الجمهورية الجزائرية الشعبية الديمقراطية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف بالمسيلة

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

كلية: العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم: العلوم التجارية

مطبوعة موجهة لطلبة الليسانس والماستر

رياضيات المؤسسة 02

إعداد الدكتورة:
مخوخ رزيقة

السنة الجامعية: 2018/2019

الصفحة	المـــــــحتويات
2	**تمهيد**
	الفصل الأول: مسائل النقل
3	❖ **أولا:** الصياغة الرياضية لمشكل النقل.
6	❖ **ثانيا:** طرق الحل الابتدائية لمسائل النقل.
25	❖ **ثالثا:** طرق الحل النهائي لمسائل النقل.
25	**1.** طريقة الحجر المتنقل.
31	**2.** طريقة التوزيع المعدل.
37	❖ **رابعا:** حالات الاختلاف في مشاكل النقل.
	الفصل الثاني: نماذج التخصيص
47	❖ **أولا:** خطوات حل نموذج التخصيص.
51	❖ **ثانيا:** حالة تعظيم الربح.
54	❖ **ثالثا:** حالات الاختلاف في نموذج التخصيص
	الفصل الثالث: نماذج التحليل الشبكي
55	❖ **أولا:** أساسيات التخطيط الشبكي.
59	❖ **ثانيا:** أساليب تخطيط وجدولة المشاريع.
59	**1.** طريقة المسار الحرج.
64	**2.** طريقة تقييم ومراجعة البرامج.
68	❖ **ثالثا:** تحليل التكلفة في شبكة المشروعات.
69	❖ **رابعا:** تحليل ندرة الموارد.
	الفصل الرابع: نظرية الألعاب
74	❖ **أولا:** تعاريف ومفاهيم أساسية.
76	❖ **ثانيا:** طرق حل المباريات.
	الفصل الخامس: نماذج صفوف الانتظار
82	❖ **أولا:** ماهية صفوف الانتظار.
83	❖ **ثانيا:** التحليل الاقتصادي لصفوف الانتظار.
85	❖ **ثالثا:** التوزيعات الاحتمالية لصفوف الانتظار.
86	❖ **رابعا:** المعالجة الرياضية لنماذج صفوف الانتظار.
91	**المراجع**

تمهيد

تعتبر بحوث العمليات من بين أهم الأساليب الكمية المستعملة في ترشيد قرارات المؤسسة الاقتصادية، وذلك من خلال نمذجة الواقع العملي وجعله في شكل برنامج رياضي يعكس مختلف القيود التي تحد من قدرات المؤسسة الاقتصادية، سواء من حيث مواردها المادية وطاقاتها البشرية ومصادرها التمويلية المتاحة، بهدف الوصول إلى اتخاذ القرارات الرشيدة التي تحقق أهداف المؤسسة الاقتصادية في ظل محدودية مواردها المتاحة، ولذلك فطبيعة المشكلة تظهر في كيفية الوصول إلى اتخاذ قرارات الرشيدة.

☜ **الأهداف البيداغوجية**

منح الطالب مجموعة من التقنيات والوسائل العلمية تمكّنه من تتبع مسار اتخاذ القرارات على مستوى المؤسسة والتي تسمح له بتحسين تطورات الأحداث في المؤسسة قصد أداء أفضل (النجاعة والكفاية).

☜ **القدرات والكفاءات المنشودة**

يهدف مضمون المقياس إلى منح الطالب منهجية لتشخيص الإجراءات المتبعة من طرف المؤسسة وتفقد الحالات التي يجب إعادة النظر فيها.

الفصل الأول: مسائل النقل
Transportation Model

تمهيد:

من بين المسائل الخاصة للبرمجة الخطية، نجد نماذج النقل التي تحتل أهمية كبيرة في عملية اتخاذ القرارات بالمؤسسة بهدف حل مشاكل التوزيع التي تواجهها.

عولجت مسائل النقل باستخدام الأسلوب الكمي في بداية عام **1953** من قبل العالم **دانترينغ،** حيث تم وضع خوارزمية النقل التي تقدم حلولا عديدة للمشاكل الاقتصادية والإدارية في قطاعات نقل الموارد من مصادر الإنتاج إلى أماكن الاستخدام وذلك بأقل تكلفة ممكنة، ولهذا فإن خوارزمية النقل تعد تطويرا لاحقا لأسلوب البرمجة الخطية، حيث يكون الهدف هو تقليل دالة الهدف إلى أقل ما يمكن في ظل ظروف محددة، وبفرض أن كل المتغيرات التي تشكل نموذج النقل (مصفوفة النقل) هي قيم موجبة أو صفرا.

أولا: الصياغة الرياضية لمشكل النقل

تعد مشاكل النقل حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية، فعلى الرغم من أن مشكلة النقل يمكن حلها باستخدام أسلوب السمبلكس، إلا أن الصفات الخاصة التي تتميز بها تجعل من الأسهل أن يتم حلها عن طريق بعض الأساليب الموضوعة خصيصا لها.

1. شروط تطبيق طريقة النقل

- تعدد مصادر عرض السلعة وفي نفس الوقت تعدد مراكز الطلب عليها، ذلك أن وجود مصدر واحد للعرض ومركز واحد للطلب لا يسبب مشكلة في النقل، أيضا ليست هنالك مشكلة إذا كان مصدر واحد للعرض وتعددت مراكز الطلب أو العكس؛

- تجانس خصائص الوحدات المراد نقلها من مصادر العرض إلى مراكز الطلب، فطالما وجد اختلاف في خصائص الوحدة بالدرجة التي تجعل مراكز الطلب تميز بين مصادر العرض، فسوف يفقد هذا النموذج (نموذج النقل) إمكانية تطبيقه؛

- وجود مسار واحد مباشر لنقل الوحدات من مصدر العرض إلى مركز الطلب، فلا يجوز نقل الوحدات من مصدر عرض إلى مصدر عرض آخر، ثم محاولة نقلها إلى مركز طلب؛

- افتراض حالة التأكد التام، حيث أن الكميات المعروضة من قبل مصـــادر العـــرض وفـــي المقابل الكميات المطلوبة من قبل مراكز الطلب محددة ومعروفة بدقة؛
- على الرغم من افتراض تساوي الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة في البدايـــة، إلا أنه يمكن التخلي عن هذا الافتراض وإيجاد الملائمة في حالة الاختلاف؛
- تتصف تكلفة النقل الخاصة بكل وحدة من مصدر العرض إلى مركز الطلب، بأنها محـــددة ومعروفة ولا تتعرض لاقتصاديات الحجم، فهي ترتبط بعلاقة خطية مع حجـــم الوحـــدات المنقولة.

2. تكوين النموذج الرياضي لمشكلة النقل

بافتراض أن: X_{ij} عبارة عن عدد الوحدات المراد نقلها من المصدر **i** إلى المركز **j**، فإن النمـــوذج الرياضي لمشكلة النقل يأخذ الصورة التالية، وذلك بافتراض أن الهدف يكون تقليل التكلفـــة الكليـــة للنقل:

$$Min\ C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Cij\, Xij \quad = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + \ldots\ldots + C_{nm} X_{nm}$$

تحت القيود التالية:

$$\begin{cases} \Sigma_{j=1}^{n}\ X_{ij} \le s_i & (i= 1,2,\ldots.m) \quad \text{قيود العرض} \\ \Sigma_{i=1}^{m}\ X_{ij} \ge d_j & (j= 1,2,\ldots.n) \quad \text{قيود الطلب} \\ X_{ij} \ \ge 0 \end{cases}$$

حيث أن:

i : تمثل مؤشر للمصادر،(**i** = 1، 2، ....، **m**).

j : تمثل مؤشر للمراكز، **j** = 1، 2، ....، **n**.

X_{ij} : يمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر **i** إلى المركز **j**.

C_{ij} : يمثل تكلفة نقل وحدة واحدة من المصدر **i** إلى المركز **j**.

S_i : تمثل الوحدات المعروضة لدى المصدر **i**.

d_j : تمثل الوحدات المطلوبة لدى المركز **j**.

إن قيود العرض تشترط أن مجموع المنقول من المصدر لا يمكن أن يتجاوز العرض، نفس الشيء قيود الطلب تتطلب أن المنقول من المركز لا يمكن أن يتجاوز المطلوب.

كما أن النموذج الموضح أعلاه يتضمن أن مجموع المعروض يساوي مجموع المطلوب، أي $\Sigma_{i=1}^{m} s_i = \Sigma_{j=1}^{n} d_j$ هذه الحالة تكون لنا ما يسمى بنموذج النقل العام المتوازن، والذي سـيأخذ الصيغة الجديدة التالية:

$$\textbf{Min } \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j=1}^{n} c_{ij} \; x_{ij}$$

$$\begin{cases} \Sigma_{j=1}^{n} X_{ij} = s_i & (i = 1,2,\ldots m) & \text{قيود العرض} \\ \Sigma_{i=1}^{m} X_{ij} = d_j & (j = 1,2,\ldots n) & \text{قيود الطلب} \\ X_{ij} \geq 0 & \text{لكل من } i \text{ و } j & \end{cases}$$

الجدول الموالي يوضح الشكل العام لجدول النقل.

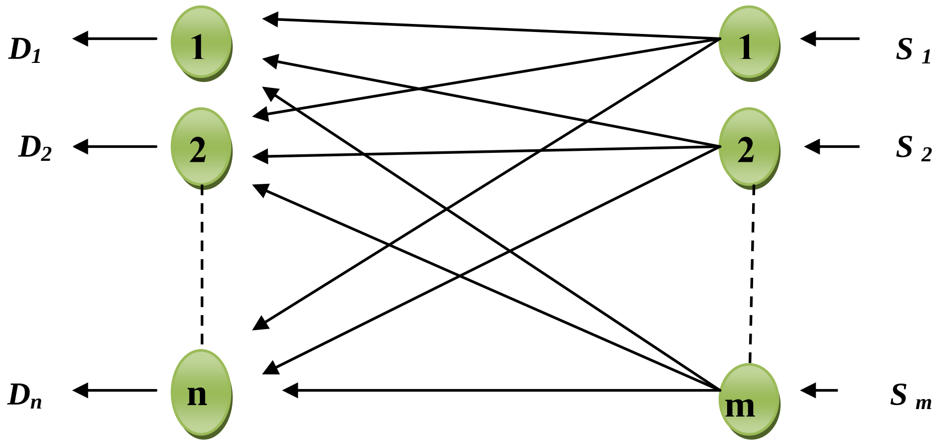
الجدول رقم (01): جدول النقل العام

المصادر	المراكـــــــــز				مجموع العرض
	1	**2**	……	**n**	
1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	…….	X_{1n} C_{1n}	S_1
2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	…….	X_{2n} C_{2n}	S_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	…….	X_{mn} C_{mn}	S_m
مجموع الطلب	D_1	D_2	…….	D_n	**الطلب** $\sum$ / **العرض** $\sum$

<ins>**المصدر**</ins>: مؤيد الفضل، **الأساليب الكمية في الادارة**، الطبعة العربية، دار اليازوري، عمان، الأردن، 2004، ص 323، بتصرف.

ويمكن التعبير عن مشكلة النقل في شكلها العام بالشكل التالي:

الشكل رقم (01): التمثيل البياني لمشكلة النقل



المصدر: عبد الستار أحمد محمد الألوسي، **أساليب بحوث العمليات الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**، دار القلم للنشر، الإمارات العربية المتحدة، 2003، ص 191.

يصور الشكل أعلاه نموذج النقل على أنه شبكة تتكون من عدد **m** من مصادر العرض وعدد **n** من أماكن الطلب، وتم تمثيل كل من العرض والطلب بدائرة، ويمثل السهم الذي يصل العرض بالطلب المسار الذي من خلاله سيتم نقل السلعة.

ثانيا: طرق الحل الابتدائي

تتيح هذه الطرق فقط حلا أوليا ممهدا للحل النهائي للمسألة، يراعى في هذه الخطوة فقط شرط العملية والمتمثل في توازن نموذج النقل أي يجب تساوي الكمية المطلوبة مع الكمية المتاحة، وهناك الكثير من طرق الحل الأولي، وتختلف كل طريقة عن الأخرى.

وحتى يكون الحل الابتدائي عملي، يجب أن يحقق الشروط التالية:

1. يجب توزيع كل الوحدات المعروضة من طرف المصانع؛
2. يجب أن تلبى طلبات كل المراكز؛
3. يجب أن يساوى عدد الخلايا المشغلة الأساسية **(m + n - 1)**.

