3-4- فترات الثقة حول تباين المجتمع

رأينا فيما سبق عند تقدير المتوسط الحسابي في حالة العينات الصغيرة المأخوذة من مجتمعات مجهولة التباين أن التباين المقدر يكون وفق العلاقة التالية:

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum X_i^2 - n\overline{X}^2}{n-1}$$

وهذا ما يمهد لدراسة أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة والمتمثل في توزيع كاي تربيع

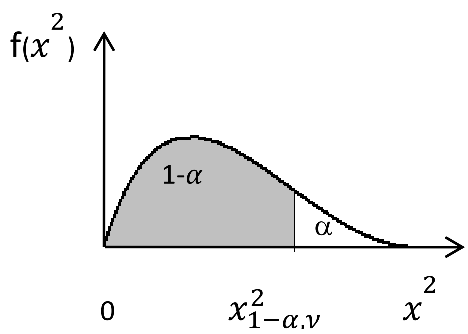
3-4-1- توزيع كاي تربيع[1]

إذا تم سحب عينات عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 وتم حساب تباين توزيع المعاينة S^2 لكل عينة، فإنه يتم الحصول على قيم للإحصاءة S^2 ، ولندرة استخدام توزيع المعاينة لـS^2 في الواقع وبدلا من ذلك سوف نستخدم توزيع المتغير العشوائي x^2 ، ويطلق عليه مربع كاي ، ويمكن حساب قيمته من كل عينة بالمعادلة:

$$x^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

ويطلق على توزيع هذا المتغير توزيع مربع كاي بدرجة حرية $(n-1)$.، حيث يرمز لها بالرمز v وتقرأ (نيو)، والشكل الموالي يوضح منحنى كاي تربيع:

الشكل 3-3: منحنى كاي تربيع



[1]: جورج كانافوس، دون ميلر، ترجمة سلطان محمد عبد المجيد، محمد توفيق البلقيني، **مرجع سابق**، ص ص (302-305). بتصرف.

ولإيجاد المساحات تحت المنحنى أو إيجاد القيم التي يقع إلى يسارها أو يمينها مساحة معينة نستعمل جدول كاي تربيع حيث يمثل العمود الأيسر درجات الحرية والخط الأفقي المساحات إلى يسار قيمة كاي تربيع، أما قيم كاي تربيع فهي في داخل الجدول، ونستخدم التعبير $x^2_{1-\alpha,\nu}$ ليعبر عن قيمة كاي تربيع عند مستوى ثقة $(1 - \alpha)$ بدرجة حرية v.

3-4-2- خواص توزيع كاي تربيع

يلاحظ بأن المتغير X^2 لا يمكن أن يكون سالبا، وبالتالي لا يمتد إلى يسار الصفر وإذا كانت درجات الحرية أكبر من 2 فإن لتوزيع x^2 منوال واحد ويكون ملتويا نحو اليمين وكلما زادت درجات الحرية قل الالتواء.

مثال 12:

إذا كان x^2 يخضع لتوزيع كاي تربيع في عينة حجمها 16، أوجد:

1. قيمة x^2 التي يكون إلى يسارها 0.95 من المساحة. أي: $p(X^2 \le x^2) = 0.95$.
2. قيمة x^2 التي يكون إلى يمينها 0.05 من المساحة. أي: $p(X^2 > x^2) = 0.05$.
3. قيمة x^2 التي يكون إلى يسارها 0.99 من المساحة. أي: $p(X^2 \le x^2) = 0.99$.
4. قيمة x^2 التي يكون إلى يمينها 0.01 من المساحة. أي: $p(X^2 \le x^2) = 0.01$.

الحل:

$N = 20 \Longrightarrow \nu = 20 - 1 = 19$

فدرجة الحرية إذن هي 19 أما قيم كاي تربيع في كل حالة هي كما يلي:

1. قيمة x^2 التي يكون إلى يسارها 0.95 من المساحة هي: $x^2_{0.95,19} = 30.144$
2. قيمة x^2 التي يكون إلى يمينها 0.05 من المساحة هي نفسها قيمة كاي تربيع إلى يسار 0.95.أي أن $\left(p(X^2 \le x^2) = 0.95\right) = \left(p(X^2 > x^2) = 0.05\right)$.
   ونكتب أيضا: $x^2_{0.95,19} = 30.144$
3. قيمة x^2 التي يكون إلى يسارها 0.99 من المساحة هي: $x^2_{0.99,19} = 36.191$

4. قيمة x^2 التي يكون إلى يمينها 0.01 من المساحة هي نفسها قيمة كاي تربيع إلى يسار 0.99.أي أن $\left(p\ (X^2 \le x^2) = 0.99\right) = \left(p\ (X^2 > x^2) = 0.01\right)$.

