5- اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة

إن الخطوات المتبعة في اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي هي نفسها التي سيتم استخدامها في اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة، حيث نهتم بدراسة النسبة ṕ ، وهي النسبة في العينة التي تملك الخاصية المطلوبة.

وكما ذكرنا آنفا أن توزيع المعاينة للنسبة يتبع إما التوزيع الثنائي أو التوزيع الهندسي الزائد، لكن عندما يكون حجم العينة كبيرا ومع توفر الشروط ($n.p > 5$, $n.q > 5$) ، وبالاعتماد على نظرية النهاية المركزية فإنه يمكن تقريب توزيع المعاينة للنسبة من التوزيع الطبيعي.

لذلك سوف نستخدم التوزيع الطبيعي دائما في اختبار الفرضيات حول النسبة (P). وتكون قيمة الإحصاءة Z كما أشرنا لها في فصل توزيع المعاينة كما يلي:

$$Z = \frac{\acute{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

أما الفرضية الصفرية فتكون كما يلي: $H_0: P = p_0$

في حين أن الفرضية البديلة تأخذ الحالات الثلاث كما رأينا في اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط، وذلك حسب نوع الاختبار، تبعا لذلك يتم استخراج قاعدة القرار كما يلي:

الجدول 4-3: قاعدة القرار لاختبار النسبة في الحالات الثلاث

نوع الاختبار	الفرضية البديلة	قاعدة القرار
أحادي الاتجاه من اليمين	$H_1: P > p_0$	$\begin{cases} \boldsymbol{Z_C} \leq + Z_{0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} > + Z_{0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$
أحادي الاتجاه من اليسار	$H_1: P < p_0$	$\begin{cases} \boldsymbol{Z_C} > - Z_{0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} \leq - Z_{0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$
ثنائي الاتجاه	$H_1: P \neq p_0$	$\begin{cases} -Z_{0.5-\alpha/2} \leq \boldsymbol{Z_C} \leq + Z_{0.5-\alpha/2} \Longrightarrow H_0 \text{ عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} < -Z_{0.5-\alpha/2} \vee Z_C > + Z_{0.5-\alpha/2} \Longrightarrow H_0 \text{ رفض} \end{cases}$

مثال 7:

أبدت إدارة التسويق في مؤسسة ما فكرا جديدا يسمى " البيع بروح الفريق " وفيه تستخدم الهاتف في عرض السلع على الزبائن قبل البيع، يدعي فريق البيع أنه يمكنه زيادة نسبة مكالمات البيع الناجحة إلى أكثر من 18 %، وهي نسبة البيع الحالية والمحققة، ارتأت الإدارة أن تستخدم فريق البيع ولكن في البداية اشترطت أن تكون نسبة مكالمات البيع الناجحة يجب أن تتعدى النسبة الحالية للمبيعات.

- في اختبار ما ، جرب فريق البيع مع عينة من 100 مكالمة بيع نجح في إتمام 22 عملية بيع
- هل هذه العينة تظهر أن هناك تحسنا قد حدث مع فريق البيع عند مستوى معنوية 0.05 ؟

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

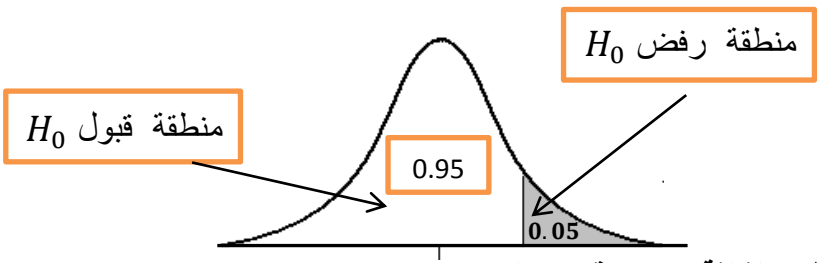
بما أن المسألة تضمنت اتجاها محددا وهو زيادة نسبة مكالمات البيع الناجحة ، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليمين (أكبر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: P = 0.18 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: P > 0.18$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليمين كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-4: منطقة الرفض في حالة اختبار النسبة أحادي الاتجاه من اليمين عند مستوى معنوية 0.05



