4- اختبار الفرضيات المتعلقة بالمتوسط

رأينا بأن اختبار الفرضيات يتوقف على اتجاه الفرضية البديلة، إما أن تكون متجهة لليمين فيكون اختبار أحادي الاتجاه لليمين أو كما يطلق عليها الفرضية البديلة ذات الذيل الأعلى، وإما أن تكون متجهة نحو اليسار فنكون بصدد اختبار أحادي الاتجاه من اليسار، أو كما يطلق عليها الفرضية البديلة ذات الذيل الأدنى، وإما أن تكون الفرضية البديلة غير موجهة فيكون الاختبار ثنائي الاتجاه، وفي هذا المبحث سيتم تناول هذه الأنواع.

4-1- الاختبار ثنائي الاتجاه للمتوسط

لتوضيح هذا النوع من الاختبار والكيفية التي يتم بها تنفيذ خطواته نضع المثال الموالي:

مثال 4 :

وجد في دراسة سابقة أن معدل حضور الطلبة للمحاضرات بإحدى كليات جامعة المسيلة هو 70 طالبا، وأن توزيعها يقترب من التوزيع الطبيعي.

نريد اختبار فرضية أن معدل الحضور قد تغير خلال هذا الموسم، فتم اختيار 81 طالبا عشوائيا فوجد أن معدل الحضور هو 73 طالبا بانحراف معياري قدره 10 طلاب.

- باستعمال مستوى دلالة 0.05 هل تؤيد تلك الفرضية؟

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

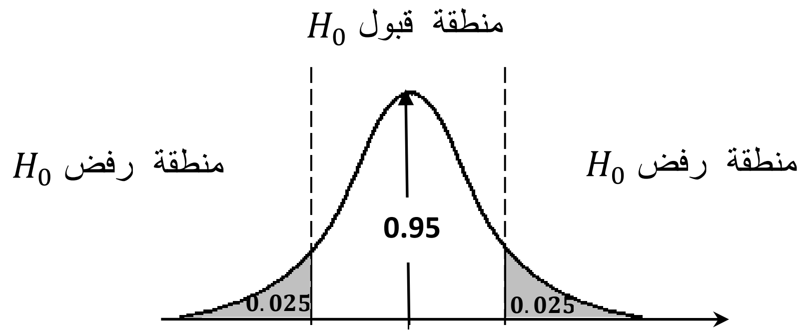
بما أن المسألة لم تتضمن اتجاه محدد للتغير، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاهين، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mu = 70 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq 70$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبارثنائي الاتجاه فإن منطقة الرفض ستكون على جانبين كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-1: منطقة الرفض في حالة الاختبار ثنائي الاتجاه عند مستوى معنوية 0.05.



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

بما توزيع المجتمع طبيعي فإننا سنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبارثنائي الاتجاه فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} -Z_{0.5-\alpha/2} \leq \boldsymbol{Z_C} \leq +Z_{0.5-\alpha/2} & \Longrightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} < -Z_{0.5-\alpha/2} \vee Z_C > +Z_{0.5-\alpha/2} & \Longrightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Longrightarrow 0.5 - 0.025 = 0.4750$$

$$\Longrightarrow Z_{0.5-\alpha/2} = 1.96$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$\boldsymbol{Z_C} = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{73 - 70}{10/\sqrt{81}} = 2.7$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $2.7 > 1.96$ أي أن : $\boldsymbol{Z_C} > +Z_{0.5-\alpha/2}$

وهذا يعني رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة على أساس أن معدل الحضور قد تغير هذا الموسم.

4-2- الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين للمتوسط

لتوضيح هذا النوع من الاختبار والكيفية التي يتم بها تنفيذ خطواته نضع المثال الموالي:

مثال 5:

بلغ معدل تسجيل مترشحي البكالوريا في كلية العلوم الاقتصادية بجامعة المسيلة 11.5 وفي السنوات الأخيرة زاد الطلب على التسجيل في هذه الكلية فرفعت الإدارة معدل القبول للدراسة بها.

تم اختيار عينة عشوائية من الطلبة المسجلين بالكلية هذا العام حجمها 49 طالبا فأعطى معدل التسجيل 11.80 بانحراف معياري 1.5 .

- قم باختبار الفرضية التي تقول بأن معدل القبول قد ارتفع عند مستوى معنوية 5 %.

