3-2-5- فترة الثقة للمتوسط في العينات الصغيرة من مجتمعات مجهولة التباين

إن تحديد فترة الثقة للمتوسط في العينات الصغيرة والمأخوذة من مجتمعات طبيعية مجهولة التباين يقودنا إلى الحديث على توزيع احتمالي يدعى توزيع ستيودنت.

3-2-5-1- توزيع ستيودنت[1]

عندما يكون حجم العينة صغيرا وتباين المجتمع σ^2 غير معلوم، فإنه لا يمكن تقريب $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ بالتوزيع الطبيعي المعياري، ولكن عندما تكون المعاينة من مجتمع طبيعي فإن توزيع $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ هو توزيع ستيودنت.

تعريف:

توزيع ستيودنت هو أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة تكمن تطبيقاته في نظرية العينات واختبار الفرضيات كبديل للتوزيع الطبيعي في العينات الصغيرة المسحوبة من مجتمعات مجهولة التباين، ودالة كثافته الاحتمالية يعطى بالعلاقة التالية:

$$f(t) = c\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\nu+\frac{1}{2}} \qquad , \qquad -\infty < t < +\infty$$

حيث ν يسمى درجات الحرية، و c ثابت يعتمد على ν ليجعل المساحة تحت المنحني تساوي 1.

ونكتب: $T \sim t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}$

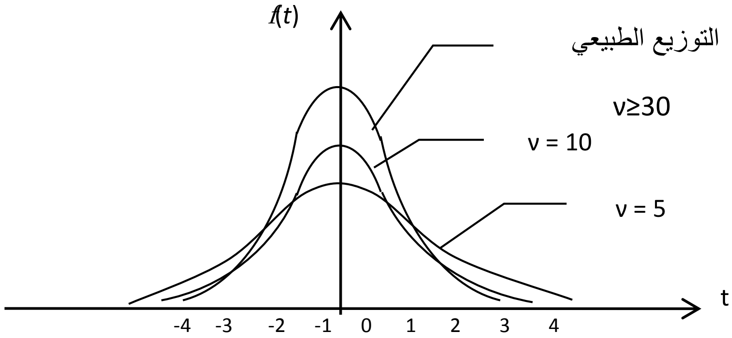
3-2-5-2- خواص توزيع t

1. شكله يشبه الجرس.
2. أحادي المنوال، حيث له قيمة واحدة تقابل $(t=0)$.
3. شكله يشبه التوزيع الطبيعي إلا أنه منخفض عنه.
4. يتقارب طرفيه من الصفر عندما $t \to \mp\infty$ ، إلا أنه أبطأ من تقارب طرفي التوزيع الطبيعي.

[1]:- محمد حسين محمد رشيد، منى عطا الله الشويلات، **مرجع سابق** ص ص (368- 369) بتصرف.
- معتوق أمحمد، **مرجع سابق**، ص ص (40- 41) بتصرف.

5. يعتمد توزيع ***t*** على حجم العينة، فعندما يقل حجم العينة يزداد ارتفاع منحنى ***t*** عن المحور الأفقي، وكلما زاد حجم العينة اقترب طرفي المنحنى من المحور الأفقي، وإذا كان حجم العينة أكبر من أو يساوي 30 فيؤول توزيع ***t*** إلى التوزيع الطبيعي والشكل الموالي يوضح ذلك.

الشكل 3-2: تقريب توزيع *t* إلى التوزيع الطبيعي



أما كيفية إيجاد قيمة t باستخدام توزيع ستيودنت فيتم كما يلي:

1. تحديد درجة الحرية ν انطلاقا من حجم العينة عن طريق العلاقة: $\nu = n - 1$.
2. تحديد مستوى الثقة المراد. $(1-\alpha)$ واستنتاج المساحة $(1-\frac{\alpha}{2})$ والبحث عليها في السطر الأفقي أعلى الجدول.
3. التقاطع بين قيمة درجات الحرية ν في العمود الأيسر والمساحة $(1-\frac{\alpha}{2})$ في السطر العلوي يحددان قيمة t.

وبعد إيجاد القيمة الجدولية لمعامل الثقة $t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}$ يتم تحديد فترة الثقة بالاعتماد على النظرية التالية:

نظرية:

إذا أخذت عينة عشوائية صغيرة حجمها n من مجتمع طبيعي فإن فترة ثقة $(1-\alpha)$ للمعلمة μ هي:

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}\ {}^{S}/_{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2};\nu}\ {}^{S}/_{\sqrt{n}}\right]$$

$\overline{X}$: المتوسط الحسابي المحسوب من العينة.

n: حجم العينة.

ν: درجة الحرية = n-1.

α: مستوى المعنوية.

S: الانحراف المعياري المحسوب من العينة.

µ: متوسط المجتمع المجهول.

