الفصل الثاني: البرمجة الخطية

1.2. أساسيات البرمجيات

1.1.2. مفهوم البرمجة الخطية

2.1.2. مجالات استخدام البرمجة الخطية

3.1.2. فرضيات البرمجة الخطية

4.1.2. عناصر البرمجة الخطية

5.1.2. الصياغة الرياضية للبرنامج الخطي

2.2. طرق حل مشكلة البرمجة الخطية

1.2.2. طريقة الرسم البياني

2.2.2. الطريقة الجبرية

الفصل الثاني: البرمجة الخطية

مقدمة:

البرمجة الخطية هي تقنية رياضية تبحث عن حل وحلول مسائل معينة واختيار أفضل حل من الحلول الممكنة والذي يمثل الحل الأمثل، هذه التقنية الرياضية تستعمل خاصة من طرف المسيرين والمشرفين على المشاريع المختلفة لإيجاد الطريقة المثلى لتخصيص موارد المؤسسة المحدودة الاستخدامات المختلفة من أجل تحقيق هدف معين ونقصد بالطريقة المثلى تلك الطريقة التي تمكن المؤسسة من بلوغ الهدف مع الأخذ بعين الاعتبار التزاماتها الداخلية والخارجية (الوارد الموجودة داخل المؤسسة كحصة المؤسسة بالسوق) إذا كان هدف المؤسسة هو تحقيق أكبر ربح ممكن على سبيل المثال فإنه يجب على مسيري المؤسسة توفير كل الإمكانيات الإنتاجية والإدارية لتحقيق هذا الهدف.

ومهما يكن مستوى هذه الإمكانيات فإن المؤسسة ملزمة بأخذ بعين الاعتبار عدة عوامل قد تحول دون بلوغها الهدف المنشود وهذه العوامل يطلق عليها القيود وهناك عدة أنواع من القيود نذكر منها على سبيل المثال:

قيود خاصة بالعملية الإنتاجية: عدد ساعات العمل المختلفة، عدد ساعات اليد العاملة، الكمية المتوفرة من المواد الأولية.

قيود خاصة بعملية التخزين: المساحة المخصصة لعملية التخزين

قيود خاصة لعملية التسويق: نذكر منها الكمية المطلوبة بالسوق الكمية التي يمكن توزيعها ... إلخ

وعلى ضوء هذه القيود فإن الحل الأمثل الذي يبحث عنه المسير استعمال تقنية البرمجة الخطية وهو ذلك الحل الذي تحدد له كمية الإنتاج الواجب إنتاجها من كل نوع من المنتجات والتي يمكن المؤسسة من تحقيق أقصى ربح.

البرمجة الخطية: نموذج كمي يسعى إلى تعظيم أو تدنية دالة معينة في ظل مجموعة من القيود.

هناك بعض الفرضيات التي تعتمدها هذه التقنية.

1. الخطية Linéarité

يمكن النظر إلى فرضية الخطية من الناحية الرياضية ومن الناحية الاقتصادية:

رياضيا: تتطلب الخطية من الناحية الرياضية أن تكون كل المتغيرات الداخلة في تركيبة البرنامج الخطي من الدرجة الأولى (سواء في التابع الاقتصادي أو في القيود).

اقتصاديا: الخطية تعي التناسب بين المدخلات والمخرجات وهذا ما يؤدي إلى إهمال اقتصاديات الحجم (الوفرات) الناجمة عن ارتفاع الإنتاجية.

2- الأكأدة: يفترض في البرنامج الخطي بأن المستقبل معروف بشكل أكيد وهذا يعني أن النموذج محدد نموذج محدد model determinité.

3- الاستمرارية: إن نموذج البرمجة الخطية هو نموذج مستمر model continu

4- الرياضية: نعني بذلك الحقيقة بأكثر وفاء ممكن باعتماد الكتابة الرياضية، وهذا يعني أيضا أنه يجب أن تكون كافية بيانات المشكلة وقيودها وكذلك الهدف المنشود من حلها وقابلة جميعا للقياس الكمي حتى يمكن التعبير عنها بمعادلات و/أو متباينات خطية.

