Université de Mohammed Boudiaf, M'sila — Faculté des mathématiques
L2 (S3) : 2020/2021 — Mr. Bougherara Brahim

Module : **Topologie des espaces métriques**

Chapitre I : Espaces métriques (cours 01)

1 Définitions, Propriétés et exemples fondamentales

Soit E un ensemble non vide.

1.0.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. Une distance d sur E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait pour tout $x, y, z \in E$:

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (Séparation)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Le couple (E, d) s'appelle espace métrique.

☞ **Exemple 1.1.** L'exemple fondamental d'un espace métrique est l'espace $\mathbb{R}$ avec la distance définie par d(x,y) = |x-y|. Cette distance s'appelle distance usuelle sue $\mathbb{R}$.

☞ Il est facile de vérifie que d est une distance. En effet, on a pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow |x - y| = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.
3. $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Deux propriétés importantes de la distance sont données par la proposition suivante :

Proposition 1.0.1. Soit (E, d) un espace métrique. Alors la distance d satisfait les deux propriétés suivantes :

a. La distance d est positive : $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in E$.
b. Pour tout $x, y, z \in E$:

$$\boxed{|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)} \tag{1.1}$$

Démonstration. $\boxed{\text{a}}$ Soient $x, y \in E$. En utilisant successivement les propriétés $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$, on obtient

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y).$$

D'où $d(x,y) \geq 0$.

$\boxed{\text{b}}$ Soient $x, y, z \in E$. On a d'après $\boxed{2}$:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

d'où par $\boxed{2}$, on obtient

$$d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y).$$

En changeant le rôle entre x et y et par $\boxed{2}$, on a

$$d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y).$$

On en déduit que

$$\boxed{|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)}. \tag{1.2}$$

$\square$

☞ Le nombre positive $d(x,y)$ s'appelle distance entre x et y ou distance de x à y.

☞ Pour vérifie que d est une distance, en générale seul, la propriété $\boxed{3}$ qui pose un difficulté (parfois grande) contrairement aux propriétés $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ qui sont faciles à vérifier .

☞ **Exemple 1.2.** Soit $d : E \times E \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$\forall x, y \in E : d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

Montrons que d est une distance. Soient $x, y, z \in E$. On a

$\boxed{1}$ Si $x = y$ alors $d(x,y) = 0$ (par définition) et si $x \neq y$ alors $d(x,y) = 1 \neq 0$. D'où

$$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

$\boxed{2}$ On a $d(y,x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \neq x \\ 0 & \text{si} \quad y = x \end{cases} = d(x,y)$

$\boxed{3}$ • Si $x = y$ alors

$$0 = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)}_{\geq 0} + \underbrace{d(x,z)}_{\geq 0}.$$

• Si $x \neq y$ alors $x \neq z$ ou $y \neq z$. D'où

$$1 = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z) + d(z,y)}_{=1 \vee 2}.$$

Dans les deux cas, on a : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Donc d est une distance sur E. Elle s'appelle distance discrète.

1.1 Exemples de distances fondamentales

1.1.1 Distances sur $\mathbb{R}^n$

☞ **Exemple 1.3.** La distance notée d_1, est défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_1(x,y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|} \tag{1.3}$$

où $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_N) \in \mathbb{R}^n$ Vérifions que d_1 est bien une distance. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

1. On a

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad |x_i - y_i| = 0, \ \forall i = 1, ...n. \\ &\Longleftrightarrow \quad x_i = y_i, \ \forall i = 1, ..., n. \\ &\Longleftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a

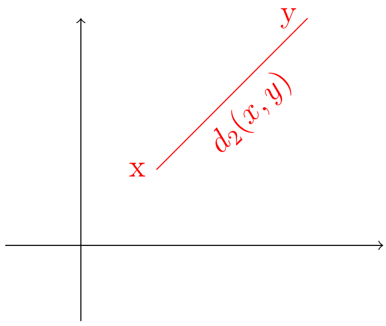
$$d_1(x,y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x).$$

3. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Vérifions l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\leq \quad \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |x_i - y_i|) \\ &= \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_1(x,z) + d_1(z,y). \end{aligned}$$

☞ **Exemple 1.4.** On définit sur $\mathbb{R}^n$ la distance usuelle (la distance euclidienne), notée d_2 par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_2(x,y) \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \tag{1.4}$$



On vérifie que d_2 est une distance.