مثال 7:

أخذت عينة عشوائية حجمها 16 من مجتمع طبيعي فوجد أن متوسطها الحسابي 15.5 وانحرافها المعياري 2.4. أوجد فترة ثقة %95 لمعدل المجتمع .

الحل:

لدينا: $n = 16, \overline{X} = 15.5$; $S = 2.4$; $1-\alpha = 0.95$. $X \sim N(\mu, ?)$

مجتمع طبيعي
حجم العينة صغير
تباين المجتمع مجهول

$\Longleftarrow$ المتوسط يخضع لتوزيع ستيودنت أي : $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{1-\frac{0.05}{2};\,16-1}$

1- مستوى الثقة هو %95.

2- $1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Longrightarrow 1-0.025 = 0.975$

ومنه معامل الثقة هو: $t_{1-\frac{0.05}{2};\,16-1} = 2.131$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu}\ {}^{S}/_{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu}\ {}^{S}/_{\sqrt{n}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[15.5 - 2.131\,X\ {}^{2.4}/_{\sqrt{16}}\ ;\ 15.5 + 2.131\,X\ {}^{2.4}/_{\sqrt{16}}\right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[14.221\ ;\ 16.778]$.

مثال 8:

بلغ عدد أفواج طلبة السنة الأولى جذع مشترك في كلية العلوم الاقتصادية 40 فوجا، وكانت معدلات الطلبة لـ 5 أفواج من السنة الأولى جذع مشترك في مادة الإحصاء كالآتي:

10.1، 10.3، 9.9، 9.8، 10.2.

1. قدر نقطيا متوسط معدلات الطلبة للأفواج الخمسة.
2. أوجد فترة ثقة 90% لمعدلات أفواج الطلبة من تلك السنة بافتراض أنها تتبع التوزيع الطبيعي.

الحل:

لدينا: $n = 5, \overline{X} =? \,;\, S = ? \,;\, 1-\alpha = 0.95. \quad X \sim N(\mu, ?)$

$$\left.\begin{array}{r}\text{مجتمع طبيعي}\\ \text{حجم العينة صغير}\\ \text{تباين المجتمع مجهول}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$ المتوسط يخضع لتوزيع ستيودنت أي : $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{1-\frac{0.10}{2};\, 5-1}$

1- التقدير النقطي لمتوسط معدلات الأفواج الخمسة في مادة الإحصاء:

لدينا حجم العينة $n = 5$ ، أما وسطها فيحسب من العلاقة: $\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$.

$$\overline{X} = (10.1 + 10.3 + 9.9 + 9.8 + 10.2)/5 = 10.06$$

ومنه يتم تقدير متوسط معدلات أفواج السنة الأولى في مادة الإحصاء بـ 10.06، أي أن $\mu=10.06$.

2- تحديد فترة الثقة:

- تقدير الانحراف المعياري للمجتمع:

عند تقدير الانحراف المعياري للمجتمع فإنه يتم استخدام العلاقة:

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(10.1-10.06)^2 + (10.3-10.06)^2 + (9.9-10.06)^2 + (9.8-10.06)^2 + (10.2-10.06)^2}{5-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.172}{4}} = 0.207$$

وحيث أن قيمة معدل الاستقصاء هي: $\frac{n}{N} = \frac{5}{40} = 0.125 > 0.05$

فإنه يتم اعتماد معامل الإرجاع في علاقة الانحراف المعياري كما هو موضح في فترة الثقة في الخطوة الثالثة من خطوات تحديد فترة الثقة.

1- مستوى الثقة هو 90%.

2- $1\text{-}\alpha = 0.90 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Longrightarrow 1 - 0.05 = 0.95$

ومنه معامل الثقة هو: $t_{1-\frac{0.10}{2};\,5-1} = 2.132$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu}\ \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\ \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2};\,\nu}\ \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[10.06 - 2.132\,X\frac{0.207}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{40-5}{40-1}}\ ;10.06 + 2.132\,X\frac{0.207}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{40-5}{40-1}}\right] =$$

$$[10.06 - 2.132\,X0.092X0.947\ \ ;10.06 + 2.132\,X0.092X0.947\,]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[9.874\,;10.245]$.

3-3- تقدير النسبة

إن تقدير نسبة وجود خاصية أو صفة في مجتمع ما عادة ما يتم من خلال تقدير نسبة تلك الخاصية أو الصفة في عينة عشوائية مأخوذة منه، فتقدير النسبة أيضا إما أن يكون نقطيا، أو بفترة.

3-3- 1- تقدير النسبة بنقطة

رأينا في الفصل السابق من توزيع المعاينة للنسبة أن نسبة النجاح في العينة تقابل نفس النسبة من النجاح في المجتمع، ولهذا صار تقدير نسبة وجود ظاهرة في مجتمع ما يتم على أساس نسبة وجود تلك الظاهرة في عينة عشوائية مأخوذة من ذلك المجتمع.

