تمهيد

إن دراسة الباحث للعينات وتوزيعاتها عن طريق إحصاءاتها المحددة يهدف إلى الاستدلال على المعالم المناظرة لها في المجتمع، إلا أن تلك القيم التي يتم الحصول عليها عن طريق المعاينة لا تعكس بالضرورة القيم الحقيقية المناظرة لها فيه، مما يدفع الباحث إلى تقدير تلك المعالم أو المجالات التي تقع ضمنها بدرجة ثقة معينة، ولهذا جاء هذا الفصل ليتناول شروط التقدير الجيد و أنواع التقدير وبعض نظرياته.

1- مصطلحات ومفاهيم

- **التقدير:** هو عملية استنتاج أو تقدير المعلمة من الإحصاءة المناظرة لها
- **التقدير الجيد:** هو ذلك التقدير الأقرب من غيره إلى معلمة المجتمع
- **التقدير المنحاز:** إذا ابتعدت قيمة إحصاءة العينة المقدرة على معلمة المجتمع نقول بأن التقدير متحيز.

2- شروط التقدير الجيد

بصورة عامة فإن المقدر يعتبر جيدا إذا توفر على الخواص التالية:

1- عدم التحيز.
2- الاتساق.
3- الكفاءة.
4- الكفاية.

3- طرق التقدير

يمكن أن نميز بين طريقتين كلاسيكيتين للتقدير وهما التقدير النقطي والتقدير بفترة أومجال.

3-1- التقدير النقطي

وهي أبسط طرق التقدير، وتتمثل في تقدير المعلمة بقيمة واحدة، كأن نقول أن متوسط دخل أفراد أسرة ما هو 30000 دج، فيكون $\overline{X} = 30000$، هو تقدير نقطي لمتوسط المجتمع[1].

مثال 1[2]:

[1]: معتوق أمحمد، **مرجع سابق**، ص 105. بتصرف
[2]: عدنان عوض، **الإحصاء التطبيقي**، الشركة العربية المتحدة، القاهر، مصر 2009، ص ص (7- 8).

لتقدير عدد الكلمات في أحد الكتب أخذت عينة حجما 10 صفحات عشوائيا من ذلك الكتاب، وتم عد الكلمات فيها، فكان كما يلي:

283، 317، 303، 291، 297، 300، 305، 295، 310، 309.

1. كم تقد وسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة؟
2. إذا كان الكتاب يحتوي على 400 صفحة فكم تقدر عدد الكلمات فيه؟

الحل:

لدينا حجم العينة n = 10 ، أما وسطها فيحسب من العلاقة: $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$.

$$\overline{X} = (283 + 317 + 303 + 291 + 297 + 300 + 305 + 295 + 310 + 309)/10$$

$= 301.$

ومنه يتم تقدير متوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة بـ 301 كلمة، أي أن $\mu=301$.

أما عدد كلمات الكتاب فهو: 400 x 301 = 120400.

مثال 2:

من معطيات المثال السابق، قدر نقطيا قيمة الانحراف المعياري.

لقد تم الاعتماد على العلاقة $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ في حساب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط الحسابية، و عند حساب الانحراف المعياري للعينة فيتم الاعتماد على العلاقة:

$$S = \sqrt{\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n}}$$

ولكن عند تقدير الانحراف المعياري للمجتمع فإنه يتم استخدام العلاقة:

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

فلقد تمت القسمة على $n\text{-}1$ بدل n لأنه تم حساب أحد المقاييس من العينة اللازمة لحساب الانحراف المعياري المقدر، وهذا المقياس هو $\overline{X}$، وبصفة عامة أنه عند تقدير أي مقياس يجب ملاحظة عدد المقاييس التي حسبت من العينة والتي تلزم لحساب ذلك المقياس لأخذه في الاعتبار لتحديد درجات الحرية.

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(283-301)^2 + (317-301)^2 + (303-301)^2 + \cdots (309-301)^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{898}{9}} = 9.98.$$

2-3- التقدير بفترة

عموما لا يمكن توقع الحصول على تقدير لمعلمة المجتمع بدون خطأ مهما كان التقدير جيدا، ومع أن دقة التقدير تزداد مع زيادة حجم العينة فإنه لا يوجد ما يبرر إمكانية الحصول على على تقدير لمعلمة المجتمع بدون خطأ، ولهذا يتم إعطاء مجال أو فترة يُتوقع وجود معلمة المجتمع داخلها، تلك الفترة يطلق عليها فترة التقدير، أو فترة الثقة. فتقدير الفترة إذن يحدد مدى معين من القيم نتوقع أن تقع ضمنه معلمة المجتمع.

3-2-1-تفسير فترة الثقة[1]

تعتبر فترة الثقة من الأدوات القوية التي تعطي معلومات عن المعلمة المجهولة (مثل μ) باستعمال العينة، ولذلك نعطي بعض الملاحظات حول طبيعة فترة الثقة، ونكتفي بالشرح عن فترة ثقة 95%.

ولنأخذ المثال التالي:

مثال3: نفرض أننا أخذنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه معلوم أي $\overline{X} \sim N\,(\mu\,,\,\sigma)$.

من جدول التوزيع الطبيعي نجد أن:

$$P\,(-1.96 \leq \mathcal{Z} \leq +1.96) = 0.96$$

[1]: محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، مقدمة في الإحصاء، دار المسيرة، الأردن، ط 2، 2005، ص ص (214 – 212).