ونكتب أيضا: $x^2_{0.99\,,19} = 36.191$

نظرية

إذا كانت $X_1 , X_2 , X_3 , \ldots X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 فإن فترة ثقة $(1-\alpha)$ هي:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{{x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{{x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\right]$$

حيث: S^2 هو تباين العينة أي: $S^2 = \sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2/n-1$.

ملاحظة:

لإيجاد فترة ثقة $(1-\alpha)$ للتباين σ^2 في النظرية السابقة، نجد أن من جدول توزيع x^2 أن النقطتين ${x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ ، ${x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$ تحصران بينهما مساحة $(1-\alpha)$ تحت توزيع x^2 بدرجة حرية $(n-1)$، أي أن:

$$P\left({x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le {x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right) = 1-\alpha$$

وبعد القيام بالعمليات الرياضية والتبسيط الجبري على المقدار نجد:

$${x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le {x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$$

نأخذ مقلوب المتباينة فيكون عندنا:

$$\frac{1}{{x^2}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} \le \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \le \frac{1}{{x^2}_{\frac{\alpha}{2};n-1}}$$

وبعد الضرب في $(n-1)S^2$ نحصل على:

$$\frac{(n-1)S^2}{x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1}}$$

مثال 13:

أخذت عينة عشوائية حجمها 10 فوجد أن متوسطها الحسابي 0.7 وانحرافها المعياري 0.4 ، أوجد فترة ثقة 90% للانحراف المعياري.

الحل:

n= 10. S= 0.4. 1-$\alpha = 0.90$

1- مستوى الثقة هو 90%.

2- $1\text{-}\alpha = 0.90 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 0.05 \\ 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95 \end{cases}$

ومنه قيمتي كاي تربيع عند درجة حرية $(10-1)$ هما:

$$\begin{cases} x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = x^2{}_{0.95\,;9} = 16.91 \\ x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1} = x^2{}_{0.05\,;9} = 3.325 \end{cases}$$

3- فترة الثقة هي:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\right]$$

وبعد التعويض نجد:

$$\left[\frac{(10-1)0.4^2}{16.91} \leq \sigma^2 \leq \frac{(10-1)0.4^2}{3.325}\right]$$

أي أن: تباين المجتمع محصور بين: $[0.085\ ,\ 0.433]$.

ومنه فترة ثقة 90% للانحراف المعياري للمجتمع هي: $[0.29\ ,\ 0.66]$.

3-5- فترات الثقة للنسبة بين تباينين[1]

إذا كانت $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع $N\ (\mu_1\ , \sigma_1^2)$ وكانت $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$ عينة عشوائية من مجتمع $N\ (\mu_2\ , \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول فإن فترة ثقة $(1-\alpha)$ للنسبة σ_1^2/σ_2^2 هي :

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_2,\nu_1}$$

مثال 14:

أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع $N\ (\mu_1\ , \sigma_1^2)$ فأعطت التباين $S_1^2 = 18$ وأخذت عينة عشوائية حجمها 11 من مجتمع $N\ (\mu_2\ , \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول فأعطى التباين $S_2^2 = 12$.

أوجد فترة ثقة 90 % للنسبة σ_1^2/σ_2^2 .

الحل:

1- مستوى الثقة هو 90%.

2- $1\text{-}\alpha = 0.90 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Longrightarrow 1 - 0.05 = 0.95$

وبالنظر إلى جدول فيشر نستخرج القيم التالية :

$F_{0.95,8,10} = 3.07$; $F_{0.95,10,8} = 3.35$

3- فترة الثقة هي:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_1,\nu_2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\frac{\alpha}{2},\nu_2,\nu_1}$$

وبعد التعويض نجد:

---

[1]: - سليمان محمد طشطوش، **أساسيات الإحصاء الرياضي**، دار اليازوري، دروب للنشر، حمادة للدراسات الجامعية، عمان الأردن، 2012، ص 137.

- عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى، **الاستدلال الإحصائي (1) نظرية التقدير**، مجموعة النيل العربية، مصر، 1999، ص ص (350- 351). بتصرف.

$$\frac{18}{12}.\frac{1}{3.07} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{18}{12}.3.35$$

أي أن فترة الثقة للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ هي: $[0.488\ ;\ 5.02]$.