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

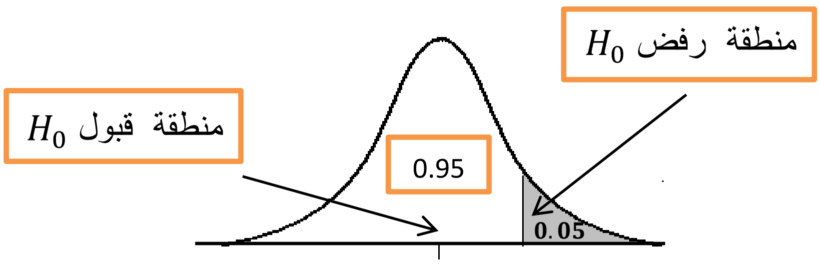
بما أن المسألة تضمنت اتجاها محددا وهو ارتفاع معدل قبول التسجيل بالكلية ، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليمين (أكبر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mu = 11.5 \longleftrightarrow H_1: \mu > 11.5$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليمين كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-2: منطقة الرفض في حالة الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين عند مستوى معنوية 0.05.



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z_C} \leq +Z_{\,0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} > +Z_{0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \Longrightarrow 0.5 - 0.05 = 0.4500$$

$$\Longrightarrow Z_{\,0.5-\alpha} = 1.645$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$\boldsymbol{Z_C} = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{11.80 - 11.50}{1.5/\sqrt{49}} = 1.4$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $1.645 > 1.4$ أي أن : $\boldsymbol{Z_C} < +Z_{0.5-\alpha}$

وهذا يعني عدم رفض الفرضية الصفريةH_0 ورفض الفرضية البديلة على أساس أن معدل التسجيل بالكلية لم يرتفع.

4-3- الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار للمتوسط

لتوضيح هذا النوع من الاختبار والكيفية التي يتم بها تنفيذ خطواته نضع المثال الموالي:

مثال 6:

لاحظت إدارة محطة بنزين أن معدل فترة انتظار السيارة للتزود بالوقود هو 4 دقائق، وأرادت أن تقلص من هذه الفترة فقامت بإعادة تنظيم صفوف الانتظار، فأخذت عينها حجمها 9 سيارات وبعد أن دونت فترات الانتظار وجدت أن معدل فترات الانتظار هو 3 دقائق بانحراف معياري 30 ثانية.

المطلوب : اختبر قرار إدارة المحطة لتخفيض فترات الانتظار عند مستوى معنوية 0.01 بافتراض أنها تتبع التوزيع الطبيعي.

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

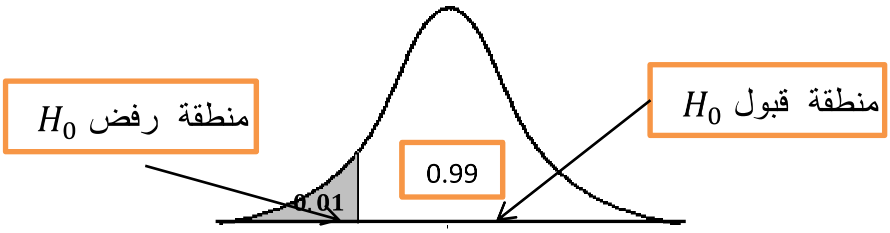
بما أن الإدارة تهدف إلى تخفيض فترة انتظار السيارة للتزود بالوقود ، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليسار (أصغر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mu = 4 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \mu < 4$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدمH_0)**

مستوى الدلالة هو 0.01، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليسار كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-3: منطقة الرفض في حالة الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار عند مستوى معنوية 0.01



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

المجتمع طبيعي التوزيع وحجم العينة صغير (أقل من 30) وتباين المجتمع مجهول وبالتالي فإن المتغيرة تتبع توزيع ستيودنت وستحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة t ، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} t_C \geq -t_{0.99,10-1} & \Longrightarrow \text{عدم رفض } H_0 \\ t_C < -t_{0.99,10-1} & \Longrightarrow \text{رفض } H_0 \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبارt**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.01 \Longrightarrow \Longrightarrow 1 - 0.01 = 0.99$$

$$\Longrightarrow -t_{0.99,10-1} = -2.821$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$t_C = \frac{\overline{X} - \mu}{S_{\overline{X}}} = \frac{3-4}{0.5/\sqrt{9}} = -6.02$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : -6.02 > -2.821 أي أن : $t_C < -t_{0.99,10-1}$

وهذا يعني رفض الفرضية الصفرية H_0 وقبول الفرضية البديلة على أساس أن القرار بإعادة تنظيم صفوف الانتظار أدى إلى تخفيض فترات انتظار السيارات للتزود بالبنزين.