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z_C} \leq + Z_{\,0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} \;>\; + Z_{0.5-\alpha} & \Longrightarrow \;\; H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \implies \implies 0.5 - 0.05 = 0.4500 \implies Z_{\,0.5-\alpha} = 1.645$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$\acute{p} = \frac{22}{100} = 0.22$$

$$Z_c = \frac{\acute{p} - \,p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - \,p_0)}{n}}} = \frac{0.22 - 0.18}{\sqrt{\frac{0.18(1 - \,0.18)}{100}}} = 1.05$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $1.05 < 1.645$ أي أن : $\boldsymbol{Z_C} < + Z_{0.5-\alpha}$

وهذا يعني عدم رفض الفرضية الصفرية H_0 ورفض الفرضية البديلة أي أن الفكر الجديد في البيع المنتهج من قبل إدارة التسويق لم يؤد إلى تحسن حقيقي.

مثال 8:

توصلت دراسة بإحدى الجامعات أن 40 % من الطلبة يغيرون تخصصاتهم بعد السنة الأولى من تسجيلهم ولقد تم أخذ عينة عشوائية من 100 طالب وتبين أن 38 طالبا غيروا تخصصهم بعد تلك السنة.

فهل يمكن الادعاء بأن هناك انخفاض معنوي في نسبة الطلاب الذين يغيرون تخصصهم عند مستوى معنوية 10 %.

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

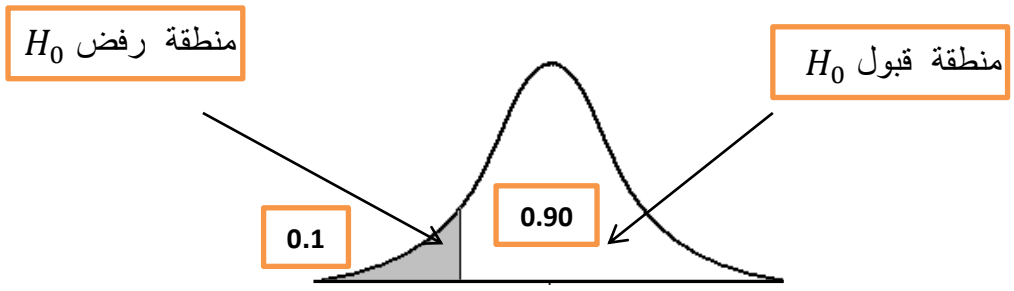
بما أن المسألة تضمنت اتجاها محددا وهو الانخفاض في نسبة الطلاب الذين يغيرون تخصصهم، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليسار (أصغر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \mathrm{P} = 0.40 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \mathrm{P} < 0.40$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.10، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليسار فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليسار كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-5: منطقة الرفض في حالة اختبار النسبة أحادي الاتجاه من اليسار عند مستوى معنوية 0.1



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z_C} \geq -Z_{\,0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} < -Z_{0.5-\alpha} & \Longrightarrow H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.10 \Longrightarrow \Longrightarrow 0.5 - 0.10 = 0.4000$$

$$\Longrightarrow -Z_{\,0.5-\alpha} = -1.28$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$\acute{p} = \frac{38}{100} = 0.38$$

$$Z_c = \frac{\acute{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}} = \frac{0.38 - 0.40}{\sqrt{\frac{0.40(1 - 0.40)}{100}}} = -0.408$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $-0.408 > -1.28$ أي أن : $\boldsymbol{Z_C} > -Z_{0.5-\alpha}$

وهذا يعني قبول الفرضية الصفرية ورفض الفرضية البديلة أي أنه لا يمكن الادعاء بأن هناك انخفاض معنوي في نسبة الطلاب الذين يغيرون تخصصهم عند مستوى معنوية 10 %.

مثال 9:

تبين لشركة حضنة حليب من دراسات سابقة أن 80 % من المستهلكين يفضلون أكياس الحليب العادي على أكياس حليب البقر ، وفي استقصاء جديد تم على 500 مستهلك وجد أن 420 يفضلون أكياس الحليب العادي .

