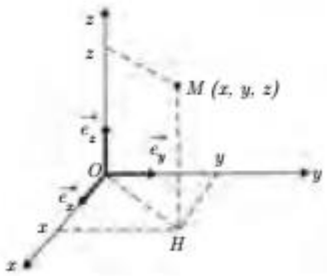
$\boxed{1}$

Calcul vectoriel

1.1. REPRÉSENTATION D'UN POINT DANS L'ESPACE

On se placera toujours dans un repère orthonormé $Oxyz$, de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

1.1.1 Coordonnées cartésiennes



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Si M se déplace, on a :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$$

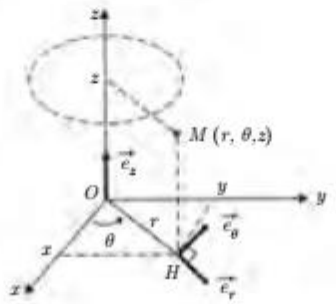
$$\overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(\mathrm{d}\overrightarrow{OM})^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

1.1.2 Coordonnées cylindriques

Vecteurs unitaires : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$;

On définit M par sa coordonnée z et par les coordonnées polaires r, θ de son projeté sur le plan xOy.



$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM}^2 = r^2 + z^2$$

$$(\mathrm{d}\overrightarrow{OM})^2 = \mathrm{d}r^2 + (r\,\mathrm{d}\theta)^2 + \mathrm{d}z^2$$

1.1.3 Coordonnées sphériques

Vecteurs unitaires : $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$.

On définit M par la longueur

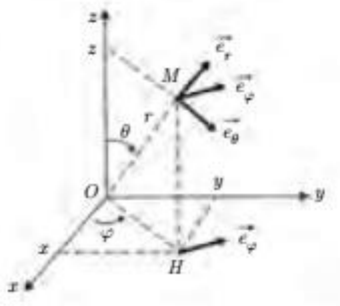
$r = OM$ et les deux angles φ et θ.

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{OM}^2 = r^2$$

$$(\mathrm{d}\overrightarrow{OM})^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2$$

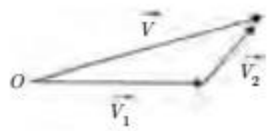


Bien distinguer la coordonnée polaire $r = OM$ et la coordonnée sphérique $r = OM$.

1.2. VECTEURS

Dans cet ouvrage, la norme d'un vecteur $\vec{V}$, habituellement écrite $\|\vec{V}\|$ sera désignée tout simplement par la lettre V pour ne pas surcharger l'écriture, sauf nécessité.

1.2.1 Somme de deux vecteurs



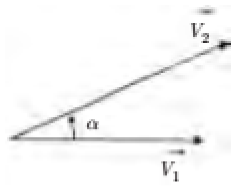
$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

$\vec{V} = X_1\vec{e}_x + Y_1\vec{e}_y + Z_1\vec{e}_z$

$\vec{V}_2 = X_2\vec{e}_x + Y_2\vec{e}_y + Z_2\vec{e}_z$

$\vec{V} = (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)\vec{e}_x + (\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2)\vec{e}_y + (\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2)\vec{e}_z$

1.2.2 Produit scalaire



$S = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ S est un scalaire

Par définition $S = V_1 \ V_2 \cos\alpha$

où l'angle α est défini par $\alpha = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.

- Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul.
- Pour les vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ on a :

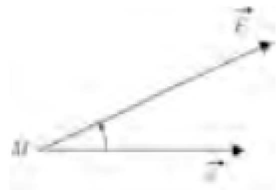
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

Expression cartésienne du produit scalaire

$$S = (X_1\vec{e}_x + Y_1\vec{e}_y + Z_1\vec{e}_z) \cdot (X_2\vec{e}_x + Y_2\vec{e}_y + Z_2\vec{e}_z) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

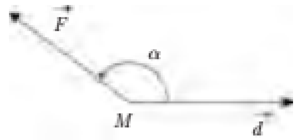
Exemple 1. Travail d'une force



Si $\vec{F}$ est la force et $\vec{d}$ le déplacement,

on a : $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\,d\cos\alpha$

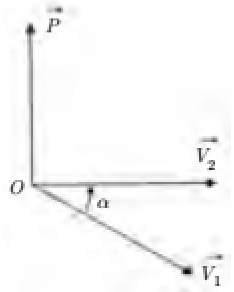
Si $\vec{F} \perp \vec{d}$, le travail est nul.