إذن:

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\overline{X}- \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq +1.96 \right) = 0.95$$

وبعد إجراء العمليات الحسابية وتبسيط هذه العلاقة نجد أن:

$$P\left(\overline{X}-1.96\ \sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X}+1.96\ \sigma/\sqrt{n}\right) = 0.95.$$

وهكذا نكون قد حددنا طرفي أوحدي المجال الذي يقع ضمنه المتوسط الحسابي للمجتمع، أي أن الحد الأدنى للفترة هو $\overline{X}-1.96\ \sigma/n$ بينما الحد الأعلى لها هو $\overline{X}+1.96\ \sigma/n$.

1- قبل دراسة العينة وتسجيل المشاهدات وإيجاد قيمة الوسط الحسابي فإن:

$$\left(\overline{X}-1.96\ \sigma/\sqrt{n}\ ,\ \overline{X}+1.96\ \sigma/\sqrt{n}\right)$$

هي فترة نهايتاها متغيرتان عشوائيتان، تمثلان فترة عشوائية تحاول احتواء المعلمة المجهولة μ.

2- إن تفسير الاحتمال :

$$P\left(\overline{X}-1.96\ \sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X}+1.96\ \sigma/\sqrt{n}\right) = 0.95.$$

على أنه التكرار النسبي لمحاولات المعاينة الكثيرة المتكررة يحدد أن 95% من فترات الثقة ستحوي μ، وأن 5% منها لا تحويها.

3- حالما نحسب المتوسط الحسابي من العينة ونجد قيمته $\overline{X}$ فإن فترة الثقة:

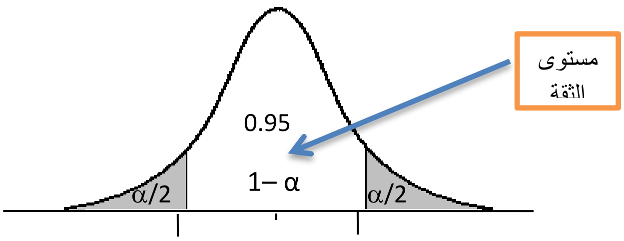
$\left(\overline{X}-1.96\ \sigma/\sqrt{n}\ ,\ \overline{X}+1.96\ \sigma/\sqrt{n}\right)$ تسمى فترة ثقة 95% للمعلمة μ.

4- وعند التطبيق فنحن لا نعلم فيما إذا كانت فترة الثقة 95% التي حصلنا عليها من عينة معينة، تحوي القيمة المجهولة μ أو لا تحويها. ولكن اعتمادا على التكرار النسبي للمحاولات الكثيرة التي أشير إليها في (2) فقد أمكننا استعمال كلمة ثقة بعد حساب الفترة.

وبأخذ هذه الملاحظات في عين الاعتبار فإن تفسير فترة ثقة 95 % للمعلمة μ : إذا أخذنا 100 عينة عشوائية ذات الحجم n وفي كل مرة نحسب $\overline{X}$ ونحسب فترة الثقة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي μ الحقيقية، و5 مرات فقط تخطئ μ الحقيقية فلا تحتويها.

ويمكن توضيح مساحة فترة الثقة وحديها في مثالنا هذا بيانيا في الشكل الموالي:

الشكل 3-1: مساحة فترة الثقة وحديها عند مستوى معنوية $1\text{-}\alpha$



ونكتب: $1\text{-}\ \alpha = p = 0.95 \implies \alpha = 0.05$

أي أن: مستوى المعنوية + مستوى الثقة = 1

ويرمز عادة بالرمز α لمستوى المعنوية وبـ ($1\text{-}\ \alpha$) لمستوى الثقة.

ويمكن كتابة العلاقة التي تحدد فترة الثقة في العبارة التالية:

فترة الثقة = التقدير بنقطة ∓ معامل الثقة x الخطأ المعياري للتقدير

$$\theta = T \mp C_C\, \sigma_T$$

حيث C_C يدعى معامل الثقة، وفي مثالنا هذا قيمته هي: $Z_{1-\alpha/2} = 1.96$

والجدول الموالي يوضح أهم مستويات الثقة ومعاملاتها في حالة استخدام التوزيع الطبيعي في التقدير:

الجدول: 3-1: أهم مستويات الثقة ومعاملاتها في حالة استخدام التوزيع الطبيعي

	الرمز	مستويات الثقة			
مستوى الثقة	$1-\alpha$	0.99	0.98	0.95	0.90
مستوى المعنوية	α	0.01	0.02	0.05	0.10
الاحتمال	$0.5-\alpha/2$	0.495	0.49	0.475	0.45
معامل الثقة	$\mathbf{Z_c = Z_{0.5-\alpha/2}}$	**2.58**	**2.33**	**1.96**	**1.645**

وتلخص خطوات إيجاد حدود فترة الثقة في ما يلي:

1- تعيين مستوى الثقة.
2- استنتاج معاملات الثقة بالنسبة للمستويات الشهيرة مثل: (0.99، 0.95، 0.90)، أما في الحالات الأخرى فيتم حساب المساحة (الاحتمال) بطرح نصف مستوى المعنوية من 0.5 أو 1 وذلك حسب جدول التوزيع الطبيعي المستعمل، وإيجاد قيمة معامل الثقة المقابلة للاحتمال.
3- حساب حدود مجال الثقة.