2-2-3 - فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه معلوم

المثال السابق المتعلق بشرح فترة الثقة يندرج ضمن هذه الحالة التي تشتمل على النظرية الموالية :

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$، وكانت σ^2 معلومة.

فإن فترة ثقة $(1-\alpha)$ للمعلمة μ هي:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right]$$

حيث:

$\overline{X}$: متوسط العينة.

$(1-\alpha)$: مستوى الثقة.

$Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}$: معامل الثقة.

مثال 4:

شركة مختصة في صناعة العجلات المطاطية تخضع أقطارها للتوزيع الطبيعي بانحراف معياري 1 سم.

أخذت عينة عشوائية حجمها16 عجلة، فكان الوسط الحسابي لأقطار هذه العجلات هو 40 سم، أوجد فترة ثقة 99 % لمعدل أقطار العجلات التي تنتجها الشركة؟

الحل:

متوسط العينة هو $\overline{X} = 40$، ومنه تقدير μ هو 40.

1- مستوى الثقة هو 99%.

2- $1\text{-}\alpha = 0.99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 0.5 - 0.005 = 0.4950$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[40 - 2.58\,X\ \ {}^{1}\!/_{\sqrt{16}}\ ;40 + 2.58\,X\ \ {}^{1}\!/_{\sqrt{16}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[39.355\ ;40.25]$

3-2-3 - فترة الثقة للمتوسط في حالة المجتمعات الكبيرة

نستطيع من خلال النظرية السابقة تقدير فترة الثقة للمتوسط إذا كانت المعاينة من مجتمع طبيعي تباينه معلوم، لكن إذا لم يكن المجتمع خاضعا للتوزيع الطبيعي، فكيف يتم تقدير تلك الفترة؟

إن نظرية النهاية المركزية تعطينا أيضا الحل عندما يتوفر شرط كبر حجم العينة[1]، ولذلك نستطيع استعمال النظرية الموالية:

نظرية: إذا أخذت عينة عشوائية **حجمها** n مجتمع ليس بالضرورة طبيعيا $N(\mu, \sigma^2)$، وكانت σ^2 معلومة ، وحجم العينة كبير $(n \geq 30)$ فإن فترة ثقة $(1-\alpha)$ للمعلمة μ هي تقريبا:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\ {}^{\sigma}\!/_{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}\ {}^{\sigma}\!/_{\sqrt{n}}\right],\ n \geq 30$$

مثال5 :

أخذت عينة عشوائية حجمها 100، متوسطها الحسابي 52 من مجتمع تباينه 25.

1. أوجد فترة ثقة 98 % لوسط المجتمع μ.

الحل:

متوسط العينة هو $\overline{X} = 52$، $n = 100$، $1-\alpha = 0.98$، $\sigma^2 = 25$.

المجتمع مجهول التوزيع أي أن: $X \sim ?$

[1]: د.ليونارد، ج كازمير، ترجمة مصطفى جلال مصطفى، **الإحصاء التجاري**، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004، ص ص (84- 85). بتصرف.

وبما أن حجم العينة أكبر من 30 فسيتم الاعتماد على نظرية النهاية المركزية، ونحصل على تقريب لفترة الثقة كما يلي:

1- مستوى الثقة هو 98%.

2- $1\text{-}\alpha = 0.98 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01 \Rightarrow 0.5 - 0.01 = 0.4900$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 2.33$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \,{}^{\sigma}\!/_{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \,{}^{\sigma}\!/_{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[52 - 2.33\, X \;\; {}^{5}\!/_{\sqrt{100}} \; ; 52 + 2.33\, X \;\; {}^{5}\!/_{\sqrt{100}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[50.835 \; ; 53.165]$

3-2-4- فترة الثقة للمتوسط في العينات الكبيرة من مجتمعات مجهولة التباين

غالبا ما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهولا وحجم العينة كبيرا، لذلك نستعمل الانحراف المعياري للعينة S بدل الانحراف المعياري للمجتمع[1]، وفي هذه الحالة تكون فترة الثقة:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \,{}^{S}\!/_{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \,{}^{S}\!/_{\sqrt{n}}\right]$$

مثال6 :

أخذت عينة من مصابيح كهربائية حجمها 64، ووجد بأن متوسط أعمارها الاقتصادي 800 ساعة بانحراف معياري 40 ساعة. أوجد فترة ثقة 95% لمعدل أعمار المصابيح.

الحل:

---

[1]: سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، مبادئ **الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2007، ص 284.

لدينا: $n = 64, \overline{X} = 800$; $S = 40$; $1-\alpha = 0.95$. $X \sim ?$

بما أن حجم العينة كبير فإنه يمكن الاستناد إلى نظرية النهاية المركزية والاعتماد على الانحراف المعياري للعينة في تحديد مجال الثقة لمتوسط أعمار المصابيح عند مستوى 95% كما يلي:

1- مستوى الثقة هو 95%.

2- $1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Longrightarrow 0.5 - 0.025 = 0.4750$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \, {}^{S}/_{\sqrt{n}} \; ; \overline{X} + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \, {}^{S}/_{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[800 - 1.96\, X \;\; {}^{40}/_{\sqrt{64}} \; ; 800 + 1.96\, X \;\; {}^{40}/_{\sqrt{64}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[790.2 \; ; 809.8]$.