5- عدم سلبية المتغيرات.

2.2 صياغة مسائل البرمجة الخطية

حتى تتمكن من وضع برنامج خطي للمعطيات الواردة في المسألة يجب أن توفر مجموعة من المتغيرات لها علاقة مباشرة بقيمة الهدف المنشود ويمكننا تحديد هذه المتغيرات من خلال السؤال الذي نريد الإجابة عنه من حل المسألة وبصفة عامة تتكون مسائل البرمجة الخطية من دالة الهدف ومجموعة من القيود.

1- القيود: يوضع القيد للإشارة إلى أن هناك مجموعة من الالتزامات على المؤسسة أخذها بيعن الاعتبار عند تحقيق هدف معين فإذا افترضنا مثلا مؤسسة ما تتوفر على طاقة إنتاجية قدرها 12 ساعة يوميا في الورشة الأولى وإذا كان بإمكان هذه المؤسسة إنتاج وحدة من منتوجها النهائي كل ساعتين عمل نرمز لهذه المعطيات كالآتي:

ليكن: x_1 الكمية المنتجة

الطاقة المتاحة $2X_1 \leq 12$ الطاقة المستعملة

الطاقة العاطلة $S_1 =$ الطاقة المتاحة – الطاقة المستعملة.

إذا افترضنا الآن أن هذه المؤسسة يمكنها إنتاج منتوج ثاني في نفس الورشة حيث أن كل وحدة من هذا المنتوج تتطلب 3 ساعات عمل.

$2X_1 + 3X_2 \leq 12$. X_2 الكمية المنتجة من المنتوج الثاني.

فإذا افترضنا الآن أن عملية الإنتاج تتطلب عملية تمرير كلا المنتوجين على ورشة ثانية حيث أن كل وحدة من النوع الأول تتطلب ساعة عمل وكل وحدة من النوع الثاني تتطلب ساعتين والطاقة المتاحة لهذه الورشة هي 10 ساعات في اليوم $1X_1 + 2X_2 \leq 10$

فإذا كانت هذه المؤسسة متعاقدة مع زبون ما بحيث أنها تسوق له وحدتين من المنتوج الثاني على الأقل في كل يوم. $X_2 \geq 2$

من خلال المتراجحتين الأولى والثانية نلاحظ أنها على الشكل أقل أو يساوي وهذا معناه أنه في كل الحالات لا يمكن لهذه المؤسسة أن تتجاوز الطاقة المتاحة خلال العملية الإنتاجية كما أن المتراجحة الثالثة ظهرت على شكل أكبر أو يساوي، معناه أن المؤسسة ملزمة بإنتاج وبيع وحدتين من النوع الثاني على الأقل لكل يوم.

2– دالة الهدف:

بالرغم من أن المتراجحات أعلاه تعطينا فكرة واضحة على الشروط التي يجب تحقيقها إلا أن هذا البرنامج يبقى ناقص حيث ليس هناك معيار يمكننا من تفضيل حل عن حل آخر.

فإذا افترضنا هدف المؤسسة هو تحقيق أقصى ربح ممكن علما بأن كل وحدة من النوع الأول ينجم عنه ربح قدره 2000 بينما كل وحدة من النوع 2 ينجم عنه ربح قدره 5000

$$\text{Max } Z = 2000X_1 + 5000X_2$$

وعموما إذا كانت لدينا مجموعة من المتغيرات والمعاملات في واقع معين فإن البرنامج الخطي لهذا الواقع يعرف رياضيا حسب الحالة كما يلي:

حالة التعظيم:

$$Max\ Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \ldots\ldots C_n X_n$$

$$\begin{cases} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \ldots\ldots + a_{1n} X_n \leq b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \ldots\ldots + a_{2n} X_n \leq b_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 \ldots\ldots + a_{mn} X_n \leq b_m \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0\ .\ X_2 \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_n \geq 0$$