$\boxed{1}$ On a

$$d_2(x,y)=0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad |x_i-y_i|^2=0,\ \forall i=1,\dots n.$$
$$\Longleftrightarrow\quad x_i=y_i,\ \forall i=1,\dots,n.$$
$$\Longleftrightarrow\quad x=y$$

$\boxed{2}$ Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$. On a

$$d_2(x,y)\overset{\text{def}}{=}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|^2\right)^{1/2}=d_2(y,x).$$

$\boxed{3}$ Pour montrer l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Minkowski suivant :
Pour tout $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}} \tag{1.5}$$

On a pour tout $x,y,z\in\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
d_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2} &= \left(\sum_{i=1}^{n}|(x_i-z_i)+(z_i-y_i)|^2\right)^{1/2}\\
&\overset{(1.5)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\right)^{1/2}\\
&= d_2(x,z)+d_2(z,y).
\end{aligned}$$

☞ **Exemple 1.5.** La distance notée d_1, est défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}^n : d_1(x,y)\overset{\text{def}}{=}\max_{i=1}|x_i-y_i|} \tag{1.6}$$

Vérifions que d_∞ est bien une distance. On a pour tout $x,y\in\mathbb{R}^n$:

$\boxed{1}$ On a

$$\begin{aligned} d_1(x,y)=0 \iff \max_{i=1}|x_i-y_i|=0 &\iff |x_i-y_i|=0,\ \forall i=1,...n.\\ &\iff x_i=y_i,\ \forall i=1,...,n.\\ &\iff x=y \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$. On a

$$d_\infty(x,y)\overset{\text{def}}{=}\max_{i=1}|x_i-y_i|=\max_{i=1}|x_i-y_i|=d_\infty(y,x).$$

$\boxed{3}$ Soient $x,y,z\in\mathbb{R}^n$. Vérifions l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y)=\max_{i=1}|x_i-y_i| &= \max_{i=1}|x_i-z_i+z_i-y_i|\\ &\leq \max_{i=1}\left(|x_i-z_i|+|x_i-y_i|\right)\\ &\leq \max_{i=1}|x_i-z_i|+\max_{i=1}|z_i-y_i|=d_\infty(x,z)+d_\infty(z,y). \end{aligned}$$

1.1.2 Distances sur $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$

Notons que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle borné $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit sur cette espace les trois distances suivantes

$$\boxed{d_1(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x} \tag{1.7}$$

$$\boxed{d_2(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}} \tag{1.8}$$

$$\boxed{d_\infty(f,g)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|} \tag{1.9}$$

pour tout $f,g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On vérifie que d_2 est une distance sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Les autres distances sont laissées à l'étudiant. Soient $f,g,h\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

$\boxed{1}$ On a :

$$\begin{aligned} d_2(f,g)=0 \iff \int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x=0 &\iff |f(x)-g(x)|=0,\quad \forall x\in[a,b]\\ &\iff f(x)=g(x)\quad \forall x\in[a,b]\\ &\iff f=g. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Pour la symétrie, c'est évidente.

3 Pour l'inégalité triangulaire, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivant

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \ \forall f, g, \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}).} \tag{1.10}$$

On a

$$\begin{aligned}
d_2(f,g)^2 &= \int_a^b |f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x = \int_a^b |(f-h)+(h-g)|^2\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b (|f-h|+|h-g|)^2\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b |f-g|^2\mathrm{d}x + \int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x + 2\int_a^b |f-h||h-g|\mathrm{d}x \\
&\overset{(1.10)}{\leq} \int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x + \int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x + 2\left(\int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&= \left(\left(\int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right)^2 \\
&= (d_2(f,h)+d_2(h,g))^2
\end{aligned}$$

Exercice 1. Est ce que d définit une distance sur $\mathbb{R}$ dans tous les cas suivants :

1 $|d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

2 $|d(x,y) = |x^2 - y^2|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

3 $d(x,y) = |\sin x - \sin y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit d une distance sur E. Posons $\delta = \frac{d}{1+d}$. Montrer que δ définit une distance sur E.

Exercice 3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective et soit d une distance sur F. On pose

$$\delta(x,y) := d(f(x), f(y)), \quad \forall x, y \in E.$$

Montrer que δ est une distance sur E.

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique. Soit $\varphi : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante telle que

$$\varphi(0) = 0, \ \forall t > 0 : \varphi(t) > 0, \quad \forall t, s \geq 0 : \varphi(t+s) \leq \varphi(t) + \varphi(s), \ .$$

1 Démontrer que l'application $\varphi \circ d$ définit une distance sur E.

2 Déduire que les applications suivantes définissent des distances sur $\mathbb{R}$:

$$d^\alpha, \ \ 0 < \alpha \leq 1, \qquad \ln(1+d), \qquad \min\{1, d\}.$$