دراسة حالة:

مؤسسة للصناعة الغذائية عندها ثلاث مصانع جهوية، بحيث الطاقة الانتاجية لهذه المصانع مبينة في الجدول التالي:

المصدر	S_1	S_2	S_3
الكمية المنتجة / ألف وحدة	100	200	280

تريد توزيعها على أربعة (04) مراكز المتمثلة في الآتي:

المراكز	D_1	D_2	D_3	D_4
الكمية المطلوبة/ ألف وحدة	180	140	100	160

نقل كل وحدة يتطلب تكلفة والمبينة بالجدول الآتي:

1	3	5	2
2	4	3	7
5	2	8	3

☜ **المطلوب:**

1. ضع هذه المعطيات في نموذج نقل رياضي؟
2. أوجد الحل الابتدائي بمختلف الطرق؟

الحل:

❖ **نموذج النقل الرياضي:** لبناء النموذج الرياضي لمشاكل النقل لابد من تحديد:

- **تحديد دالة الهدف:**

بما أن المؤسسة تهدف إلى تخفيض تكاليف النقل فتكون دالة الهدف من الشكل:

$$\mathbf{MinZ}_{cost} = X_{11}+3X_{12}+5X_{13}+2X_{14}+2X_{21}+4X_{22}+3X_{23}+7X_{24}+5X_{31}+2X_{32}+8X_{33}+3X_{34}$$

- **تحديد القيود:** نميز بين نوعين من القيود:

▪ **قيود العرض:** تتمثل في الكميات المتاحة

$$\text{قيـــود العرض}\quad \left\{\begin{aligned} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} &= \mathbf{100}\\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} &= \mathbf{200}\\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34} &= \mathbf{280}\end{aligned}\right.$$

▪ **قيود الطلب:** تتمثل في الكميات المطلوبة من المراكز

$$\left.\begin{aligned} X_{11}+X_{21}+X_{31} &= \mathbf{180}\\ X_{12}+X_{22}+X_{32} &= \mathbf{140}\\ X_{13}+X_{23}+X_{33} &= \mathbf{100}\\ X_{14}+X_{24}+X_{34} &= \mathbf{160}\end{aligned}\right\}\quad \text{قيـــود الطلب}$$

- **قيد لا سلبية المتغيرات:** أي أن الكميات المنقولة من المصادر إلى المراكز يجب أن يكون موجبة.

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, \ldots\ldots. X_{34} \geq 0$$

وعليه يمكن وضع جدول النقل كالتالي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	1	3	5	2	100
S_2	2	4	3	7	200
S_3	5	2	8	3	280
Demand	180	140	100	160	

1. طريقة زاوية الشمال الغربي: North- West Corner Method

وفقا لهذه الطريقة توزع الكمية العظمى المسموح بها من المطلوب والمتاح إلى المتغير الموجود في الزاوية الشمالية الغربية من الجدول أي عند المتغير X_{11} ، فإذا بقية كمية مطلوبة لم تغطى عن طريق الكمية المتاحة في الخلية الأولى يتم النزول لتغطيتها بواسطة الكمية المتاحة في المصدر الموالي أي عند المتغير X_{21} ،إذا تم تغطيت الكمية المطلوبة لهذا المركز يتم الانتقال أفقيا إلى المركز الموالي ليتم تغطية الكمية المطلوبة منه أي عند المتغير X_{22} ، أما إذا لم يتم تغطية الكمية التي يطلبها المركز فإنه يتم التنقل عموديا من أجل تغطية الكمية المطلوبة له بواسطة مصدر آخر أي عند المتغير X_{31} ، وهكذا حتى يتم تغطية كافة مراكز الطلب.

مثال:

لتوضيح كيفية عمل الطريقة نعود للمثال السابق، حيث نريد الحصول على توزيع أولي للكمية المتاحة على المراكز وفقا لطريقة زاوية الشمال الغربي.

ولكن قبل القيام بإيجاد الحل باستخدام طريقة زاوية الشمال الغربي لابد من التأكد أن جدول النقل متوازن عن طريق مقارنة الكمية المعروضة مع الكمية الطلوبة.

$\Sigma S_i = S_1 + S_2 + S_3 = 100+200+280=$**580**

$\Sigma D_j = D_1 + D_2 + D_3 + D4 = 180+140+100+160=$**580**

بما أن: **الكمية المعروضة ΣS_i تساوي الكمية المطلوبة ΣD_j فجدول النقل متوازن.**

يتم ايجاد الحل باستخدام طريقة زاوية الشمال الغربي بالقيام بـــ:

❖ نقوم بتشغيل الخلية 11 بأكبر عدد من الوحدات الممكن نقلها مع مراعاة الكمية المعروضة والكميـــة المطلوبة، من خلال ملاحظة الكمية المعروضة $S_1=100$ أما الكمية المطلوبـــة فهـــي $D_1=180$، وعليه يمكن نقل 100 وحدة من المصدر S_1 إلى المركز D_1 .

الخلية 11

المراكز / المصادر	**D_1**	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	**100** 1	3	5	2	~~100~~ **0**
S_2	2	4	3	7	200
S_3	5	2	8	3	280
Demand	~~180~~ **80**	140	100	160	

❖ بعد تشغيل الخلية 11 نجد أنه بقيت كمية مطلوبة $(D_1= 80)$ لم تغطى عن طريق الكمية المتاحة في الخلية الأولى، وعليه يتم النزول لتغطيتها بواسطة الكمية المتاحة في المصـــدر المـــوالي أي عنـــد الخلية 21.

المراكز / المصادر	**D_1**	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	100 1	3	5	2	0
S_2	**80** 2	4	3	7	~~**200**~~ **120**
S_3	5	2	8	3	280
Demand	~~**80**~~ **0**	140	100	160	

❖ بعد تشغيل الخلية $_{21}$ نجد أنه بقيت كمية معروضة (S_2=120) لم يتم توزيعها، وعليه يتم التنقل في نفس السطر إلى الخلية $_{22}$ ، من خلال ملاحظة الكمية المعروضة S_2=120 أما الكمية المطلوبة فهي D_2=140، وعليه يمكن نقل 120 وحدة من المصدر S_2 إلى المركز D_2.

المراكز / المصادر	D_1	**D_2**	D_3	D_4	Supply
S_1	100 1	3	5	2	0
S_2	80 2	**120** 4	3	7	~~**120**~~ **0**
S_3	5	2	8	3	280
Demand	0	~~**140**~~ **20**	100	160	

❖ بعد تشغيل الخلية $_{22}$ نجد أنه بقيت كمية مطلوبة (D_2=20) لم تغطى عن طريق الكمية المتاحة، وعليه يتم النزول لتغطيتها بواسطة الكمية المتاحة في المصدر الموالي أي عند الخلية $_{32}$.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	100 1	3	5	2	0
S_2	80 2	120 4	3	7	0
S_3	5	**20** 2	8	3	~~280~~ **260**
Demand	0	~~20~~ **0**	100	160	

❖ بعد تشغيل الخلية $_{32}$ نجد أنه بقيت كمية معروضة ($S_3=260$) لم يتم توزيعها، وعليه يتم التنقل في نفس السطر إلى الخلية $_{33}$ ، من خلال ملاحظة الكمية المعروضة $S_3=260$ أما الكمية المطلوبة فهي $D_3=100$، وعليه يمكن نقل 100 وحدة من المصدر S_3 إلى المركز D_3.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	100 1	3	5	2	0
S_2	80 2	120 4	3	7	0
S_3	5	20 2	**100** 8	3	~~260~~ **160**
Demand	0	0	~~100~~ **0**	160	

❖ بعد تشغيل الخلية $_{33}$ نجد أنه بقيت كمية معروضة ($S_3=260$) لم يتم توزيعها، كما أن الكمية المطلوبة من المركز ($D_4=160$) وعليه آخر خلية يتم تشغيلها هي الخلية $_{34}$ بـ: 160 وحدة.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	**D_4**	Supply
S_1	100 1	3	5	2	0
S_2	80 2	120 4	3	7	0
S_3	5	20 2	100 8	**160** 3	~~160~~ **0**
Demand	0	0	0	~~160~~ **0**	

❖ بعد استكمال تشغيل الخلايا واستنفاذ الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة، يكون جدول الحــل الابتدائي باستخدام طريقة زاوية الشمال الغربي كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	**100** 1	3	5	2	100
S_2	**80** 2	**120** 4	3	7	200
S_3	5	**20** 2	**100** 8	**160** 3	280
Demand	180	140	100	160	

$$\begin{cases} X_{11} = 100 & X_{32} = 20 \\ X_{21} = 80 & X_{33} = 100 \\ X_{22} = 120 & X_{34} = 160 \\ X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{31} = 0 \end{cases}$$

وعليه يمكن حساب تكلفة النقل الابتدائية عن طريق دالة الهدف:

$$\text{Cost} = (1\times100) + (2\times80) + (4\times120) + (2\times20) + (8\times100) + (3\times160) = \mathbf{2060\ \$}$$

2. طريقة أقل تكلفة: Least Cost Method

في بعض الأحيان تؤدي هذه الطريقة إلى حل نهائي للمسألة أو إلى خطوة متقدمة من خطوات الحل والتي يبقى يفصلها فقط عدد بسيط من الخطوات نحو الحل النهائي لمسألة النقل.

المبدأ الأساسي لهذه الطريقة هو **شغل أكبر كمية ممكنة للخلية التي تحتوى على أقل تكلفة نقل في الجدول ككل**، وإذا تم شغل هذه الخلية ننتقل إلى الخلية ذات التكلفة الأقل الموالية لأقل تكلفة في جدول النقل وشغلها بأكبر كمية ممكنة، وهكذا حتى يتم استنفاذ جميع الكمية المتاحة من جميع المصادر على جميع المراكز.

مثال:

لتوضيح كيفية عمل الطريقة نعود للمثال السابق، حيث نريد الحصول على توزيع أولي للكمية المتاحة على المراكز وفقا لطريقة أقل تكلفة.

الحل:

- نلاحظ أن الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة ممكنة في الجدول هي **الخلية** $_{11}$ (التكلفة 1 $)، نقوم بتشغيل الخلية $_{11}$ بأكبر عدد من الوحدات الممكن نقلها مع مراعاة الكمية المعروضة والكمية المطلوبة، من خلال ملاحظة الكمية المعروضة $S_1=100$ أما الكمية المطلوبة فهي $D_1=180$، وعليه يمكن نقل 100 وحدة من المصدر S_1 إلى المركز D_1 .

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	**100** / 1	3	5	2	~~100~~ **0**
S_2	2	4	3	7	200
S_3	5	2	8	3	280
Demand	~~180~~ **80**	140	100	160	

- بعد تشغيل الخلية $_{11}$ نجد أن الكمية المعروضة $(S_1=0)$ أي أن الكمية المعروضة قد استنفذت كليا وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا السطر الأول**، نعيد الخطوة رقم (1) أي البحث عن الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة ممكنة في الجدول، نجد أن كل من الخلية $_{21}$ والخلية $_{32}$ تحتوي على أقل

تكلفة، وعليه نختار الخلية التي يمكن نقل من خلالها أكبر كمية ممكنة (الخلية $_{21}$ يمكن نقل كمية 80 وحدة، أما الخلية $_{32}$ يمكن نقل كمية 140 وحدة) ومن ثم يتم تشغيل الخلية $_{32}$ بـــ: 140 وحدة.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_2	2	4	3	7	200
S_3	5	**140** 2	8	3	~~280~~ 140
Demand	80	~~140~~ 0	100	160	

❖بعد تشغيل الخلية $_{32}$ نجد أن الكمية المطلوبة (D_2=0) أي المركز رقم 2 قد لبيت كميته المطلوبة، وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا العمود الثاني**، نعيد الخطوة رقم (1) أي البحث عن الخليـــة التـــي تحتوي على أقل تكلفة ممكنة في الجدول، نجد أن من الخلية $_{21}$ تحتوي على أقل تكلفة، ومن ثـــم يتم تشغيل الخلية $_{21}$ بـــ: 80 وحدة.

المراكز / المصادر	D_1		D_3	D_4	Supply
S_2	**80** 2		3	7	~~200~~ 120
S_3	5		8	3	140
Demand	~~80~~ 0		100	160	

❖ بعد تشغيل الخلية $_{21}$ نجد أن الكمية المطلوبة (D_1=0) أي المركز رقم 1 قد لبيت كميته المطلوبة، وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا العمود الأول**، نعيد الخطوة رقم (1) أي البحث عـــن الخليـــة التـــي

تحتوي على أقل تكلفة ممكنة في الجدول، نجد أن كل من الخلية 23 والخلية 34 تحتوي على أقل تكلفة، وعليه نختار الخلية التي يمكن نقل من خلالها أكبر كمية ممكنة (الخلية 23 يمكن نقل كمية 100 وحدة، أما الخلية 34 يمكن نقل كمية 140 وحدة) ومن ثم يتم تشغيل الخلية 34 بـ: 140 وحدة.

المراكز / المصادر			D_3	D_4	Supply
S_2			3	7	120
S_3			8	**140** 3	~~140~~ 0
Demand			100	~~160~~ 20	

❖ بعد تشغيل الخلية 34 نجد أن الكمية المعروضة (S_3=0) أي أن الكمية المعروضة قد استنفذت كليا وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا السطر الثالث**، نعيد الخطوة رقم (1) أي البحث عن الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة ممكنة في الجدول، نجد الخلية 23 تحتوي على أقل تكلفة، ومن ثم يتم تشغيل الخلية 23 بـ: 100 وحدة.

المراكز / المصادر			D_3	D_4	Supply
S_2			**100** 3	7	~~120~~ 20
Demand			~~100~~ 0	20	

❖ بعد تشغيل الخلية 23 نجد أن الكمية المطلوبة (D_3=0) أي المركز رقم 3 قد لبيت كميته المطلوبة، وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا العمود الثالث**، ومن ثم تتبقى الخلية 24 يتم تشغيلها بـ: 20 وحدة.