- عند مستوى ثقة 95 % ، هل بيانات العينة تؤيد ادعاء الشركة؟

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

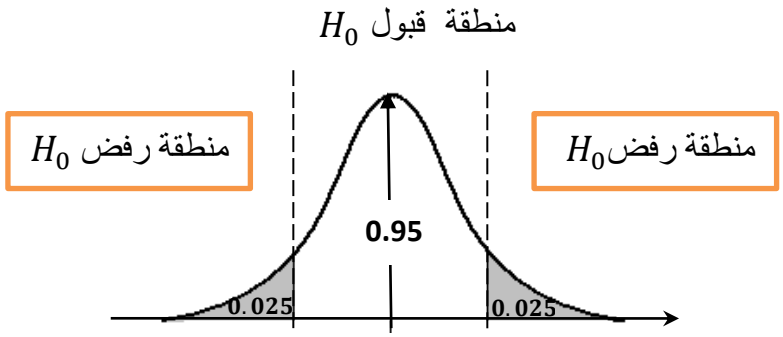
بما أن المسألة لم تتضمن اتجاها محددا حيث أشارت معطيات المثال إلى تحقق النسبة على مستوى العينة أم لا، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاهين، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: P = 0.80 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: P \neq 0.80$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبار ثنائي الاتجاه فإن منطقة الرفض ستكون على جانبين كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل 4-6: منطقة الرفض في حالة اختبار النسبة ثنائي الاتجاه عند مستوى معنوية 0.05



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء على الإحصاءة Z ، وكون الاختبار ثنائي الاتجاه فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

- $\begin{cases} -Z_{0.5-\alpha/2} \leq \boldsymbol{Z_C} \leq +Z_{0.5-\alpha/2} & \Longrightarrow H_0 \text{عدم رفض} \\ \boldsymbol{Z_C} < -Z_{0.5-\alpha/2} \vee Z_C > +Z_{0.5-\alpha/2} & \Longrightarrow H_0 \text{رفض} \end{cases}$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Longrightarrow 0.5 - 0.025 = 0.4750$$

$$\Longrightarrow Z_{0.5-\alpha/2} = 1.96$$

ثانيا: القيمة الفعلية:

$$\acute{p} = \frac{420}{500} = 0.84$$

$$Z_c = \frac{\acute{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.84 - 0.80}{\sqrt{\frac{0.80(1-0.80)}{100}}} = 1$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $-1.96 > 1 > +1.96$، أي أن: $-Z_{0.5-\alpha/2} \leq Z_C \leq +Z_{0.5-\alpha/2}$

وهذا يعني قبول الفرضية الصفرية $_0$ ورفض الفرضية البديلة أي أن ادعاء الشركة بأن 80 % من المستهلكين يفضلون أكياس الحليب العادي على أكياس حليب البقر هو ادعاء صحيح.

6 - اختبار الفرضيات المتعلقة بتباين المجتمع

لاختبار الفرضيات حول التباين نسلك نفس الخطوات المتبعة في اختبار الفرضيات السابقة، غير أن مجال قبول أو رفض الفرضية الصفرية يتحدد بالاعتماد على توزيع كاي تربيع بدرجات حرية (n -1)، وتكون دالة الاختبار هي: $x^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}$.

σ_0^2: هي قيمة σ^2 المحددة بالفرضية الصفرية (المبدئية)

n: حجم العينة.

S^2: تباين العينة

أما الفرضية الصفريةH_0 فتكون كما يلي: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

في حين أن الفرضية البديلة تأخذ الحالات الثلاث كما رأينا في اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط، أو بالنسبة، وذلك حسب نوع الاختبار، تبعا لذلك يتم استخراج قاعدة القرار كما يلي:

الجدول 4-4: قاعدة القرار لاختبار التباين في الحالات الثلاث

نوع الاختبار	الفرضية البديلة	قاعدة القرار
أحادي الاتجاه من اليمين	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\begin{cases} X^2 \leq x^2_{1-\alpha,\nu} & \Longrightarrow H_0$ عدم رفض $\\ X^2 > x^2_{1-\alpha,\nu} & \Longrightarrow H_0$ رفض $\end{cases}$
أحادي الاتجاه من اليسار	$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\begin{cases} X^2 > x^2_{1-\alpha,\nu} & \Longrightarrow H_0$ عدم رفض $\\ X^2 \leq x^2_{1-\alpha,\nu} & \Longrightarrow H_0$ رفض $\end{cases}$
ثنائي الاتجاه	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\begin{cases} x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1} \leq X^2 \leq x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} & \Longrightarrow H_0$ عدم رفض $\\ X^2 < x^2{}_{\frac{\alpha}{2};n-1} \vee X^2 > x^2{}_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} & \Longrightarrow H_0$ رفض $\end{cases}$

مثال 10:

تدعي لجنة مختصة أن منتجات شركة صناعة العطور لها مدة استعمال بعد إنتاجها يزيد انحرافها المعياري عن شهرين، ولاختبار هذا الادعاء أخذت عينة حجمها 20 فكان متوسط مدة استعمالها هو 3 سنوات وانحرافها المعياري 3 أشهر.

- هل النتائج المتوصل إليها من خلال العينة تفند هذا الادعاء أم تؤيده عند مستوى معنوية 5 % ؟

الحل:

- **الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات**

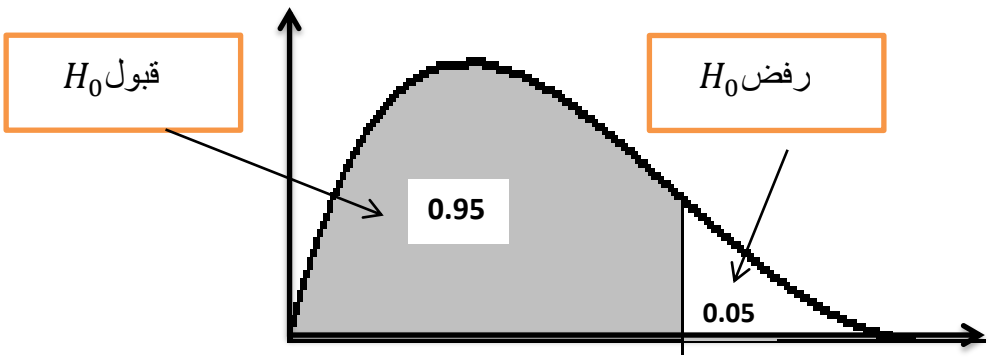
بما أن المسألة تضمنت اتجاها محددا وهو زيادة الانحراف المعياري لمدة استعمالها عن شهرين فإن الفرضية البديلة ذات اتجاه واحد ومن اليمين (أكبر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

- **الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)**

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين فإن منطقة الرفض ستكون على جانب واحد ومن اليمين كما هو موضح في الشكل الموالي

الشكل 4- 7: اختبار التباين أحادي الاتجاه من اليمين عند مستوى معنوية 0.05.



- **الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار**

سيتم قاعدة القرار بناء على الإحصاءة x^2، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} X^2 \leq x^2_{0.95,19} & \Longrightarrow H_0 \text{عدم رفض} \\ X^2 > x^2_{0.95,19} & \Longrightarrow H_0 \text{رفض} \end{cases}$$

- **الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاءة الاختبار**

أولا: القيمة الجدولية

$$\mathrm{n} = 20 \Longrightarrow \nu = 20 - 1 = 19$$

فدرجة الحرية إذن هي 19، أما قيمة كاي تربيع المناظرة لها عند مستوى ثقة 0.95 من الجدول هي: $x^2_{0.95\,,19} = 30.14$

ثانيا: القيمة الفعلية

$$x^2 = (\mathrm{n} - 1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} = (20 - 1)\frac{3^2}{2^2} = 42.75$$

- **الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار**

نلاحظ أن : $42.75 > 30.144$ أي أن : $X^2 > x^2_{1-\alpha,\nu}$

وهذا يعني رفض الفرضية الصفرية H_0 وقبول الفرضية البديلة أي أن النتائج المتوصل إليها من خلال العينة تؤيد أدعاء اللجنة عند مستوى معنوية 5 %.