فإذا أردنا تقدير نسبة الطلبة الذين يمتلكون الحاسوب النقال في الجامعة الجزائرية فإنه يمكن أن نختار كلية من جامعة ما عشوائيا ثم نقوم بحساب نسبة الطلبة الذين يمتلكون الحاسوب النقال بالكلية، وتستعمل تلك النسبة في العينة كتقدير نقطي للنسبة في الجامعة الجزائرية.

فإذا كانت لدينا عينة عشوائية مأخوذة من مجتمع برنولي $B(1\ ,\ p)$ ، وكانت قيم مفرداتها هي:

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ فإن نسبة النجاح في العينة تكون كما يلي: $p' = \frac{\sum x_i}{n}$.

وتمثل تلك النسبة في العينة التقدير النقطي للنسبة في المجتمع[1].

مثال 9:

لتقدير نسبة المرضى الراضين عن الخدمات المقدمة لهم من الطاقم الطبي في إحدى المستشفيات تمت مقابلة 80 مريضا فوجد من بينهم 50 مريضا عبروا عن رضاهم عن نوع تلك الخدمات .

3- ما هي نسبة المرضى الراضين في ذلك المستشفى؟

الحل:

نسبة المرضى الراضين عن الخدمات الصحية في العينة هي: $p' = \frac{50}{80} = 0.625 = 62.5\%$

ومنه تقدر نسبة المرضى الراضين عن الخدمات الصحية في المستشفى بـ: **62.5%.**

3-3-2- تقدير النسبة بفترة[2]

رغم أن التوزيع الاحتمالي المستعمل في النسب هو التوزيع الثنائي إلا أن كثرة الحسابات وتعقدها عند تحديد فترة ثقة لنسبة المجتمع غير المعروفة جعل العديد من المراجع تلجأ إلى استخدام التوزيع الطبيعي

[1]: محمد صبحي أبو صالح، عدنان محمد عوض، **مرجع سابق،** ص ص (222-223) .بتصرف.
[2]: شبيزل، شيلر، سرينيفيسان، ترجمة محمد علي عبد الناصر، مصطفى جلال مصطفى، **الاحتمالات والإحصاء،** الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004، ص 91. بتصرف.

كتقريب للتوزيع الثنائي وهذا عندما تكون العينات كبيرة الحجم وعندما لا تكون نسبة النجاح قريبة جدا من الصفر أو الواحد.

والنظرية الموالية توضح ذلك:

نظرية:

إذا كانت $p'=\frac{X}{n}$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n وكانت n كبيرة فإن فترة الثقة ($1-\alpha$) التقريبية لنسبة النجاح هي:

$$\left[p' - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \,;\, p' + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \right]; (n \geq 30)$$

ملاحظات:

1- إذا كان المجتمع محدودا و ذا حجم N وقيمة معدل الاستقصاء أقل من 0.05 فإنه يتم ضرب قيمة الانحراف المعياري في جذر معامل الإرجاع وتكون عبارة فترة الثقة للنسبة كما يلي:

$$\left[p' - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \,;\, p' + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right]$$

2- إن تقريب التوزيع من الثنائي إلى الطبيعي يؤدي إلى وجود خطأ، ولهذا يُقترح استخدام معامل التصحيح $\frac{1}{2n}$ عند حساب قيمة الاحتمال، بإضافته إلى يمين متراجحة الاحتمال في حالة حساب الاحتمال لما يكون أكبر، وطرحه لمل يكون اتجاه متراجحة الاحتمال أقل.

مثال 10 :

أخذت عينة عشوائية حجمها 200 طالبا من كلية العلوم الاقتصادية من قسم الجذع المشترك فوجد أن 40 منهم متحصلون على شهادة البكالوريا تخصص علوم الطبيعة والحياة.

1. قدر نسبة طلبة الجلاز ة ذع المشترك الحاصلين شهادة البكالوريا تخصص علوم الطبيعة والحياة.
2. أوجد فترة ثقة 99 % للنسبة الحقيقية للطلبة الحاصلين على شهادة البكالوريا شعبة علوم الطبيعة والحياة.

الحل:

1- تقدير نسبة طلبة الجذع المشترك الحاصلين شهادة البكالوريا تخصص علوم الطبيعة والحياة:

$$p' = \frac{40}{200} = 0.2 = 20\%$$

2- إيجاد فترة الثقة:

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يمكن التقريب للتوزيع الطبيعي وسنتبع نفس الخطوات السابقة في تحديد فترة الثقة كما يلي:

1- مستوى الثقة هو 99%.

2- $1\text{-}\alpha = 0.99 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow 0.5 - 0.005 = 0.4950$

ومنه معامل الثقة هو: $Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$.

3- فترة الثقة هي:

$$\left[p' - Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \; ; p' + Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[0.2 - 2.58 \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{200}} \; ; 0.2 + 2.58 \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{200}} \right]$$

أي أن فترة الثقة هي: $[0.127 \; ; 0.273]$.