المراكز / المصادر				D_4	Supply
S_2				20 / 7	~~20~~ 0
Demand				~~20~~ 0	

❖بعد استكمال تشغيل الخلايا واستنفاد الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة، يكون جدول الحـــل الابتدائي باستخدام طريقة أقل تكلفة كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	**100** / 1	3	5	2	100
S_2	**80** / 2	4	**100** / 3	**20** / 7	200
S_3	5	**140** / 2	8	**140** / 3	280
Demand	180	140	100	160	

$$\begin{cases} X_{11} = 100 & X_{24} = 20 \\ X_{21} = 80 & X_{32} = 140 \\ X_{23} = 100 & X_{34} = 140 \\ X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{22}, X_{31}, X_{33} = 0 \end{cases}$$

وعليه يمكن حساب تكلفة النقل الابتدائية عن طريق دالة الهدف:

$$Cost = (1\times100) + (2\times80) + (3\times100) + (7\times20) + (2\times140) + (3\times140) = \mathbf{1400\ \$}$$

3. طريقة فوجل التقريبية VAM: Vogel' s Approximation Method

من أجل الوصول على حل أولي وفقا لهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- **أولا:** نقوم بإحداث (حساب) فرق بين أقل تكلفة والتكلفة الموالية لها مباشرة لكل سطر ولكل عمود في جدول النقل، ويؤخذ الفارق بالموجب دائما.
- **ثانيا:** نقوم بشغل الخلية ذات الأكبر فارق وفي حالة تساوي الفارق في خليتين نشغل الخلية التي تستوعب أكبر كمية ثم نتوجه إلى التي تليها، العمود أو الصف الذي يستنفذ يشطب بالكامل ويختفي في الجدول الموالي، حيث نضع جدولا فارغا لنضع فيه نتائج شغل الخلايا في كل مرة.
- **ثالثا:** في الجدول الموالي الذي تم حذف العمود أو الصف المشغول منه نكرر الخطوة الأولى، نتوقف في حالة شغل جميع الخلايا.

مثال:

لتوضيح كيفية عمل الطريقة نعود للمثال السابق، حيث نريد الحصول على توزيع أولي للكمية المتاحة على المراكز وفقا لطريقة **فوجل التقريبية**.

الحل:

❖ نقوم حساب فرق بين أقل تكلفة والتكلفة الموالية لها مباشرة لكل سطر ولكل عمود في جدول النقل، نلاحظ أن **الخلية**$_{23}$ ذات الفارق الأكبر أي نقوم بتشغيلها مع مراعاة الكمية المعروضة والكمية المطلوبة، ومن ثم تشغيل الخلية $_{23}$ بـــ: 100 وحدة.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply	
S_1	1	3	5	2	100	1
S2	2	4	**100** 3	7	~~200~~ 100	1
S_3	5	2	8	3	280	1
Demand	180	140	~~100~~ 0	160		
	1	1	2	1		

❖ بعد تشغيل الخلية 23 نجد أن الكمية المطلوبة (D_3=0) أي المركز رقم 3 قد لبيت كميته المطلوبة، وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا العمود الثالث**، نعيد الخطوة رقم (1) أي حساب فرق التكلفة من جديد، نجد أن من الخلية 21 ذات الفارق الأكبر أي نقوم بتشغيلها مع مراعاة الكمية المعروضة والكمية المطلوبة، ومن ثم تشغيل الخلية 23 بـــ: 100 وحدة.

المراكز / المصادر	D_1	D_2		D_4	Supply	
S_1	1	3		2	100	1
S_2	**100** / 2	4		7	~~100~~ **0**	**2**
S_3	5	2		3	280	1
Demand	~~180~~ **80**	140		160		
	1	1		1		

❖ بعد تشغيل الخلية 21 نجد أن الكمية المعروضة (S_2=0) أي أن الكمية المعروضة قد استنفذت كليا وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا السطر الثاني**، نعيد الخطوة رقم (1) أي البحث عن الخلية التي أحدثت أكبر فارق في الجدول، نجد الخلية 11 ومن ثم يتم تشغيلها بـــ: 80 وحدة.

المراكز / المصادر	D_1	D_2		D_4	Supply	
S_1	80 / 1	3		2	~~100~~ **20**	1
S_3	5	2		3	280	1
Demand	~~80~~ **0**	140		160		
	4	1		1		

❖ بعد تشغيل الخلية $_{11}$ نجد أن الكمية المطلوبة $(D_1=0)$ أي المركز رقم 1 قد لبيت كميته المطلوبة، وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا العمود الأول**، نقوم بحساب فرق التكلفة من جديد، نجد كل الفروقات متساوية ومن ثم نختار الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة ممكنة، فنجد أن كل من الخلية $_{12}$ والخلية $_{32}$ تحتوي على نفس التكلفة، وعليه نختار الخلية التي تمكننا من نقل أكبر كمية ممكنة أي نختــار الخلية $_{32}$ وتشغل بـــ: 140 وحدة.

المراكز / المصادر		D_2		D_4	Supply	
S_1		3		2	20	1
S_3		**140** 2		3	~~280~~ 140	1
Demand		~~140~~ 0		160		
		1		1		

❖ بعد تشغيل الخلية $_{32}$ نجد أن الكمية المطلوبة $(D_2=0)$ أي المركز رقم 2 قد لبيت كميته المطلوبة، وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا العمود الثاني**، نلاحظ الجدول فنجد أنه بقيت لنا خليتين فقط، نختــار الخلية التي بها أقل تكلفة أي الخلية رقم $_{12}$ ويتم تشغيلها بـــ: 20 وحدة.

المراكز / المصادر				D4	Supply
S1				20 2	~~20~~ 0
S3				3	140
Demand				~~160~~ 140	

❖ بعد تشغيل الخلية 14 نجد أن الكمية المعروضة ($S_1=0$) أي أن الكمية المعروضة قد استنفذت كليـــا وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا السطر الأول**، نلاحظ أنه بقيت خلية واحدة ومن ثم يتم تشغيل الخلية 34 بـــ: 140وحدة.

المراكز / المصادر				D_4	Supply
S_3				**140** 3	~~140~~ **0**
Demand				~~140~~ **0**	

❖ بعد استكمال تشغيل الخلايا واستنفاذ الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة، يكون جدول الحـــل الابتدائي باستخدام طريقة **VAM** كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	**80** 1	3	5	**20** 2	100
S_2	**100** 2	4	**100** 3	7	200
S_3	5	**140** 2	8	**140** 3	280
Demand	180	140	100	160	

$X_{11} = 80$ $X_{23} = 100$

$X_{14} = 20$ $X_{32} = 140$

$X_{21} = 100$ $X_{34} = 140$

$X_{12}, X_{13}, X_{22}, X_{24}, X_{31}, X_{33}=0$

وعليه يمكن حساب تكلفة النقل الابتدائية عن طريق دالة الهدف:

Cost = (1×80) + (2×20) + (2×100) + (3×100) + (2×140) + (3×140) = **1320 $**

4. طريقة RAM: Russell's Approximation Method

مختلف خطوات الحل الابتدائي وفقا لهذه الطريقة تتلخص في:

- **أولا:** حساب فرق التكلفة لكل خلية في الجدول على أساس الأسطر فقط بالعلاقة التالية:

فرق التكلفة = تكلفة الخلية – أكبر تكلفة لسطر الخلية – أكبر تكلفة لعمود الخلية

ثم نختار الخلية الأكبر قيمة متبوعة بإشارة سالبة حيث تشغل هذه الخلية بأكبر كمية مع مراعاة الكمية المتاحة والكمية المطلوبة:

- إذا تكررت القيم المتساوية لفرق التكلفة نختار الخلية التي بها أقل تكلفة؛
- إذا تكررت التكاليف المتساوية نختار الخلية التي يمكن إعطاءها أكبر كمية ممكنة من الوحدات؛

- **ثانيا:** بعد عملية التشغيل للخلية المعنية يتم شطب السطر الذي تم نقل كل وحداته أو العمود الذي تم ترحيل كل وحداته أو العمود والسطر معا؛
- **ثالثا:** ننتقل إلى جدول جديد مشطوبا منه السطر أو العمود أو معا (وفقا للخطوة السابقة)، نكرر الخطوتين السابقتين ويتم العمل وفقا لهذه الطريقة حتى الوصول إلى الحل الابتدائي من خلال استنفاذ جميع الوحدات الموجودة.

مثال:

بالرجوع إلى المثال السابق، أوجد الحل الابتدائي باستخدام **طريقة RAM**؟

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	1	3	5	2	100
S_2	2	4	3	7	200
S_3	5	2	8	3	280
Demand	180	140	100	160	

الحل:

❖ نقوم بحساب فرق التكلفة لكل سطر

السطر الأول:	السطر الثاني:	السطر الثالث:
الخلية $_{11}$ = $-9=5-5-1$	الخلية $_{21}$ = $-10=5-7-2$	الخلية $_{31}$ = $-8=5-8-5$
الخلية $_{12}$ = $-6=4-5-3$	الخلية $_{22}$ = $-7=4-7-4$	الخلية $_{32}$ = $-10=4-8-2$
الخلية $_{13}$ = $-8=8-5-5$	**الخلية $_{23}$** = $\mathbf{-12}=8-7-3$	الخلية $_{33}$ = $-8=8-8-8$
الخلية $_{14}$ = $-10=7-5-2$	الخلية $_{24}$ = $-7=7-7-7$	**الخلية $_{34}$** = $\mathbf{-12}=7-8-3$

من خلال ملاحظة قيم فرق التكلفة نجد أن الخلية $_{23}$ والخلية $_{34}$ لهما نفس أكبر قيمة لفرق التكلفة، وعليه نختار الخلية التي بها أقل تكلفة، وبمقارنة تكاليف الخليتين نجد أنها نفس التكلفة، ومن ثم نختار الخلية التي يمكن نقل أكبر عدد ممكن من الوحدات (الخلية $_{23}$ يمكن نقل كمية 100، أما الخلية $_{34}$ فيمكن نقل كمية 160)، وعليه نختار **الخلية $_{34}$**.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	1	3	5	2	100
S_2	2	4	3	7	200
S_3	5	2	8	**160** 3	~~280~~ **120**
Demand	180	140	100	~~160~~ **0**	

❖ بعد عملية تشغيل الخلية $_{34}$ نجد أن المركز ($D_4=0$) أي أن المركز D_4 قد لبيت طلبيته بالكامل أي **حذف العمود D_4**، ومن ثم يتم حساب فرق التكلفة لكل سطر:

السطر الأول:	السطر الثاني:	السطر الثالث:
الخلية $_{11}$ = $-9=5-5-1$	الخلية $_{21}$ = $-7=5-4-2$	الخلية $_{31}$ = $-8=5-8-5$
الخلية $_{12}$ = $-6=4-5-3$	الخلية $_{22}$ = $-4=4-4-4$	**الخلية $_{32}$** = $\mathbf{-10}=4-8-2$
الخلية $_{13}$ = $-8=8-5-5$	الخلية $_{23}$ = $-9=8-4-3$	الخلية $_{33}$ = $-8=8-8-8$

من خلال ملاحظة فرق التكلفة لكل خلية نجد أن الخلية $_{32}$ تملك أكبر فرق تكلفة متبوع بإشارة سالبة، وعليه سوف يتم تشغيل الخلية $_{32}$ بـــ: 120 وحدة.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3		Supply
S_1	1	3	5		100
S_2	2	4	3		200
S_3	5	**120** 2	8		~~**120**~~ **0**
Demand	180	~~**140**~~ **20**	100		

❖ بعد تشغيل الخلية $_{32}$ نجد أن الكمية المعروضة (S_3=0) أي أن الكميـــة المعروضـــة قـــد استنفذت كليا وعليه يتم **حذف تكاليف خلايا السطر الثالث**، يتم إعادة حساب فرق التكلفة لكل خليـــة من خلايا الأسطر.

السطر الأول:	**السطر الثاني:**
الخلية $_{11}$ = 1−5−2=**−6**	الخلية $_{21}$ = 2−4−2=−4
الخلية $_{12}$ =3−5−4=**−6**	الخلية $_{22}$ = 4−4−4=−4
الخلية $_{13}$ = 5−5−5=−5	**الخلية $_{23}$** = 3−4−5=**−6**

من خلال ملاحظة فرق التكلفة لكل خلية نجد أن هناك ثلاثة خلايا (الخلية $_{11}$، الخلية $_{12}$، الخلية $_{23}$) تمتلك نفس فرق التكلفة، وعليه نختار الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة ممكنة أي الخلية $_{11}$ يتم تشغيلها بـــ: 100 وحدة.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3		Supply
S_1	**100** 1	3	5		~~**100**~~ **0**
S_2	2	4	3		200
Demand	~~**180**~~ **80**	20	100		

❖ يتم إعادة حساب فرق التكلفة لكل خلية من خلايا الأسطر، مع حذف السطر الأول $S_1=0$، أي أن المصدر الأول قد استنفذ كل الكمية التي تم انتاجها، ومن ثم يتبقى لنا فقط السطر الثاني فقط، ويتم تشغيله بالاعتماد على مبدأ أقل تكلفة، أي نشغل الخلية التي بها أقل تكلفة حتى يـتم اسـتنفاذ الكميات المطلوبة مع الكميات المعروضة.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3		Supply
S_2	**80** 2	**20** 4	**100** 3		~~**200**~~ **0**
Demand	~~**80**~~ **0**	~~**20**~~ **0**	~~**100**~~ **0**		

❖ بعد استكمال تشغيل الخلايا واستنفاذ الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة، يكون جدول الحل الابتدائي باستخدام طريقة **RAM** كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	**100** 1	3	5	2	100
S_2	**80** 2	**20** 4	**100** 3	7	200
S_3	5	**120** 2	8	**160** 3	280
Demand	180	140	100	160	

$$\begin{cases} X_{11} = 100 & X_{23} = 100 \\ X_{21} = 80 & X_{32} = 120 \\ X_{22} = 20 & X_{34} = 160 \end{cases}$$

$$X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{24}, X_{31}, X_{33}=0$$

أما تكلفة النقل فيمكن حسابها باستخدام دالة الهدف:

$$Cost = (1\times100) + (2\times80) + (4\times20) + (3\times100) + (2\times120) + (3\times160) = \mathbf{1360\ \$}$$

ثالثا: طرق الحل الأمثل

بعد استخدام الطرق السابقة لعملية التوزيع وايجاد التوزيع المبدئي للمشكلة يجب التأكد من أن هذا الحل هو الأمثل والذي يؤدي إلى أقل تكلفة ممكنة، وعليه يوجد هناك العديد من الطرق التي تساعدنا إلى الوصول إلى الحل الأمثل، ومن بين هذه الطرق نجد:

1) طريقة الحجر التنقل (التخطي) Stepping Stone Method

سميت **الطريقة بالقفز على الصخور لاجتياز النهر دون الوقوع في الماء،** انطلاقا من هذه الفكرة فإن عملية الوصول إلى حل نهائي وفقا لهذه الطريقة تعتمد على التنقل على مستوى الخانات المملوءة فقط دون الاعتماد على الخانات الفارغة، لذلك نقوم بتبادل كمية بين الخلايا المملوءة فقط مع إحداث ما يشبه الدارة المغلقة يجب أن تنطلق من خانة مشغلة وتنتهي في خانة مشغلة، حيث يتم نقل أقل كمية في هذه الدارة لقابليتها في التنقل بين الخلايا المشغلة.