Si $\alpha = (\vec{d}, \vec{F})$ est aigu, le travail est positif, il s'agit d'un travail moteur.

Si α est obtus, le travail est négatif, il s'agit d'un travail résistant.

1.2.3 Produit vectoriel



$\vec{P} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

Par définition, $\vec{P}$ est un vecteur

– perpendiculaire au plan $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$,

– orienté de telle sorte que le trièdre $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{P}$ soit direct,

– de norme $V_1 V_2 |\sin \alpha|$
où $\alpha = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.

- Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul.
- Pour les vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, on a :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\|\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y\| = \|\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z\| = \|\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x\| = 1$$

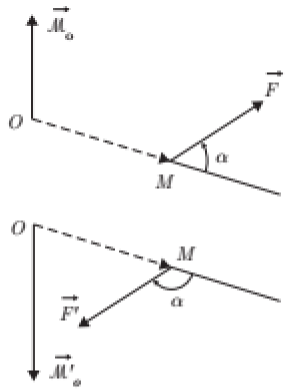
Expression cartésienne du produit vectoriel :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= (X_1\vec{e}_x + Y_1\vec{e}_y + Z_1\vec{e}_z) \wedge (X_2\vec{e}_x + Y_2\vec{e}_y + Z_2\vec{e}_z)\\ &= (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1)\vec{e}_x + (X_2 Z_1 - X_1 Z_2)\vec{e}_y + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\vec{e}_z\end{aligned}$$

Exemple 2. Moment d'une force par rapport à un point O

On écrit :

$$\mathcal{M}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$



Le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$ est toujours orienté de telle sorte que le trièdre $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{F}$, $\mathcal{M}_O$ soit direct.

1.2.4 Vecteurs polaires et vecteurs axiaux

Un vecteur polaire est indépendant du sens positif ou négatif de l'axe qui constitue son support.
Par exemple, une force est un vecteur polaire (on dit aussi « vecteur vrai ») : le choix d'un sens pour son support ne modifie en rien sa direction, ni son sens.

Un vecteur axial (on dit aussi « pseudo-vecteur ») se distingue du vecteur polaire dans la mesure où, une fois que sa direction et sa norme sont fixés, c'est le sens de rotation autour de son axe-support qui finit de le déterminer.

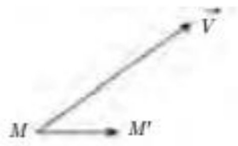
Cela correspond au choix du trièdre direct pour exprimer le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$. Il arrive d'ailleurs qu'un vecteur axial soit représenté avec une flèche $\smile$ (par exemple $\breve{\mathscr{M}}$).

1.3. CIRCULATION D'UN VECTEUR

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ et un déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\mathrm{d}M}$, noté aussi $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$.

■ Circulation élémentaire

$\boxed{\mathrm{d}\,\mathscr{C} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}}$ (scalaire) (1.1)



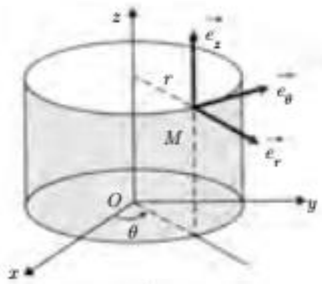
Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

$$\mathrm{d}\,\mathscr{C} = V_x\,\mathrm{d}x + V_y\,\mathrm{d}y + V_z\,\mathrm{d}z$$

Coordonnées cylindriques :

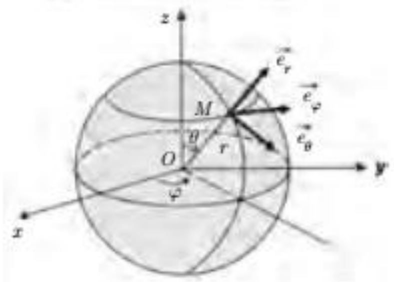


$$\vec{V} = V_r\,\vec{e}_r + V_\theta\,\vec{e}_\theta + V_z\,\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

$$\mathrm{d}\,\mathscr{C} = V_r\,\mathrm{d}r + V_\theta r\,\mathrm{d}\theta + V_z\,\mathrm{d}z$$

