الشركة الأولى بـ 8000 دج على الأقل عن الشركة الثانية؟

الحل:

[1]: محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، **مقدمة في الإحصاء مبادئ وتحليل باستخدام SPSS**، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2004، ص 192. بتصرف.

نلخص معطيات المثال في الجدول الموالي:

	الشركة الأولى	الشركة الثانية
المتوسط الحسابي	μ_1=35000	μ_2=28000
الانحراف المعياري	$\sigma_1 = 4000$	$\sigma_2 = 6000$
حجم العينة	25	40

$$\mu_{\bar{x}-\bar{y}} = \mu_1 - \mu_2 = 35000 - 28000 = 7000$$

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{4000^2}{25} + \frac{6000^2}{40}} = 981.83$$

$$p\,(\bar{x} - \bar{y} > 8000\,) =$$

$$= p[\mathcal{Z} > (8000) - (7000)/981.83] = p[\mathcal{Z} > 1.02\ ]$$

$$= 0.5 - 0.3461 = 0.1539$$

6- توزيع المعاينة للنسبة بين تباينين

عند المقارنة بين تبايني مجتمعين فإننا نحتاج إلى النسبة بين تبايني عينتين مأخوذتين منهما، وهذا يمهد لدراسة أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة المستخدمة كثيرا وهو توزيع فيشر.

1-7 توزيع فيشر[1]

يعتبر توزيع فيشر أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة والمستخدمة في اختبار الفرضيات وفي تحليل التباين، حيث يعرف متغيره العشوائي بالدالة الاحتمالية التالية:

$$f(F) = \frac{c\,F^{\left(\frac{\nu_1-2}{2}\right)}}{(\nu_2 + \nu_1 F)^{\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}}\ ;\ F > 0$$

حيث ν_2،ν_1 هما درجات الحرية وc ثابت يعتمد عليهما ويتحدد ليجعل المساحة تحت منحني التوزيع تساوي 1.

---

[1]: معتوق أمحمد، **الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2007، ص ص (44-45).

فهذا التوزيع يتضمن عددين لدرجات الحرية، وحيث أن ν_2 لا تظهر إلا في المقام فإنه يعتبر درجات حرية المقام، ويعتبر ν_1 درجات حرية البسط ونكتب: $X \sim F_{v1,\, v2}$

2-7 خواص توزيع فيشر

- أحادي المنوال، وملتوي إلى اليمين قليلا.
- موجب لجميع قيم F.
- كلما زادت درجات الحرية ν_2،ν_1 يقترب توزيع فيشر من التوزيع الطبيعي.

توجد جداول خاصة بتوزيع فيشر لإيجاد قيمة F التي على يسارها مساحة ما بدرجات حرية ν_2،ν_1.

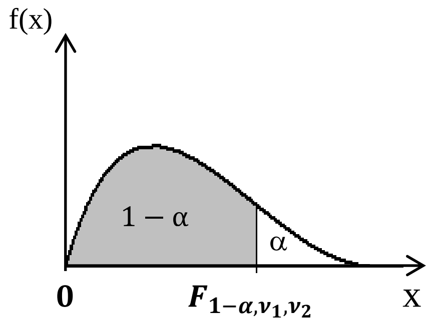
حيث قيم ν_1 توجد في السطر الأفقي أعلى الجدول أما قيم ν_2 فتوجد على العمود الأيسر من الجدول ونجد المساحات أوالاحتمالات إما بالعمود المحاذي لعمود قيمν_2 أو كمساحة مستقلة بجدول خاص قيمتها أعلى ذلك الجدول.

كما يمكن حساب قيمة $\boldsymbol{F}$ بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$\mathrm{F} = \frac{x_1^2/\nu_1}{x_2^2/\nu_2} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2}$$

حيث إن x_1^2 هي قيمة توزيع كاي تربيع بدرجة حرية ν_1، x_2^2 هي قيمة توزيع كاي تربيع بدرجة حرية ν_2، أما S_1^2 و S_2^2 هما تباينا العينتين ذات الحجمين n_1 و n_2 على الترتيب.

الشكل 2-1 : منحنى توزيع فيشر



والنظرية الموالية تتناول المعاينة للنسبة بين تباينين:

ليكن $_1^2$ تباين عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع $N\ (\mu_1\ ,\ \sigma_1^2)$ وليكن S_2^2 تباين عينة عشوائية حجمها n_2 من مجتمع $N\ (\mu_2\ ,\ \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول، فإن:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} \sim F_{\boldsymbol{1-\alpha,\nu_1,\nu_2}}$$

ملاحظة:

بما أن جداول توزيع فيشر لا تتضمن بعض المساحات الصغيرة فإنه يمكن الاستعانة بالقواعد التالية:

$$- F_{1-\alpha,\nu_1,\nu_2} = \frac{1}{F_{\alpha,\nu_2,\nu_1}}$$

$$- F_{\boldsymbol{p,1,\nu}} = t^2_{1-(p/_2),\nu}$$

$$- F_{\boldsymbol{p,\nu},\infty} = \frac{x^2_{1-\alpha,\nu}}{\nu}$$

مثال:

أوجد: $F_{0.05,7,10}$; $F_{0.01,11,15}$; $F_{0.025,11,10}$; $F_{0.95,9,7}$

الحل:

بالنظر إلى جدول فيشر نحصل على ما يلي:

$F_{0.95,9,7} = 3.68.$

$F_{0.025,11,10} = 0.283.$

$F_{0.01,11,15} = \frac{1}{F_{0.99,15,11}} = \frac{1}{4.25} = 0.235.$

$F_{0.05,7,10} = \frac{1}{F_{0.05,10\ ,7}} = \frac{1}{3.64} = 0.275.$