وتتمثل خطوات الحل وفق طريقة الحجر المتنقل فيما يلي:

1) وضع بيانات المشكلة في صورة مصفوفة توزيع (جدول)؛
2) إجراء التوزيع المبدئي الأول عن طريق اتباع احدى طرق التوزيع (طريقة الأقل تكلفة أو طريقة الزاوية الشمالية .... وغيرها)؛
3) تأكد من أن المشكلة بعد اجراء هذا التوزيع غير متحللة، وذلك عن طريق التأكد من صحة المعادلة: عدد الخلايا المستغلة = (عدد الصفوف + عدد الاعمدة – 1)؛
4) إيجاد قيمة كل الخلايا المائية (الخلايا غير المستغلة)، وذلك عن طريق تحديد مسار تقويم كل خلية على حدى واحتساب الوفورات في التكاليف (الأرقام السالب) والزيادات في التكاليف (الأرقام الموجبة) التي تترتب على نقل وحدة واحدة من خلال هذه الخلية؛
5) الاختيار من بين الخلايا المائية تلك التي تؤدي إلى تحقيق أقصى الوفورات في التكاليف (الخلية ذات أكبر قيمة مطلقة بإشارة سالبة)، وفي حالة تساوي خليتين أو أكثر نختار من بينها تلك التي يمكن نقل أكبر عدد من الوحدات خلالها، اذا كان قيم الخلايا المائية موجب فقد توصلنا إلى التوزيع الامثل؛

6) نحسب الحد الأقصى لعدد الوحدات التي يمكن نقلها من خلال الخلية المختارة عن طريق تحديد الأركان الموجبة والأركان السالبة، ويمثل هذا العدد الحد الأقصى للوحدات التي يمكن نقلها من خلال الخلية المختارة؛

7) نقوم بإعادة التوزيع على أساس الخلية المختارة؛

8) نكرر الخطوات من 3 إلى 7 إلى أن تصل إلى برنامج التوزيع الأمثل.

ملاحظات:

- **كيف يتم تعديل جدول النقل؟**

يتم اختيار المسارات السالبة الأكثر في التخفيض يتم اختياره وتعديل الخلية نفسها بأخذ مسارها المتعرج، ويتم مقارنة الكميات في التكلفة غير مباشرة السالبة بينها واختيار الكمية الأقل تطرح من الخلايا السالبة وتضاف للخلايا الموجبة.

- **ماذا نعني باختبار أمثلية الحل؟**

بمعنى هل ممكن أن نقلل من تكلفة النقل للمشكلة المعنية من التكاليف الكلية أم هي أقل تكلفة نقل ممكنة ولا يتم تقليلها.

مثال:

اليك جدول الحل الابتدائي باستخدام طريقة زاوية الشمال الغربي كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	100 (1)	(3)	(5)	(2)	100
S_2	80 (2)	120 (4)	(3)	(7)	200
S_3	(5)	20 (2)	100 (8)	160 (3)	280
Demand	180	140	100	160	

☜ **المطلوب:** أوجد طريقة النقل المثلى باستخدام **طريقة الحجر التنقل؟**

الحل:

❖ نتأكد من صحة المعادلة: عدد الخلايا المستغلة = (عدد الصفوف + عدد الاعمدة – 1)، أي أن:

عدد الخلايا المشغلة= 3+4−1 = 6 خلايا.

بما أن عدد الخلايا المشغلة يساوي 6 خلايا، نقوم بحساب قيمة كل الخلايا المائية (الخلايا غير المستغلة)، وذلك عن طريق تحديد مسار تقويم كل خلية على حدى واحتساب الوفورات في التكاليف (الأرقام السالب) والزيادات في التكاليف (الأرقام الموجبة) التي تترتب على نقل وحدة واحدة من خلال هذه الخلية، كما يلي:

الخلية$_{12}$ = $C_{11}- C_{21}+ C_{22}-C_{12}$ — **الخلية$_{12}$** = $1-2+4-3=$**0**

الخلية$_{13}$ = $C_{11}- C_{21}+ C_{22}- C_{32}+ C_{33}- C_{13}$ — **الخلية$_{13}$** = $1-2+4-2+8-5=$**−4**

الخلية$_{14}$ = $C_{11}- C_{21}+ C_{22}- C_{32}+ C_{34}- C_{14}$ — **الخلية$_{14}$** = $1-2+4-2+3-2=$**−2**

الخلية$_{23}$ = $C_{22}- C_{32}+ C_{33}- C_{23}$ — **الخلية$_{23}$** = $4-2+8-3=$**−7**

الخلية$_{24}$ = $C_{22}- C_{32}+ C_{34}- C_{24}$ — **الخلية$_{24}$** = $4-2+3-7=$**2**

الخلية$_{31}$ = $C_{21}- C_{22}+ C_{32}- C_{31}$ — **الخلية$_{31}$** = $2-4+2-5=$**5**

نختار الترحيل الى **الخلية$_{23}$** لأنها تحتوي على أكبر فارق متبوع بإشارة سالبة (يعني أن النقل عبر هذه الخلية سيساهم بتخفيض التكلفة بـــ: 7$ للوحدة الواحدة)، ومن ثم لابد من البحث عن خط السير المغلق الذي أحدث الفارق] (+) الخلية$_{23}$، (−) الخلية$_{22}$، (+) الخلية$_{32}$، (−) الخلية$_{33}$]، وعليه لابد الاختيار ما بين الخلية$_{22}$ أو الخلية$_{33}$ (نختار الخلية التي لا تحدث فارق سالب أثناء عملية الترحيل)، أي نرحل عدد الوحدات الموجودة في الخلية$_{33}$، أي ترحيل الكمية 100 وحدة يتم اضافتها للخلايا التي تحتوي على اشارة موجبة وتخفيضها من الخلايا التي تحتوي على اشارة سالبة (أي المحافظة على توازن الجدول).

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	100 / 1	0 / 3	-4 / 5	-2 / 2
S_2	80 / 2	120 / -4	-7 / +3	2 / 7
S_3	5 / 5	20 / +2	100 / -8	160 / 3

بعد عملية الترحيل يصبح جدول النقل كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	100 / 1	3	5	2
S_2	80 / 2	20 / 4	100 / 3	7
S_3	5	120 / 2	7 / 8	160 / 3

❖ بعد تشغيل الخلية$_{23}$، نتأكد من أن عدد الخلايا المشغلة يساوي 6 خلايا، نقوم بحساب قيمة كل الخلايا المائية (الخلايا غير المشغلة):

الخلية $_{12}$ = $C_{11}-C_{21}+C_{22}-C_{12}$ — **الخلية $_{12}$** = $1-2+4-3=\mathbf{0}$

الخلية $_{13}$ = $C_{11}-C_{21}+C_{23}-C_{13}$ — **الخلية $_{13}$** = $1-2+3-5=\mathbf{3}$

الخلية $_{14}$ = $C_{11}-C_{21}+C_{22}-C_{32}+C_{34}-C_{14}$ — **الخلية $_{14}$** = $1-2+4-2+3-2=\mathbf{-2}$

الخلية $_{24}$ = $C_{34}-C_{32}+C_{22}-C_{24}$ — **الخلية $_{24}$** = $3-2+4-7=\mathbf{2}$

الخلية $_{31}$ = $C_{21}-C_{22}+C_{32}-C_{31}$ — **الخلية $_{31}$** = $2-4+2-5=\mathbf{5}$

الخلية $_{33}$ = $C_{32}-C_{22}+C_{23}-C_{33}$ — **الخلية $_{33}$** = $2-4+3-8=\mathbf{7}$

نختار الترحيل الى **الخلية** $_{14}$ لأنها تحتوي على أكبر فارق متبوع بإشارة سالبة، ومن ثم لابد من البحث عن خط السير المغلق الذي أحدث الفارق [(+) الخلية$_{14}$، (−) الخلية$_{11}$، (+) الخلية$_{21}$، (−) الخلية$_{22}$، (+) الخلية$_{32}$، (−) الخلية$_{34}$]، وعليه لابد الاختيار ما بين الخلية$_{11}$ أو الخلية$_{22}$ الخلية$_{34}$ (نختار الخلية التي لا تحدث فارق سالب أثناء عملية الترحيل)، أي نرحل عدد الوحدات الموجودة في الخلية$_{22}$ ، أي ترحيل الكمية 20 وحدة يتم اضافتها للخلايا التي تحتوي على اشارة موجبة وتخفيضها من الخلايا التي تحتوي على اشارة سالبة (أي المحافظة على توازن الجدول).

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	100 -1	0 3	3 5	-2 +2
S_2	80 +2	20 -4	100 3	2 7
S_3	5 5	120 +2	7 8	160 -3

بعد عملية الترحيل يصبح جدول النقل كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	80 1	3	5	20 2
S_2	100 2	4	100 3	7
S_3	5	140 2	8	140 3

❖ بعد تشغيل الخلية$_{14}$، نتأكد من أن عدد الخلايا المشغلة يساوي 6 خلايا، نقوم بحساب قيمة كل الخلايا المائية (الخلايا غير المشغلة):

الخلية$_{12}$ = $C_{32}- C_{34}+ C_{14}- C_{12}$ **الخلية$_{12}$** = $2-3+2-3=$**2**

الخلية$_{13}$ = $C_{11}- C_{21}+ C_{23}- C_{13}$ **الخلية$_{13}$** = $1-2+3-5=$**3**

الخلية$_{22}$ = $C_{21}- C_{11}+ C_{14}- C_{34}+ C_{32}- C_{22}$ **الخلية$_{22}$** = $2-1+2-3+2-4=$**2**

الخلية$_{24}$= $C_{21}- C_{11}+ C_{14}- C_{24}$ **الخلية$_{24}$**= $2-1+2-7=$**4**

الخلية$_{31}$ = $C_{34}- C_{14}+ C_{11}- C_{31}$ **الخلية$_{31}$** = $3-2+1-5=$**3**

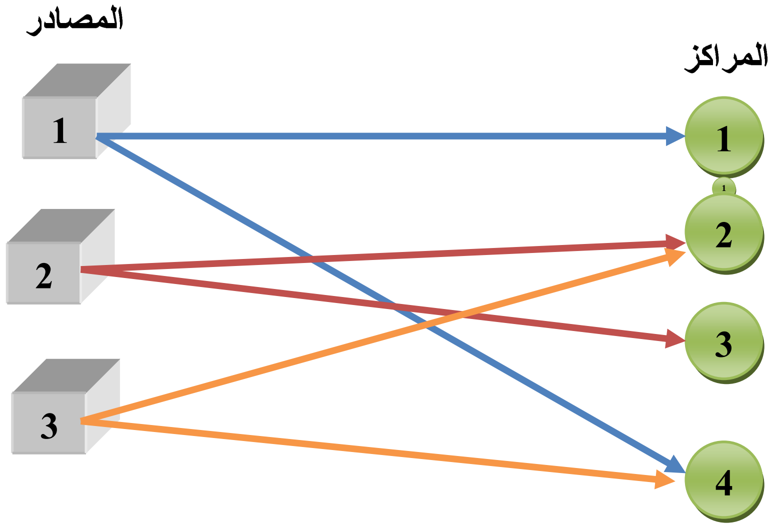
الخلية$_{33}$ = $C_{23}- C_{21}+ C_{11}- C_{14}+ C_{34}- C_{33}$ **الخلية$_{33}$** = $3-2+1-2+3-8=$**5**

نلاحظ أن كل الفروقات **بإشارة موجبة** (يعني أن النقل وفق هذه الخلايا يساهم في زيادة التكاليف)، أي نتوقف عن الحل ومن ثم وصلنا إلى الحل الأمثل.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	**80** 1	2 / 3	3 / 5	**20** 2
S_2	**100** 2	2 / 4	**100** 3	4 / 7
S_3	3 / 5	**140** 2	5 / 8	**140** 3

المتغيرات الأساسية هي:

$$\begin{cases} X_{11} = 80 & X_{23} = 100 \\ X_{14} = 20 & X_{32} = 140 \\ X_{21} = 100 & X_{34} = 140 \\ X_{12}, X_{13}, X_{22}, X_{24}, X_{31}, X_{33} = 0 \end{cases}$$



ومنه طريقة النقل تكون وفق الخطة التالية:

- **المصدر S_1:** يمول المركز D_1 بـــ: 80 وحدة، والمركز D_4 بـــ: 20 وحدة؛
- **المصدر S_2:** يمول المركز D_1 بـــ: 100 وحدة، والمركز D_3 بـــ: 100 وحدة؛
- **المصدر S_3:** يمول المركز D_2 بـــ: 140 وحدة، والمركز D_4 بـــ: 140 وحدة؛

أما تكلفة النقل فيمكن حسابها باستخدام دالة الهدف:

$$Cost = (1\times80) + (2\times20) + (2\times100) + (3\times100) + (2\times140) + (3\times140) = \mathbf{1320\$}$$

بالرجوع الى التكلفة التي تحصلنا عليها في بداية الحل باستخدام طريقة زاوية الشمال الغربي 2060 $، نجد أنه بالفعل التكاليف تناقصت بــ: 2060−1320= **740** $.