Coordonnées sphériques :



$$\vec{V} = V_r\,\vec{e}_r + V_\theta\,\vec{e}_\theta + V_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

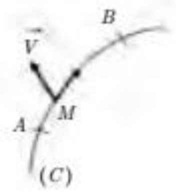
$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\mathrm{d}\,\mathscr{C} = V_r\,\mathrm{d}r + V_\theta r\,\mathrm{d}\theta + V_\varphi r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

■ Circulation sur un chemin

On considère un trajet AB sur une courbe (C). Il convient de fixer le sens de parcours sur la courbe (C).

$$\mathscr{C}_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \mathrm{d}\mathscr{C} = \int_{\widehat{AB}} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{M} \quad (1.2)$$



Si le chemin est fermé :

$$\mathscr{C} = \oint \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{M} \quad (1.3)$$

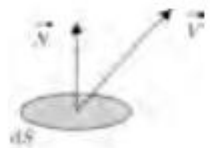
Par exemple, si le champ de vecteurs est un champ de forces, la circulation n'est autre que le travail.

1.4. FLUX D'UN VECTEUR

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ et une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$.

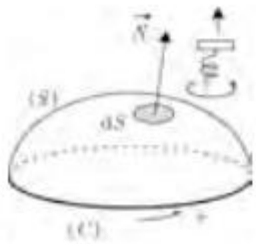
■ Flux élémentaire

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{V} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S} \quad (1.4)$$



où $\vec{N}$ est le vecteur unitaire normal à la surface $\mathrm{d}S$, qu'il convient de bien orienter, en tenant compte des conventions qui vont être précisées.

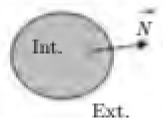
■ Flux à travers une surface ouverte



Soit (C) le contour sur lequel s'appuie la surface (S).
Une fois (C) orienté, le sens du vecteur unitaire $\vec{N}$ est défini par la règle du tire-bouchon (sens dans lequel avance le tire-bouchon quand on le tourne dans le sens positif choisi sur (C)).
On a alors :

$$\Phi = \iint_S \mathrm{d}\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S \quad (1.5)$$

Si la surface est fermée, on ne peut pas définir le contour (C). Par convention $\vec{N}$ est orienté de l'intérieur vers l'extérieur.



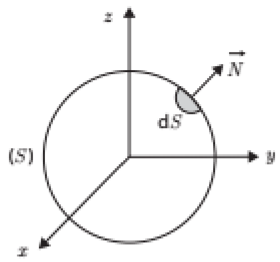
Exemple 3. Champ à symétrie sphérique

Calculer le flux du vecteur $V(M) = f(r)\vec{e}_r$ à travers une sphère de centre O et de rayon r.

On a tout simplement :

$$\Phi = \oiint_S \vec{V} \cdot \vec{N}\, \mathrm{d}S = \oiint_S f(r)\, \mathrm{d}S$$
$$= 4\pi r^2 f(r)$$

car $f(r)$ est constant quand on se déplace sur la sphère.

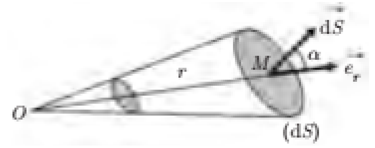


1.5. ANGLE SOLIDE

■ Angle solide élémentaire

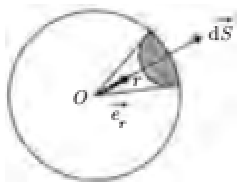
Par définition l'angle solide dΩ sous lequel on voit une surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ à partir d'un point donné O est :

$$\boxed{\mathrm{d}\Omega = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}S} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mathrm{d}S \cos\alpha}{r^2}} \quad (1.6)$$



Dans le cas où l'élément dS est pris sur la sphère de centre O et de rayon r, on a tout simplement :

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2}\vec{N} \cdot \vec{e}_r = \frac{\mathrm{d}S}{r^2}$$



Exemple 4.

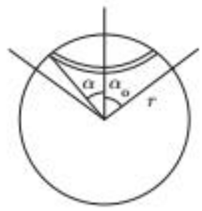
- Espace entier : $\Omega = \dfrac{1}{r^2}\oiint_S \mathrm{d}S = \dfrac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$ stérad.
- Demi-espace entier : $\Omega = 2\pi$ stérad.