Max تعني تعظيم

X تعني متغيرات البرنامج والمطلوب البحث عن حل لها ويشترط أن تكون غير سالبة

2.3 حل مسائل البرمجة الخطية بيانيا:

يستعمل الرسم البياني لحل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على متغيرين ولاستعمال هذه الطريقة تحول أولا المتراجحات إلى معادلات تمثيل كل معادلة بخط مستقيم وتحديد المنطقة الخاصة بكل متراجحة ونحصل في الأخير على منطقة تتقاطع فيها كل المتراجحات يطلق عليها منطقة الحلول الممكنة والحل الأمثل يقع دائما على رأس (ركن) من رؤوس الحلول الممكنة.

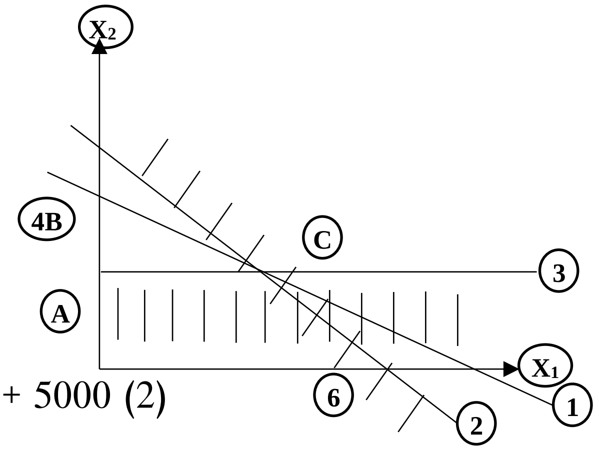
$$Max\ Z = 2000X_1 + 5000X_2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 12 \\ 2X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ X_2 \geq 2 \\ X_1 .\ X_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = 12 \\ 2X_1 + 2X_2 = 10 \\ X_2 = 2 \end{cases}$$

X_1	0	6
X_2	4	0

X_1	0	5
X_2	5	0

منطقة الحل العملي (منطقة الحلول الممكنة)



A (0.2) --→ Max Z_A = 2000 (0) + 5000 (2)

Max Z_A = 10000

B (0.4) --→ Max Z_B = 2000 (0) + 5000 (4)

Max Z_B = 20000

A (3) (2) $\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 = 10 \\ X_2 = 2 \end{cases}$

A (3.2) --→ Max Z_C = 2000 (3) + 5000 (2)

Max Z_C = 16000

الحل الأمثل يتمثل في النقطة B

الميل الحدي لدالة الهدف

تمثل دالة الهدف بيانيا

$Z = 2000X_1 + 5000X_2$

$Z = 0 \rightarrow 2000X_1 + 5000X_2 = 0$

$X_1 = 2/5\ X_2$

Max Z آخر نقطة توازي (مستقيم) يطابق النقطة الأخيرة

Min Z أول نقطة توازي (مستقيم) يطابق النقطة الأولى

حالات خاصة:

أ- حالة الحلول المثلى البديلة

تكون لدينا حلول مثلى بديلة عندما تتغير قيم X_1 و X_2 مع بقاء قيمة دالة الهدف ثابتة.

المثال السابق مع تغير دالة الهدف

$$\text{Max } Z = 2000X_1 + 3000X_2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 12 \\ 2X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ X_2 \geq 2 \\ X_1 .\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

ب- حالة منطقة الحلول الممكنة غير محدودة:

مثال:

$$\text{Min } Z = 2\ X_1 + 6\ X_2$$

$$X_1 \geq 2$$

$$X_1 \geq 1$$

$$X_2 + 2X_2 \geq 3$$

$$X_1 .\ X_2 \geq 0$$

ج– حالة البرنامج الخطي غير المحدود تناقض في القيود

$$\text{Max } Z = 2X_1 + X_2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \geq 5 \\ X_1 \leq 1 \\ X_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$X_1 . X_2 \geq 0$$