2) طريقة التوزيع المعدل (MODI)

نهاية فكرة هذه الطريقة هي نفسها نهاية فكرة التخطي، غير أن الاختلاف في المنهجية، إذ أن هذه الطريقة تفترض وجود مجهولين هما: Vj ويعبر عن **الأعمدة** و Ui ويعبر عن **الصفوف**، حيث أن حاصل جمعهما بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل يجب أن يساوي تكلفة نقل الوحدة الواحدة عبر تلك الخلايا، أي إذا كانت تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i الى المركز j هي Cij فيجب أن يكون:

$$\mathbf{C_{ij} = U_i + V_j}$$

تتميز هذه الطريقة بأنه عندما يتم تحديد التوزيع المبدئي، يتم احتساب مقدار معين لكل صف ولكل عمود في مصفوفة التوزيع ليتم استخدامها في تقويم المربعات او الخلايا المائية، فمثلا إذا رمزنا للصف بالرمز (U_i)، حيث (U_1) تعني الصف الأول، (U_2) تعني الصف الثاني .... وهكذا، وإذا رمزنا للعمود بالرمز (V_j) حيث (V_1) تعني العمود الأول، (V_2) تعني العمود الثاني .... وهكذا، فإن كل خلية لابد وأن تقع في صف معين وعمود معين، وبذلك فإذا كانت:

(U_i) : القيمة المعطاة للصفi ؛

(V_j) : القيمة المعطاة للعمودj ؛

تليها الخطوة الثانية وهي ايجاد التكاليف الحدية للخلايا غير الداخلة في الحل الأساسي، وذلك عن طريق المعادلة:

$$\boldsymbol{\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j}$$

ثم يتم جمع كل منها في خلية التقاطع للصف والعمود للخلايا الفارغة والخلية الفارغة ذات الأكبر فارق بين حاصل الجمع هذا وتكلفة النقل في الخلية يكون لها أولوية الشغل، وفي حالة التساوي يتم شغل الخلية التي تستوعب أكبر كمية ممكنة، وفي حالة تساوي الكميات التي يمكن نقلها وتساوي الفارق نذهب للخلية ذات الأقل تكلفة ونشغلها، وشرط التوقف في هذه الطريقة هو الوصول إلى أن تكون جميع حواصل الجمع لمعاملات التحسين أكبر من أو تساوي تكاليف النقل لكل خلية.

مثال:

اليك جدول الحل الابتدائي باستخدام طريقة زاوية الشمال الغربي كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
S_1	100 / 1	3	5	2	100
S_2	80 / 2	120 / 4	3	7	200
S_3	5	20 / 2	100 / 8	160 / 3	280
Demand	180	140	100	160	

☜ **المطلوب:** أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل؟

الحل:

❖ نقوم بتحسين الحل الأولي من خلال حساب معاملات التحسين لكل سطر وعمود:

$V_1+U_1=1$ $V_1+U_2=2$	$V_2+U_2=4$ $V_2+U_3=2$	$V_3+U_3=8$ $V_4+U_3=3$

فنضع افتراضيا **(U_3 =0)** حيث يستحسن مساواة هذه القيمة للصفر عند العمود أو الصف الذي يحتوي على أكبر عدد من الخلايا المملؤة، هذا تسهيلا لحساب باقي معاملات التحسين للخلايا كما في الجدول أدناه:

(1)		**(2)**
$V_2+U_3=2\rightarrow$ $\mathbf{V_2=2}$ $V_3+U_3=8\rightarrow$ $\mathbf{V_3=8}$ $V_4+U_3=3\rightarrow$ $\mathbf{V_4=3}$	نقوم بالتعويض في باقي المعادلات لنتحصل على القيم التالية:	$V_2=2\rightarrow V_2+U_2=4\rightarrow$ $\mathbf{U_2=2}$ $U_2=2\rightarrow V_1+U_2=2\rightarrow$ $\mathbf{V_1=0}$ $V_1=0\rightarrow V_1+U_1=1\rightarrow$ $\mathbf{U_1=1}$

نقوم بحساب صافي التغير للخلايا غير المشغلة (المائية) بالطريقة التالية:

الخلية$_{12}$ = $V_2- U_1-C_{12}$ الخلية$_{12}$ = 3-1-2=**0**

الخلية$_{13}$ = $V_3- U_1-C_{13}$ الخلية$_{13}$ = 8-1-5=**-4**

الخلية$_{14}$ = $V_4- U_1-C_{14}$ الخلية$_{14}$ = 3-1-2=**-2**

الخلية$_{23}$ = $V_3- U_2-C_{23}$ الخلية$_{23}$ = 8-2-3=**-7**

الخلية$_{24}$= $V_4- U_2-C_{24}$ الخلية$_{24}$= 3-2-7=**2**

الخلية$_{31}$ = $V_1- U_3-C_{31}$ الخلية$_{31}$ = 0-0-5=**5**

نلاحظ أن أعظم فارق بين مجموع معاملات التحسين وتكاليف النقل هو (7−) الموجود في **خليـــة 23**، الكمية التي يمكن تحريكها هي 100 وحدة كما هو محدد بالإشارات في الجدول الســـابق، مـــع المحافظة على شرط التوازن عدد الخلايا المشغولة مساويا لـــ: m+n-1 أثناء عملية الترحيل أي انه يجب أن يبقى دائما عدد الخلايا المشغولة هو 6 .

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	U_i
S_1	100 / 1	0 / 3	-4 / 5	-2 / 2	U_1 =1
S_2	80 / 2	120 / -4	-7 / +3	2 / 7	U_2 =2
S_3	5 / 5	20 / +2	**100** / - 8	160 / 3	U_3 =0
V_j	V_1 = 0	V_2 = 2	V_3 = 8	V_4 = 3	

بعد عملية الترحيل يصبح جدول النقل كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	U_i
S_1	100 / 1	3	5	2	U_1
S_2	80 / 2	20 / 4	100 / 3	7	U_2
S_3	5	120 / 2	8	160 / 3	U_3
V_j	V_1	V_2	V_3	V_4	

2) نقوم بتحسين الحل الأولي من خلال حساب معاملات التحسين لكل سطر وعمود:

$V_1+U_1=1$	$V_2+U_2=4$	$V_3+U_2=3$
$V_1+U_2=2$	$V_2+U_3=2$	$V_4+U_3=3$

فنضع افتراضيا $(U_2\ =0)$ هذا تسهيلا لحساب باقي معاملات التحسين للخلايا كما في الجدول أدناه:

(1)		(2)
$V_1+U_2=2\rightarrow \mathbf{V_1=2}$ $V_2+U_2=4\rightarrow \mathbf{V_2=4}$ $V_3+U_2=3\rightarrow \mathbf{V_3=3}$	نقوم بالتعويض في باقي المعادلات لنتحصل على القيم التالية:	$V_1=2\rightarrow V_1+U_1=1\rightarrow \mathbf{U_1=-1}$ $V_2=4\rightarrow V_2+U_3=2\rightarrow \mathbf{U_3=-2}$ $U_3=-2\rightarrow V_4+U_3=3\rightarrow \mathbf{V_4=5}$

ثم نقوم بحساب صافي التغير للخلايا غير المشغلة (المائية) بالطريقة التالية:

الخلية$_{12}$ = $V_2-U_1-C_{12}$ ⟵ الخلية$_{12}$ = $0=4-(-1)-3$

الخلية$_{13}$ = $V_3-U_1-C_{13}$ ⟵ الخلية$_{13}$ = $3=3-(-1)-5$

الخلية$_{14}$ = $V_4-U_1-C_{14}$ ⟵ **الخلية$_{14}$** = $\mathbf{-2}=5-(-1)-2$

الخلية$_{24}$ = $V_4-U_2-C_{24}$ ⟵ الخلية$_{24}$ = $2=5-0-7$

الخلية$_{31}$ = $V_1-U_3-C_{31}$ ⟵ الخلية$_{31}$ = $5=2-(-2)-5$

الخلية$_{33}$ = $V_3-U_3-C_{33}$ ⟵ الخلية$_{33}$ = $7=3-(-2)-8$

لم يتحقق شرط الأمثلية بعد، نلاحظ أن أعظم فارق بين مجموع معاملات التحسين وتكاليف النقل هو (-2) الموجود في خلية $_{14}$، الكمية التي يمكن تحريكها هي 20 وحدة كما هو محدد بالإشارات في الجدول السابق، مع المحافظة على شرط التوازن عدد الخلايا المشغولة مساويا لـ: $m+n-1$ أثناء عملية التحريك أي انه يجب أن يبقى دائما عدد الخلايا المشغولة هو 6، حيث يظهر الجدول التالي عملية النقل كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	U_i
S_1	100 1 -	0 3	3 5	-2 +2	U_1 =-1
S_2	80 2 +	20 - 4	100 3	10 7	U_2 =0
S_3	5 5	120 2 +	7 8	160 - 3	U_3 =-2
V_j	V_1= 2	V_2 = 4	V_3 = 3	V_4 = 5	

بعد عملية الترحيل يصبح جدول النقل كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	U_i
S_1	80 1	3	5	20 2	U_1
S_2	100 2	4	100 3	7	U_2
S_3	5	140 2	8	140 3	U_3
V_j	V_1	V_2	V_3	V_4	

❖ نقوم بتحسين الحل الأولي من خلال حساب معاملات التحسين لكل سطر وعمود:

$V_4+U_1=2$ $V_4+U_3=3$	$V_2+U_3=2$ $V_3+U_2=3$	$V_1+U_1=1$ $V_1+U_2=2$

نضع افتراضيا $(V_4=0)$ هذا تسهيلا لحساب باقي معاملات التحسين للخلايا كما في الجدول أدناه:

(2)		(1)
$U_1=2\rightarrow V_1+U_1=1\rightarrow \mathbf{V_1=-1}$ $V_1=-1\rightarrow V_1+U_2=2\rightarrow \mathbf{U_2=3}$ $U_2=3\rightarrow V_3+U_2=3\rightarrow \mathbf{V_3=0}$ $U_3=3\rightarrow V_2+U_3=2\rightarrow \mathbf{V_2=-1}$	نقوم بالتعويض في باقي المعادلات لنتحصل على القيم التالية:	$V_4+U_1=2\rightarrow \mathbf{U_1=2}$ $V_4+U_3=3\rightarrow \mathbf{U_3=3}$

نقوم بحساب صافي التغير للخلايا غير المشغلة (المائية) بالطريقة التالية:

الخلية$_{12}$ = $V_2 - U_1 - C_{12}$ ⟸ الخلية$_{12}$ = **2**=(-1)-2-3

الخلية$_{13}$ = $V_3 - U_1 - C_{13}$ ⟸ الخلية$_{13}$ = **3**=0-2-5

الخلية$_{22}$ = $V_2 - U_2 - C_{22}$ ⟸ الخلية$_{22}$ = **2**=(-1)-3-4

الخلية$_{24}$ = $V_4 - U_2 - C_{24}$ ⟸ الخلية$_{24}$ = **4**=0-3-7

الخلية$_{31}$ = $V_3 - U_1 - C_{13}$ ⟸ الخلية$_{31}$ = **3**=(-1)-3-5

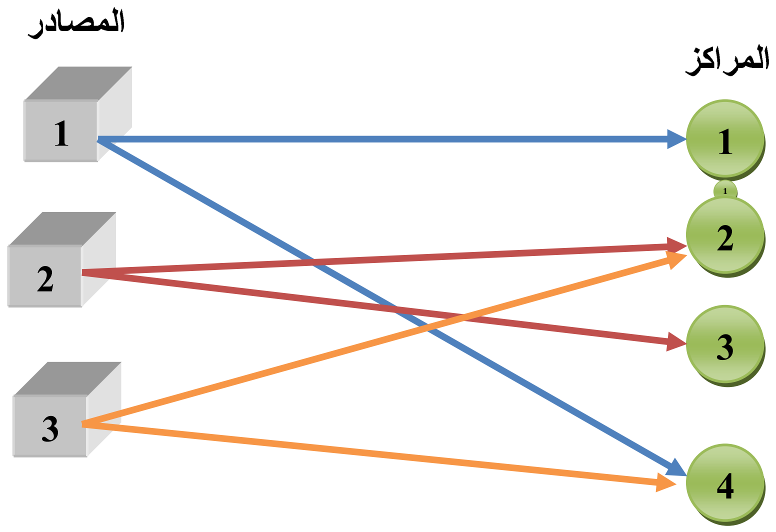
الخلية$_{33}$ = $V_3 - U_3 - C_{33}$ ⟸ الخلية$_{33}$ = **5**=0-3-8

نلاحظ أن كل الفروقات **بإشارة موجبة** (يعني أن النقل وفق هذه الخلايا يساهم في زيادة التكاليف)، أي نتوقف عن الحل ومن ثم وصلنا إلى الحل الأمثل.