• Cône de demi-angle au sommet α_0 :

$$\begin{aligned} dS &= 2\pi r \sin\alpha \, r \, d\alpha \\ &= 2\pi r^2 \sin\alpha \, d\alpha \end{aligned}$$

$$\Omega = \iint_S \frac{dS}{r^2} = \int_0^{\alpha_0} 2\pi \sin\alpha \, d\alpha$$

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha_0)$$



1.6. OPÉRATEURS VECTORIELS

1.6.1 Gradient

L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ (ou encore $\vec{\nabla}$, opérateur vectoriel polaire nabla) associe à une fonction scalaire $f(x, y, z)$ un vecteur de composantes $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Comme : $$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

on en déduit

$$\boxed{df = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) \cdot \overrightarrow{dM}} \tag{1.7}$$

relation que l'on utilise pour définir le gradient dans un système de coordonnées quelconques.

Coordonnées cartésiennes : $f = f(x, y, z)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Coordonnées cylindriques : $f = f(r, \theta, z)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}\, f &= (\overrightarrow{\text{grad}}\, f)_r \, \vec{e}_r + (\overrightarrow{\text{grad}}\, f)_\theta \, \vec{e}_\theta + (\overrightarrow{\text{grad}}\, f)_z \, \vec{e}_z \\ \overrightarrow{dM} &= dr \, \vec{e}_r + r \, d\theta \, \vec{e}_\theta + dz \, \vec{e}_z \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}f = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}\right) = (\mathrm{grad}\, f)_r\, \mathrm{d}r + (\mathrm{grad}\, f)_\theta r\, \mathrm{d}\theta + (\mathrm{grad}\, f)_z\, \mathrm{d}z$$

Or $$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{r\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{matrix}$$

Coordonnées sphériques : $f = f(r, \theta, \varphi)$

Un calcul analogue au précédent donne :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{r\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{matrix}$$

Propriétés :

Les surfaces de niveau sont définies par

$$f(x, y, z) = \mathrm{cte}.$$

Direction du gradient :

Soit une surface de niveau $f(x, y, z) = \lambda$.

Pour un point M se déplaçant sur cette surface, on a :

$$\mathrm{d}f = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ est donc normal à la surface de niveau.

Sens du gradient :

Soit deux points M_1, M_2 sur deux surfaces de niveau voisines $f = \lambda_1$ et $f = \lambda_2 > \lambda_1$.

On a
$$\mathrm{d}f = \lambda_2 - \lambda_1 = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} > 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Circulation d'un gradient :

$$\mathscr{C}_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_{f(A)}^{f(B)} \mathrm{d}f$$

$$\boxed{\int_{\widehat{AB}} \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = f(B) - f(A)} \qquad (1.8)$$

Elle est égale à la variation de la fonction f et ne dépend pas du chemin parcouru.

Cette relation facilite parfois le calcul de la circulation d'un vecteur le long du chemin. Encore faut-il que ce vecteur soit un gradient. On montre que, pour qu'un vecteur $\vec{V}$ soit un champ de gradient, il faut et il suffit que les dérivées partielles croisées de ses composantes soient égales deux à deux, soit :

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad \text{(voir exercices)}$$

Dans le cas particulier d'un parcours fermé, on a :

$$\boxed{\mathscr{C}_{AA} = \oint \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = 0} \qquad (1.9)$$

1.6.2 Divergence

L'opérateur div (ou encore $\vec{\nabla}\cdot$) associe à un vecteur $\vec{V}$ le produit scalaire de $\vec{\nabla}$ par ce vecteur

$$\text{div}\, \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad \text{(scalaire)}$$

Coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Coordonnées cylindriques :

On montre que div $\vec{V}$ peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques :

Une expression simplifiée de div $\vec{V}$ est donnée par :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial(V_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

Divergence et flux d'un vecteur :

Par définition, la différentielle du flux de $\vec{V}$ à travers une surface fermée (S) est reliée à la divergence de $\vec{V}$ par :

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = \operatorname{div}\vec{V}\,\mathrm{d}\tau} \qquad (1.10)$$

où $\mathrm{d}\tau$ représente un volume élémentaire : la divergence d'un champ vectoriel représente le flux de ce vecteur sortant de l'unité de volume.