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	D_4	U_i
S_1	80 / 1	2 / 3	3 / 5	20 / 2	$U_1=2$
S_2	100 / 2	2 / 4	100 / 3	4 / 7	$U_2=3$
S_3	3 / 5	140 / 2	4 / 8	140 / 3	$U_3=3$
V_j	$V_j=-1$	$V_2=-1$	$V_3=0$	$V_4=0$	

المتغيرات الأساسية هي:

$$\begin{cases} \mathbf{X_{11}} = 80 & \mathbf{X_{23}} = 100 \\ \mathbf{X_{14}} = 20 & \mathbf{X_{32}} = 140 \\ \mathbf{X_{21}} = 100 & \mathbf{X_{34}} = 140 \\ X_{12}, X_{13}, X_{22}, X_{24}, X_{31}, X_{33} = 0 \end{cases}$$



ومنه طريقة النقل تكون وفق الخطة التالية:

- **المصدر S_1:** يمول المركز D_1 بـــ: 80 وحدة، والمركز D_4 بـــ: 20 وحدة؛
- **المصدر S_2:** يمول المركز D_1 بـــ: 100 وحدة، والمركز D_3 بـــ: 100 وحدة؛
- **المصدر S_3:** يمول المركز D_2 بـــ: 140 وحدة، والمركز D_4 بـــ: 140 وحدة؛

أما تكلفة النقل فيمكن حسابها باستخدام دالة الهدف:

Cost = (1×80) + (2×20) + (2×100) + (3×100) + (2×140) + (3×140) = **1320$**

رابعا: حالات الاختلاف في مشاكل النقل

يمكن أن تظهر اختلافات في نماذج النقل حسب الوضعيات التالية:

1. مجموع العرض لا يساوي مجموع الطلب

في الحياة الاقتصادية والحياة العملية عادة ما يكون مجموع العرض لا يساوي مجموع الطلب، في حالة ما مجموع العرض يفوق مجموع الطلب، فإنه ليس من الضروري إحداث تغيير في نموذج النقل وإنما الفائض في العرض سيظهر كفائض غير مستعمل أو لم يتم نقله من المصدر، وهذا عن طريق إضافة مركز وهمي يمثل الفرق، حتى نحافظ على فرضية النموذج المتوازن.

أما في الحالة التي يكون فيها مجموع العرض أقل من مجموع الطلب فإن جدول النقل لن يتحقق له حل عملي، يعني أن عدد الخلايا المشغلة أقل من مجموع **(m + n - 1)** وبالتالي يجب إحداث مصدر وهمي بتكاليف صفر تمثل الفرق بين العرض والطلب، الوحدات التي تظهر في المصدر الوهمي تمثل وحدات الاحتياج الفعلية.

مثال:

اليك النموذج الرياضي بحيث X_{ij} الكمية الموزعة من المصدر (الوحدة) i إلى الطلب السوق j، دالة الهدف هي تخفيض تكاليف النقل.

$$\textbf{Min C} = 6X_{11} + 7X_{12} + 8X_{13} + 10X_{21} + 8X_{22} + 9X_{23} + 2X_{31} + 12X_{32} + 13X_{33}$$

قيود العرض:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 120 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 110 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} = 70 \end{cases}$$

قيود الطلب:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} \le 80 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} \le 90 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} \le 140 \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3 \,/\quad j = 1, 2, 3 \qquad X_{ij} \ge 0$$

المطلوب:

- ضع البرنامج الرياضي في جدول نقل؟
- تأكد من توازن نموذج النقل؟
- أوجد الحل الابتدائي باستخدام طريقة أقل تكلفة؟

الحل:

❖ **جدول النقل:**

	D_1	D_2	D_3	Supply
$Source_1$	6	7	8	120
$Source_2$	10	8	9	110
$Source_3$	2	12	13	70
Demand	80	90	140	**300** / **310**

❖ **التأكد من توازن النموذج:**

نلاحظ أن العرض (300 وحدة) يقل عن الطلب (310) لذا يجب إضافة **سطر وهمي (Dummy)** **بقيمة: 10 وحدات** (310-300 = 10 وحدات).

المصادر \ الأسواق	D_1	D_2	D_3	Supply
Source 1	6	7	8	20
Source 2	10	8	9	110
Source 3	2	12	13	70
Dummy	**0**	**0**	**0**	**10**
Demand	80	90	140	310 \ 310

❖ **الحل الابتدائي باستخدام طريقة أقل تكلفة:**

المصادر \ الأسواق	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	**10** / 6	**90** / 7	**20** / 8	20
S_2	10	8	**110** / 9	110
S_3	**70** / 2	12	13	70
Dummy	0	0	**10** / 0	10
Demand	80	90	140	310 \ 310

ومنه تكون تكلفة النقل الابتدائية باستخدام طريقة أقل تكلفة هي:

$$C = (6\times10) + (7\times90) + (8\times20) + (9\times110) + (2\times70) + (0\times10) = \mathbf{1980\ \$}$$

2. حالة التعظيم Max

في بعض الحالات الخاصة يمكن أن تظهر مسائل النقل على الشكل **Max**، أي تعظيم العائد أو الربح، في حالة ظهور حالة مثل هذه فإن الشكل لنموذج النقل لن يحدث له أي تغيير، التغيير الممكن حدوثه يكمن في طريقة الحل فقط.

نتبع نفس خطوات الحل السابقة التي تم التطرق اليها في الحل في حالة التكاليف سواء بطريقة القفز على الصخور أو بطريقة التوزيع المعدلة، ماعدا الاختلاف يكون في الأمور التالية:

- الاختلاف يكون في كيفية اختيار للقيمة من الخلايا التي لم تستغل: يجب اختيار القيمة التي تمثل أعلى قيمة بالموجب، والتي تعني أن هذه القيمة سوف ترفع الأرباح بوحدة واحدة حسب هذه القيمة في موقع الخلية.
- الاختلاف في كيفية تحديد الجدول النهائي الذي يمثل الحل الأمثل: يجب أن يكون جدول الحل الأمثل للخلايا غير مشغلة كلها بقيمة سالبة أو تساوي الصفر.

مثال:

شركة وطنية للصناعات البلاستكية لديها ثلاث مصانع جهوية وكانت الطاقة الانتاجية لهذه المصانع 85 وحدة، 25 وحدة، 20 وحدة، على التوالي والطلب على منتجات هذه الشركة في مناطق التوزيع الثلاثة هي: 60 وحدة، 30 وحدة، 40 وحدة على التوالي.

ربح الوحدة الواحدة كالتالي:

2	6	7
6	8	6
5	7	9

☜ **<u>المطلوب:</u>** باستعمال طريقة زاوية الشمال الغربي وطريقة **MODI** أوجد الحل الأمثل حسب النموذج الممكن تكوينه؟

الحل:

❖ **التأكد من توازن النموذج:**

- مجموع العرض يساوي مجموع الطلب: نلاحظ أن مجموع العرض (130 وحدة) يســاوي مجموع الطلب (130 وحدة).
- عدد الخلايا المشغلة: عدد الخلايا المشغولة مساويا لـــ: m+n-1 أثناء عملية الترحيل أي أنه يجب أن يبقى دائما عدد الخلايا المشغولة هو 5.

❖ الحل الابتدائي بطريقة زاوية الشمال الغربي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	60 / 2	25 / 6	7	85
S_2	6	5 / 8	20 / 6	25
S_3	5	7	20 / 9	20
Demand	60	30	40	

❖ الحل الأمثل باستخدام طريقة MODI

➢ حساب صافي التغير للخلايا المائية (غير المشغلة)

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	U_i
S_1	60 / 2	25 / 6	+3 / 7+	$U_1 = 0$
S_2	+2 / 6	5 / +8	20 / -6	$U_2 = 2$
S_3	2– / 5	–4 / 7	20 / 9	$U_3 = 5$
V_j	$V_1 = 2$	$V_2 = 6$	$V_3 = 4$	

نلاحظ أن أعظم فارق بين مجموع معاملات التحسين وأرباح النقل هو **(+3)** الموجود في **خلية** 13، الكمية التي يمكن تحريكها هي 20 وحدة كما هو محدد بالإشارات في الجدول السابق، مع المحافظة على شرط التوازن عدد الخلايا المشغولة مساويا لـ: m+n-1 أثناء عملية الترحيل أي انه يجب أن يبقى دائما عدد الخلايا المشغولة هو 5.

➢ نقوم بتحسين الحل الأولي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	U_i
S_1	60 2−	5 +6	20 7	$U_1=0$
S_2	+2 +6	25 −8	3- 6	$U_2=2$
S_3	1+ 5	−1 7	20 9	$U_3=2$
V_j	$V_1=2$	$V_2=6$	$V_3=7$	

لم يتحقق شرط الأمثلية بعد، نلاحظ أن أعظم فارق بين مجموع معاملات التحسين وأرباح النقل هو (2+) الموجود في خلية $_{21}$، الكمية التي يمكن تحريكها هي 25 وحدة كما هو محدد بالإشارات في الجدول السابق، مع المحافظة على شرط التوازن عدد الخلايا المشغولة مساويا لـــ: m+n-1 أثناء عملية التحريك أي انه يجب أن يبقى دائما عدد الخلايا المشغولة هو 5.

➢ نقوم بتحسين الحل الأولي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	U_i
S_1	35 2 −	30 6	20 +7	$U_1=0$
S_2	25 6	2- 8	5− 6	$U_2=4$
S_3	1+ + 5	−1 7	20 9 −	$U_3=2$
V_j	$V_1=2$	$V_2=6$	$V_3=7$	

لم يتحقق شرط الأمثلية بعد، نلاحظ أن أعظم فارق بين مجموع معاملات التحسين وأرباح النقل هو (1+) الموجود في خلية $_{31}$، الكمية التي يمكن تحريكها هي 20 وحدة كمـــا هـــو محـــدد

بالإشارات في الجدول السابق، مع المحافظة على شرط التوازن عدد الخلايا المشغولة مساويا لـــ: m+n-1 أثناء عملية التحريك أي انه يجب أن يبقى دائما عدد الخلايا المشغولة هو 5.

- نقوم بتحسين الحل الأولي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	U_i
S_1	**15** / 2	**30** / 6	**40** / 7	$U_1 = 0$
S_2	**25** / 6	-2 / 8	-5 / 6	$U_2 = 4$
S_3	**20** / 5	–2 / 7	-1 / 9	$U_3 = 3$
V_j	$V_1 = 2$	$V_2 = 6$	$V_3 = 7$	

☜ نلاحظ أن كل الفروقات **بإشارة سالبة** (يعني أن النقل وفق هذه الخلايا يساهم في تخفيض الأرباح)، أي نتوقف عن الحل ومن ثم وصلنا إلى الحل الأمثل.

$$\begin{cases} X_{11} = 15 \qquad X_{21} = 25 \\ X_{12} = 30 \qquad X_{31} = 20 \\ X_{31} = 40 \\ X_{22}, X_{23}, X_{32}, X_{33} = 0 \end{cases}$$

أما أرباح النقل فيمكن حسابها باستخدام دالة الهدف:

$$\textbf{Max } Z_P = (2\times15) + (6\times30) + (7\times40) + (6\times25) + (5\times20) = \mathbf{740\$}$$

3. حالة الانحراف

حالة الانحراف تعني عدم تحقق أن عدد الخلايا المشغلة يكون أقل من **(m + n - 1)**، في حالة ظهور حالة الانحراف يجب تشغيل أحد الخلايا غير الأساسية بوحدات صفر، أي أن أحد المتغيرات الأساسية في جدول النقل يجب أن تكون مساوية للصفر، حتى تتحقق لنا عدد الخلايا المشغلة تساوي **(m + n - 1)**.

في مثل هذه الحالة نلجأ إلى طريقة رياضية لمعالجة هذا الإشكال بحيث نضع نشغل إحدى الخلايا والتي تكون ذات التكلفة الأقل في حالة تدنية التكاليف أو ذات العائد الأكبر في حالة تعظيم العوائد نشغل هذه الخلية بكمية مقدارها **(0)** وتوضع في الخلية من أجل شغلها فقط.

<u>مثال:</u>

المعطيات الموجودة في الجدول أدناه تمثل الكمية الموزعة من ثلاثة مصادر إنتاجية لمؤسسة ما لتوزع على ثلاثة مراكز توزيع وفقا لتكاليف النقل المحددة في الجدول كما يلي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	المتوفر
S_1	2	4	2	600
S_2	1	5	3	600
S_3	4	1	2	400
المطلوب	600	300	700	

من أجل الوصول إلى حل نهائي لإشكالية النقل هذه نتبع خطوات الحل العادية التالية:

❖ **أولا:** باستخدام إحدى طرق الحل الأولي نضع حلا أوليا للمسألة، ولتكن طريقة زاويـــة الشـــمالي الغربي التي نتبعها في ذلك والتي تعطينا الحل الأولي التالي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	المتوفر
S_1	600 / 2	4	2	600
S_2	1	300 / 5	300 / 3	600
S_3	4	1	400 / 2	400
المطلوب	600	300	700	

❖ **ثانيا:** نلاحظ أن شرط التوازن الرياضي غير محقق حيث أن عدد الخلايا المملؤة مساوي لأربعة (4) فقط بينما عدد المصادر مضافا إليه عدد المراكز مطروحا منه الواحد مساوي لخمسة(5) أي: $m+n-1=3+3-1=5$ لذلك نضع في الخلية الأسفل من الزاوية الشمالية الغربية ذات التكلفة الأقل المساوية للواحد (1) كمية قدرها (0) كما في الجدول التالي:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	المتوفر
S_1	600 (2)	(4)	(2)	600
S_2	**0** (1)	300 (5)	300 (3)	600
S_3	(4)	(1)	400 (2)	400
المطلوب	600	300	700	

❖ **ثالثا:** تحسين الحل الأولي (حيث سنعتمد على طريقة التوزيعات المعدلة) من خلال حساب معاملات التحسين لكل سطر وعمود ، فنضع افتراضيا $u_{i=2}=0$ حيث يستحسن مساواة هذه القيمة للصفر عند العمود أو الصف الذي يحتوي على أكبر عدد من الخلايا المملوءة ، تسهيلا لحساب باقي معاملات التحسين للخلايا كما في الجدول أدناه:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	U_i
S_1	600 (2)	-2 / 4	-2 / 2	1
S_2	0 (1)	**300** (5) −	300 (3) +	0
S_3	4 / 4	-3 / 1 +	400 (2) −	1-
V_j	1	5	3	

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	U_i
S_1	600 2 -	1 4	-2 2 +	1
S_2	0 1 +	3 5	600 3 -	0
S_3	4 4	300 1	100 2	-1
V_j	1	2	3	

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	U_i
S_1	**0** 2	3 4	**600** 2	0
S_2	**600** 1	5 5	2 3	-1
S_3	2 4	**300** 1	**100** 2	0
V_j	2	1	2	

☜ نلاحظ أن كل الفروقات **بإشارة موجبة** (يعني أن النقل وفق هذه الخلايا يساهم في زيادة التكاليف)، أي نتوقف عن الحل ومن ثم وصلنا إلى الحل الأمثل.

$$\begin{cases} \mathbf{X_{11}} = 0 \qquad \mathbf{X_{21}} = 600 \\ \mathbf{X_{13}} = 600 \qquad \mathbf{X_{32}} = 300 \\ \mathbf{X_{33}} = 100 \\ X_{12}, X_{22}, X_{23}, X_{32}, X_{31} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{Min\ Z_P} = (2\times0) + (2\times600) + (1\times600) + (1\times300) + (2\times100) = \mathbf{2300\$}$$

إذن هذه مختلف حالات الانحراف التي يمكن أن تعترض عملية حل إشكالية النقل، حيث يمكن معالجتها بطرق رياضية بسيط انطلاقا من الحل الأولي للبرنامج مهما كان الهدف من إشكالية النقل سواء تدنية التكاليف أو تعظيم العوائد.

الفصل الثاني: نماذج التخصيص

Assignment Models

تبحث هذه النماذج في كيفية توزيع عدد معين من الموارد (مدرسين، عمال، آلات، ....) لعدد من الأنشطة (مدارس، أعمال، وظائف،....) كتوزيع عدد من الموظفين على عدد من الوظائف كإنجاز عدد معين من الشركات لعدد معين من الأعمال ويدخل في هذه النماذج أيضاً حالات يمكن فيها استخدام عدة موارد لعمل أو لعدة اعمال ومثال ذلك وسائل النقل التي تبحث في ايجاد طريقة الأقل تكلفة في نقل الموارد (كمنتجات المصانع) الى غايات معينة (كالمخازن التي تقوم بدورها بتوزيعها على مراكز التسويق) ففي هذه الحالة يمكن أن تنقل المنتجات من أكثر من مصنع معين لعدة مخازن والسياسة المتبعة لذلك تعتمد بالدرجة الأولى على تكاليف نقل الوحدة من مصنع معين لكل مخزن من المخازن وعلى احتياجات هذا المخزن من المنتجات.

يمكن التعبير عن نموذج التخصيص وفقا للصيغة التالية:

$$\begin{cases} Min\,Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij} \\ S\,T:\sum_{i=1}^{n}X_{ij}=1 \quad i=1,2,3,...,n \\ \sum_{j=1}^{m}X_{ij}=1 \quad j=1,2,3,...,m \\ X_{ij}=0 \;\; or \;\; 1 \end{cases}$$

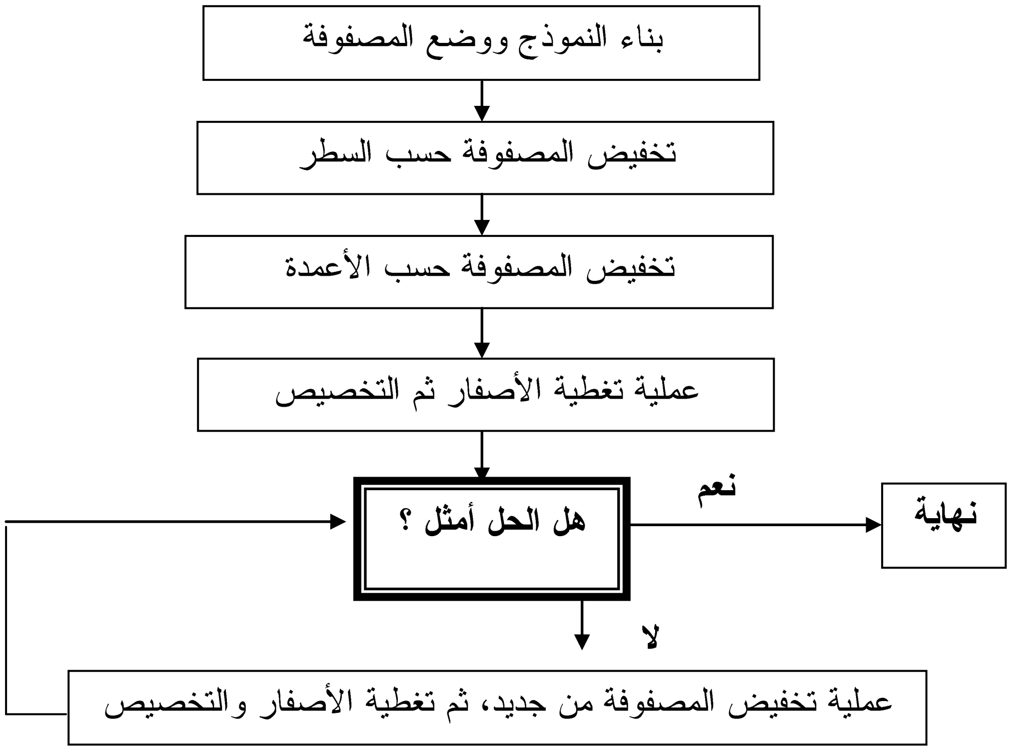
$X_{ij}=0$ تشير إلى أن الوظيفة ليست مخصصة إلى زمن التسهيلات المتاحة.

$X_{ij}=1$ تشير إلى أن الوظيفة مخصصة إلى زمن التسهيلات المتاحة.

أولا: خطوات حل نموذج التخصيص

لحل نموذج التخصيص يمكن إتباع عدة طرق منها: **طريقة العد الكامل** كما يمكن إتباع طريقة البرمجة الخطية أو طريقة النقل، كما توجد أيضا **الطريقة الهنقارية** والتي وتعتبر من أسهل الطرق في حل نموذج التخصيص، والمتمثلة في الشكل التالي:

الشكل رقم (2): خطوات حل نموذج التخصيص



والحل وفق هذه الطريقة يتطلب المراحل التالية:

- **الخطوة الأولى:** يتم البحث عن أقل تكلفة C_{ij} في كل صف وطرحها من جميع عناصر الصف الذي تتواجد فيه.
- **الخطوة الثانية:** بعد ذلك يتم البحث عن أقل قيمة في كل عمود، وطرحها من جميع عناصر العمود كما في الخطوة الأولى.
- **الخطوة الثالثة:** تمرير أقل عدد ممكن من الخطوط بحيث تغطي جميع القيم الصفرية، فإذا كان عدد الخطوط مساويا لعدد الصفوف أو الأعمدة فالحل أمثل، وإلا وجب الانتقال إلى الخطوة الموالية.
- **الخطوة الرابعة:** يتم طرح أقل عنصر من المصفوفة غير المخطط من كل العناصر المخططة، ثم إضافته لعناصر التقاطع للخطوط، وباقي العناصر المخططة وليست محل تقاطع تبقى دون تغيير، ثم يتم الرجوع الخطوة الثالثة وهكذا حتى الوصول إلى حل امثل للنموذج.

<u>مثال:</u>

توفرت لديك البيانات التالية حول عملية تخصيص لخمسة عمال على خمسة آلات بحيث يكون مجموع ساعات العمل أقل ما يمكن بافتراض أن الأجور متساوية وذلك وفقا للبيانات التالية:

الآلة

		1	2	3	4	5	
	A	15	10	25	25	10	1
	B	1	8	10	20	2	1
عامل	C	8	9	17	20	10	1
	D	14	10	25	27	15	1
	E	10	8	25	27	12	1
		1	1	1	1	1	

<u>المطلوب</u>: تخصيص العمال على الآلات بأقل تكلفة ممكنة؟

<u>الحل</u>:

بطرح أقل قيمة في كل **صف** من كل القيم في هذا الصف نحصل على المصفوفة التالية:

5	0	15	15	0
0	7	9	19	1
0	1	9	12	2
4	0	15	17	5
2	0	17	19	4

بطرح أقل قيمة في كل **عمود** من كل القيم في هذا العمود نحصل على المصفوفة التالية:

5	0	6	3	0
0	7	0	7	1
0	1	0	0	2
4	0	6	5	5
2	0	8	7	4

نلاحظ انه لا يوجد عدد n من الاصفار وغير مشتركة في صف او عمود لذا يجب تغطية كل الاصفار في المصفوفة بأقل عدد من الخطوط الرئيسية والعرضية بحيث يغطي الخط كل العمود او

الصف وبحيث يكون عدد الخطوط أقل من n وان يكون عدد ممكن من الخطوط انظر المصفوفة التالية:

5	0	6	3	**0**
0	7	**0**	7	1
0	1	0	**0**	2
4	**0**	6	5	5
2	**0**	8	7	4

نبحث عن أقل قيمة غي مغطاة وهي (2) اطرحها من القيم الغير مغطاة وأيضا أضف هذا للعدد (2) إلى القيم المغطاة بخطيين متقاطعين (راسي وافقي) فنحصل علي المصفوفة التالية:

5	2	6	3	**0**
0	9	**0**	7	1
0	3	**0**	**0**	2
2	**0**	4	3	3
0	**0**	6	5	2

نلاحظ أن عدد التشطيبات يساوي عدد الأسطر ومنه نتوقف عن الحل، وتقوم بعملية التخصيص، بحيث نختار السطر أو العمود الذي يحتوى على صفر واحد ونخصصه، ثم نواصل العملية:

5	2	6	3	**0**
0	9	**0**	7	1
0	3	0	**0**	2
2	**0**	4	3	3
0	0	6	5	2

إجمالي أقل التكلفة = 10 +10 +20 +10 + 10= **60** ون

الآلة

		1	2	3	4	5	
عامل	A	15	10	25	25	**1** 10	1
	B	1	8	**1** 10	20	2	1
	C	8	9	17	**1** 20	10	1
	D	14	**1** 10	25	27	15	1
	E	**1** 10	8	25	27	12	1
		1	1	1	1	1	

تلخيص الحل:

- يتم تخصيص العامل A علي الآلة 4
- تخصيص العامل B علي الآلة 3
- تخصيص العامل C علي الآلة 5
- تخصيص العامل D علي الآلة 2
- تخصيص العامل A علي الآلة 1

بإجمالي أقل التكلفة = 60 وحدة نقدية.

ثانيا: حالة تعظيم الربح

في حالة ما إذا كان الهدف من التخصيص هو تعظيم العائد من عملية التخصيص كما في حالة الربح أو كفاءة الأداء أو غير ذلك، يتم تحويل الحالة على حالة التدنية السابقة من خلال إيجاد مصفوفة الكلف النسبية وذلك بطرح كل قيم المصفوفة من أكبر قيمة بها، ثم نتابع الحل على أساس أن الغرض منه هو التدنية وبنفس الخطوات.

مثال:

من خلال الجدول التالي أوجد أفضل تخصيص مع مراعاة تعظيم العوائد:

مخازن

المواد الأولية		A	B	C	D	
	1	1	4	2	7	**1**
	2	8	3	5	1	**1**
	3	5	6	3	2	**1**
	4	4	1	4	7	**1**
		1	**1**	**1**	**1**	

في هذه الحالة كما ذكرنا سابقا سنضع مكان كل عنصر نتيجة طرحه من أكبر عنصر في المصفوفة و الذي هو: (8) لنحصل على الجدول التالي:

7	4	6	1
0	5	3	7
3	2	5	6
4	7	4	1

- نتعامل مع المصفوفة السابقة على أساس أنها نموذج للتخصيص و المراد منه هو التدنية وليس التعظيم وفقا للخطوات السالفة:
- بطرح أقل عنصر (تكلفة) من كل صف من باقي أرقام (تكلفة) الصف ينتج:

6	3	5	0
0	5	3	7
1	0	3	4
3	7	3	0

- بطرح أقل رقم في كل عمود ليس فيه صفر فينتج:

6	3	2	0
0	5	0	7
1	0	0	4
3	7	0	0

- ترسم خطوط تغطي الأصفار بحيث يكون كل صفر مغطى بخط واحد فقط فإذا كان عدد الخطوط مساوي لعدد الأعمدة أو عدد الأسطر فيتحدد الحل الأمثل:

6	3	2	**0**
0	5	**0**	7
1	**0**	**0**	4
3	7	**0**	**0**

- عدد الخطوط أربعة وهو مساوي لعدد الأعمدة أو عدد الأسطر فلا داعي للتوجه للخطوة الرابعة.
- نبدأ بالأماكن التي يكون فيها الصفر واحد ثم نتبع الأصفار الأخرى وبذلك يكون التخصيص المطلوب للعمال الأربعة على الآلات كالآتي:

6	3	2	**0**
0	5	0	7
1	**0**	0	4
3	7	**0**	0

مخازن

المواد الأولية	A	B	C	D	
1	1	4	2	**1** 7	1
2	**1** 8	3	5	1	1
3	5	**1** 6	3	2	1
4	4	1	**1** 4	7	1
	1	1	1	1	

أعلى عائد للتخصيص هو: $25=(1\times4)+(1\times6)+(1\times8)+(1\times7)$ ون.