On en déduit :

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{(\tau)} \operatorname{div} \vec{V}\,\mathrm{d}\tau$$

Cette formule, dite de Green-Ostrogradsky (voir paragraphe **1.8**) facilite parfois le calcul du flux d'un vecteur à travers une surface fermée.

1.6.3 Rotationnel

L'opérateur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ (ou encore $\vec{\nabla}\wedge$) associe à un vecteur $\vec{V}$ le produit vectoriel de $\vec{\nabla}$ par ce vecteur :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$

Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{matrix}$$

Coordonnées cylindriques :

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]$$

Coordonnées sphériques :

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta V_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right]$$

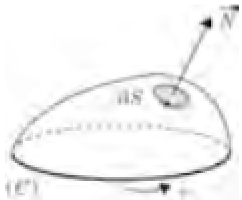
$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,V_\varphi)}{\partial r}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\,V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]$$

Rotationnel et circulation d'un vecteur :

Par définition, la différentielle de la circulation de $\vec{V}$ sur un contour fermé (C) est relié au rotationnel de $\vec{V}$ par :

$$\boxed{\mathrm{d}\,\mathscr{C} = \left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}} \qquad (1.11)$$



où dS est un élément d'une surface quelconque (S) qui s'appuie sur (C).

Cette relation permet de définir la coordonnée du rotationnel dans une direction quelconque de vecteur unitaire $\vec{n}$.
On en déduit :

$$\mathscr{C} = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \iint_{(S)} \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Cette formule, dite de Stokes (voir paragraphe **1.8**), facilite parfois le calcul de la circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé.

1.6.4 Laplacien

L'opérateur Laplacien (noté Δ) est défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Il peut s'appliquer à une fonction scalaire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ou à un vecteur :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{V} &= \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \\ &= \vec{e}_x \Delta V_x + \vec{e}_y \Delta V_y + \vec{e}_z \Delta V_z\end{aligned}$$

L'intérêt de tous ces opérateurs vectoriels est d'une part, de permettre une écriture concise des équations dites « locales » (exemple : équations de Maxwell), et d'autre part, de faciliter les calculs, grâce aux relations vectorielles qui existent entre eux, et aux transformations intégrales qu'ils permettent d'effectuer.

1.7. RELATIONS VECTORIELLES

Produit mixte : $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$ (1.12)

Double produit vectoriel : $\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ (1.13)

f et p étant des fonctions scalaires, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fp) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p + p\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f \tag{1.14}$$

$$\text{div}(f\vec{A}) = (\overrightarrow{\text{grad}}\,f)\cdot\vec{A} + f\,\text{div}\,\vec{A} \tag{1.15}$$

$$\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \tag{1.16}$$

$$\text{rot}(f\vec{A}) = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right)\wedge\vec{A} + f\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \tag{1.17}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \Delta f \tag{1.18}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = 0 \tag{1.19}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \vec{0} \tag{1.20}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A} \tag{1.21}$$

1.8. TRANSFORMATIONS INTÉGRALES

Théorème de Stokes (ou du rotationnel) :

$$\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}\ [(S)\text{ s'appuie sur }(C)]} \tag{1.22}$$

Théorème de Green-Ostrogradsky (ou de la divergence) :

$$\boxed{\oiint_{S\text{ fermée}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{d}S} = \iiint_{(\tau)} \text{div}\vec{A}\cdot\text{d}\tau} \tag{1.23}$$

[(τ) volume englobé par (S)]

Formule du gradient :

$$\boxed{\iiint_{(\tau)} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \,\mathrm{d}\tau = \oiint_{(S)} f\overrightarrow{\mathrm{d}S}} \qquad (1.24)$$

Formule du rotationnel :

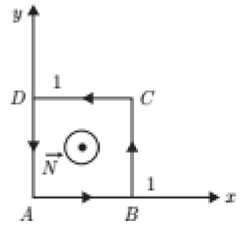
$$\boxed{\iiint_{(\tau)} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \,\mathrm{d}\tau = \oiint_{(S)} \overrightarrow{\mathrm{d}S} \wedge \vec{A}} \qquad (1.25)$$

Exemple 5.

On considère le champ vectoriel

$$\vec{V} = (ax + by)\vec{e}_x + (cx + fy)\vec{e}_y$$

et le contour fermé $ABCDA$ précisé sur la figure. Vérifier le théorème de Stokes en calculant la circulation de $\vec{V}$ sur ce contour.



On a d'une part :

$$\mathscr{C} = \oint_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_0^1 ax\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (c + fy)\mathrm{d}y + \int_1^0 (ax + b)\mathrm{d}x + \int_1^0 fy\,\mathrm{d}y = c - b$$

et d'autre part :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S$$

et comme :

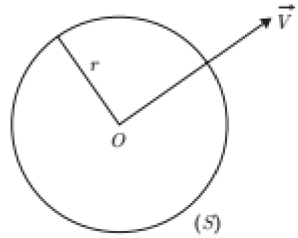
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = (c - b)\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{N} = \vec{e}_z$$

il vient :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_0^1 \int_0^1 (c - b)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c - b$$

Exemple 6.

On considère le champ vectoriel à symétrie sphérique : $\vec{V} = a\vec{r}$ et la sphère de rayon r centrée en O. Vérifier le théorème d'Ostrogradsky en calculant le flux de $\vec{V}$ à travers la surface de la sphère.



On a d'une part

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = ar \iint_{(S)} \vec{e}_r \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S$$
$$= ar\,S = 4\pi a r^3$$

D'autre part :

$$\mathrm{div}\vec{V} = \frac{2}{r}V_r + \frac{\partial V_r}{\partial r} = 2a + a = 3a$$

On en déduit :

$$\iiint_{(\tau)} \mathrm{div}\,\vec{V}\,\mathrm{d}\tau = 3a \iiint_{(\tau)} \mathrm{d}\tau = 3a\frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= 4\pi a r^3$$

EXERCICES

1.1. On considère le champ vectoriel :

$$\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xz^2\vec{e}_z$$

Calculer la circulation de $\vec{A}$ entre les points (0, 0, 0) et (1, 1, 1) le long des chemins suivants :

a) le segment de droite joignant ces deux points,

b) les segments de droite allant de (0, 0, 0) à (1, 0, 0) puis de (1, 0, 0) à (1, 1, 0) et enfin de (1, 1, 0) jusqu'à (1, 1, 1).

Ce champ vectoriel est-il un gradient ?

1.2. Soit le champ vectoriel :

$$\vec{V}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de :

a) la spirale logarithmique d'équation polaire :

$$r = ae^{k\theta}, \qquad \text{entre} \qquad \theta_1 \text{ et } \theta_2$$

b) la cardioïde :

$$r = a(1 + \cos\theta), \qquad \text{entre} \qquad 0 \text{ et } \pi.$$

1.3. On considère le champ vectoriel :

$$\vec{V} = (2x - y)\vec{e}_x + (2y - x)\vec{e}_y - 4z\vec{e}_z$$

Montrer que ce champ est un gradient, et déterminer la fonction scalaire φ dont il dérive par la relation $\quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$.

1.4. Un champ de vecteur $\vec{E}$, dans l'espace orthonormé $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, est caractérisé par ses composantes :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ f(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{où } f \text{ ne dépend que de } x \text{ et } y.$$

1) Déterminer la fonction f pour que le champ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel V tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

2) Déterminer alors le potentiel de V.

3) Quelle est la circulation du champ $\vec{E}$ entre les points $A(0, 0, 0)$ et $B(1, 1, 1)$?

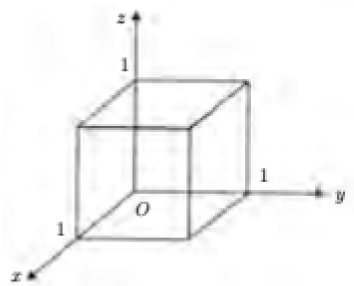
1.5. *1)* On considère le champ vectoriel à symétrie sphérique : $\vec{V} = \dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$. Montrer que ce champ dérive de la fonction scalaire $f = -\dfrac{1}{r}$ par la relation $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(r)$.

2) Calculer $\text{div}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$.

1.6. Calculer le flux du champ de vecteurs :

$$\vec{V}(M) = 4xz\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$$

à travers la surface du cube limité par $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.



1.7. Calculer le flux du champ vectoriel :

$$\vec{V}(M) = xz^2\vec{e}_x + (x^2y - z^3)\vec{e}_z + (2xy + y^2z)\vec{e}_z$$

à travers la surface totale de l'hémisphère S limité par $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ et $z = 0$.