ثالثا: حالات الاختلاف في نموذج التخصيص

يمكن أن تظهر اختلافات في نموذج التخصيص حسب الحالات التالية:

1) عدم تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف: في كثير من الحالات العملية نجد أن عدد الأعمدة لا يساوي عدد الصفوف، (أي أن عدد العمال لا يساوي عدد الوظائف)، في حالة حدوث مثل هذه الحالة فإنه يستلزم **إضافة وظيفة وهمية تمثل الفرق**، حتى نحافظ على فرضية النموذج المتوازن.

أما إذا عدد العمال أقل من عدد الوظائف فإن جدول التخصص لن يتحقق له حل عملي، وبالتالي يجب **إحداث صف وهمي** بتكاليف صفر تمثل الفرق بين العمال والوظائف، الوحدة التي تظهر في الصف الوهمي تمثل وحدة الاحتياج.

2) الطريق غير المرغوب التخصيص عليها: في بعض الحالات لنموذج التخصيص يمكن ملاحظة أنه من غير الممكن إجراء عملية تخصيص من بعض المصادر إلى بعض المراكز نتيجة لظروف معينة، وللتغلب على هذه الظاهرة يتعين إجراء تعديل ما يمنع حدوث ذلك، بمعنى أنه يجب تعديل المصفوفة قبل عملية التطبيق لخطوات الحل بحيث يضمن لنا هذا التعديل عدم التخصيص وفق هذا الطريق الممنوع.

الفصل الثالث: نماذج التحليل الشبكي
Net Work Models

تمهيــد:

تعتبر شبكات الأعمال من بين الطرق المهمة في ادارة المشاريع، حيث تساعد مدير المشروع في تخطيط وجدولة العمليات المختلفة اللازمة لأداء عملية معينة، بحيث يتم تنفيذها بأعلى كفاية ممكنة وهي كثيرة الانتشار خاصة في مجال انجاز المشاريع، اذ تسمح بالتحكم في وقت مختلف أنشطة المشروع، وبالتالي في وقت انجازه كما تسمح بالعمل على تخفيض تكاليفه.

أولا: أساسيات التخطيط الشبكي

ظهرت هذه الطريقة في أواخر الخمسينات عن طريق وزارة الدفاع الأمريكية من أجل تطوير نظام الصواريخ Polaris، ثم تطورت لتصبح طريقة للتنسيق وترتيب مراحل المشروع بحيث يمكن معرفة إمكانية استقلال تنفيذ بعض المراحل عن الأخرى.

ويحقق استخدام تحليل شبكات الأعمال فائدة قصوى للإدارة في المشروعات التي تتصف بالصفات التالية:

- المشروعات المعقدة التركيب، أي عندما يتكون المشروع من عدة أنشطة منفصلة، والتي تعتمد على بعض وبينها علاقات تبادلية والتي ينتهى المشروع عند الانتهاء منها جميعا، مما يؤدي الى صعوبة وتعقيد عمليات التخطيط والجدولة؛

- المشروعات الضخمة، حيث توجد أنواع مختلفة من التسهيلات والاستثمارات الرأسمالية العالية وأعدا كبيرة من الأفراد، وأيضا ضخامة عدد الأجزاء والمكونات في المشروعات الكبيرة؛

- عندما تكون هناك مجموعة من القيود على وقت الانتهاء من المشروع أو تكلفة اتمام المشروع.

1) شروط تطبيق نماذج التحليل الشبكي

يلزم لتطبيق نماذج أساليب التحليل الشبكي توفر مجموعة من الشروط:

- أن يتم تحليل المشروع أو تجزئته الى مهام محددة وواضحة، فيجب أن يتم تحديد وتعريف كل جزئية من المشروع والمهام اللازمة لتنفيذها بدقة ووضوح حتى تتوفر امكانية التمييز بين

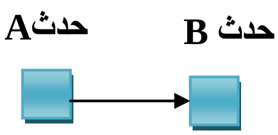
الأنشطة أو المهام المؤدية الى انجاز كل جزئية من الجزئيات والأحداث المترتبة على هذا الانجاز والمرتبة لها؛

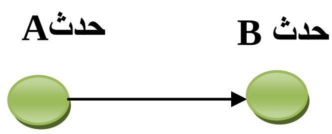
- النشاط أو المهمة هي أداء وظيفي يستنفذ موارد اقتصادية ويتم تعريفه بدلالة الزمن اللازم لإنجازه، وعندما يتحقق انجازه باستنفاذ الزمن المقرر له يتحقق حدث معين، والحدث المعين يكون بالتبعية هو اللحظة الزمنية التي ينتهي فيها النشاط؛
- بعد أن يتم تحليل المشروع الى الأنشطة والمهام اللازمة لتنفيذه وتحديد أحداث البدء والانجاز الخاصة بكل نشاط أو مهمة، يتم وضع نتائج هذا التحليل في جدول، بحيث الأنشطة والمهام هي التي تستغرق وقتا بينما الأحداث لا تستغرق أي وقت، فإن جدول التتابع الفني للعمليات يحدد الأزمنة اللازمة لإنجاز كل نشاط أو مهمة عن طريق علاقات البدء والانتهاء؛
- بعد أن يتم اعداد جدول التتابع الفني للعمليات، يتم اعداد خريطة شبكية توضح هذا التتابع والأنشطة والأحداث المميزة له والأزمنة اللازمة لإنجاز كل نشاط من الأنشطة.

2) تعاريف أساسية

إن طريقة شبكات الاعمال هي أحدث الطرق المستعملة في بحوث العمليات، وهي ترتبط بمجموعة من المصطلحات التي نوردها فيما يلي:

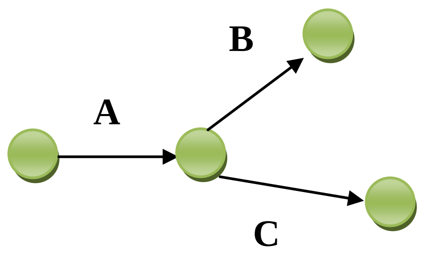
- **الشبكةNetwork:** هي مجموعة من النشاطات والأحداث الوهمية المتتابعة حسب تسلسل منطقي وحسب قواعد التمثيل الشبكي.
- **المشروع Project:** هو مجموعة من الأحداث المرتبة في تسلسل منطقي معين، والتي يتم تمثيلها على شكل شبكة.
- **الحدث Event:** هو انجاز يتم عند نقطة معروفة من الزمن لا يحتاج الى وقت أو مورد ويعبر عن بداية أو نهاية نشاط معين ويرمز له اما بدائرة أو مربع أو مستطيل.





واذا كان الحدث هو نقطة تجمع أكثر من نشاط فنطلق عليه حدث انبثاق.

- **النشاط Activity** : هو جزء محدد من المشروع يلزم لإتمامه كمية محددة من الوقت باستعمال موارد معينة مثل ارساء قواعد أو أساسات المنازل، اختبار المنتوج في السوق ويرمز لنشاط في الشبكة بسهم.
- **النشاط السابق:** يعتبر النشاط سابقا لنشاط اخر اذا انتهى قبل بداية هذا النشاط، فالنشاط Aهو نشاط سابق لنشاطين B و C .



- **النشاط الحرج Critical Activity:** هو النشاط الذي سوف يترتب على تأخيره تأخير في وقت اتمام المشروع بالكامل وغالبا ما يوجد أكثر من نشاط حرج واحد على الشبكة.
- **النشاط الوهمي Dummy Activity:** هو نشاط الذي لا يستهلك زمن أو موارد، أي ليس له زمن أو موارد يستعمل للمساعدة في تمثيل النشاطات مع الأحداث التي لها نفس حدث البداية ونفس حدث النهاية.

Dummy - - - - - - - -

- **المسار:** هو عبارة عن سلسلة من الأنشطة المتتابعة التي تربط بين نقطة البدء للمشروع ونفطه اتمامه وعلى دلك فان المشروع قد يكون له أكثر من مسار.
- **المسار الحرج Critical Path:** مجموعة الأنشطة الحرجة التي تمتد من بداية المشروع حتى نهايته ، حيث أن التأخير في أي واحدة منها يؤدي إلى التأخير في زمن المشروع ككل.
- **الأزمنة:** في هذا الصدد نجد الأزمنة التالية:

- **زمن البداية المبكر للنشاط Earliest Start:** هو الزمن الذي ينطلق فيه النشاط إذا أنجزت جميع الأنشطة(السابقة له) في وقتها.
- **زمن النهاية المبكر Earliest Finish:** هو الزمن الذي يمكن أن ينجز فيه النشاط في حالة ما إذا انطلق في والوقت المبكر له.

زمن النهاية المبكر EF = زمن البداية المبكرة+ زمن النشاط.

- **زمن بداية متأخر Latest Start:** هو آخر وقت يمكن أن ينطلق فيه النشاط شريطة أن لا يتسبب في تأخير الأنشطة التابعة له.

زمن بداية متأخرة LS = زمن النهاية المتأخرة– زمن النشاط.

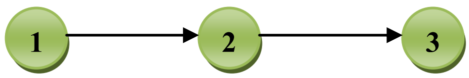
- **زمن نهاية متأخر Latest Finish:** هو آخر زمن يمكن أن ينجز فيه النشاط شريطة أن لا يتسبب في تأخير الأنشطة اللاحقة له.
- **الوقت الفائض Slack Time:** نرمز لها بالرمز F وهو عبارة عن الفارق بيم زمن البداية المتأخر وزمن البداية المبكر للنشاط.

الوقت الفائض= زمن البداية المتأخر – زمن البداية المبكر.

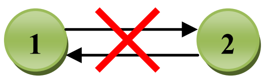
3) قواعد تصميم الشبكة

لرسم شبكة الأعمال يجب معرفة ان:

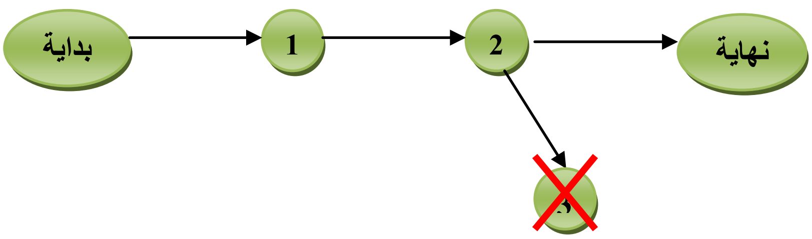
- ❖ المشروع يبدأ عند نقطة بداية وينتهي عند نقطة نهاية، تسمى النقطة الوهمية.(Milestone) والترقيم يبدأ من بداية الشبكة إلى النهاية:



- ❖ لا يمكن العودة إلى نفس النشاط تجنبا للوقوع في حلقة مفرغة:



- ❖ لا بد من أن تكون هناك نقطة نهاية للمشروع تنهي إليها العملية ذات الترتيب الأخير، تسمى هذه النقطة بالنقطة الوهمية Milestone.



4) مراحل رسم شبكة الأعمال

لإنشاء شبكة الاعمال يجب اتباع تسلسل المراحل التالية:

1. **تحليل المشروع الى الأنشطة والأحداث المكونة له:** يتم في هذه المرحلة القيام بجرد دقيق ومفصل لكل الأنشطة اللازمة لإنشاء المشروع وهذا الجرد يمكن أن يتم بعدة طرق:

- من بداية المشروع أي من اول نشاط ومتابعة التسلسل الزمني للأنشطة.
- من نهاية المشروع والرجوع في الزمن الى أول مرحلة.
- أخذ مرحلة بصورة عشوائية من المشروع والطلب من الشخص المنفذ لهذه المرحلة توضيح الأنشطة السابقة واللاحقة لنشاطه.

2. **تحديد تتابع الأنشطة والأحداث:** يتم تحديد التسلسل والتتابع لإنجاز كل الأنشطة التي يتكون منها المشروع بمعنى أنه يجب تحديد الأنشطة التي يجب أن يتم قبل البدء في نشاط أو أنشطة أخرى والأنشطة التي يمكن أن يبدأ العمل فيها وبعبارة أخرى يجب تحديد العلاقات بين الأنشطة المختلفة التي يتكون منها المشروع حيث لا يبدء في الأنشطة اللاحقة إلا بعد أن يتم الانتهاء من الأنشطة السابقة التي تعتمد عليها.

ثانيا: أساليب تخطيط وجدولة المشاريع

تم تطوير مجموعة من الوسائل أو الأساليب التي يمكن استخدامها في تخطيط وجدولة المشاريع منذ بداية الحرب العالمية الثانية، ومن أهمها:

1) طريقة المسار الحرج The Critical Path Method

ويرمز لها اختصارا بـــ: **CPM** تعتمد طريقة المسار الحرج على تحديد مجموعة الأنشطة التي يجب أن تعطى اهتماما خاصا في التخطيط والتنفيذ، وذلك لأن اكمال المشروع في وقت محدد وبتكاليف مناسبة يعتمد الى درجة كبيرة على الأنشطة الموجودة بالمسار الحرج.

يعرف المسار الحرج بكل النشاطات الحرجة للمشروع، كما أن المسار الحرج يمثل أقصر زمن لإنجازه ككل، ويعتبر المسار حرجا لأنه:

أ. لا يمكن تخفيض زمن انجاز المشروع، الا اذا تمكننا من تخفيض زمن انجاز نشاط أو أكثر على المسار الحرج عن الزمن العادي أو الزمن المعياري؛

ب. اذا حدث أي تأخر في أي من الأنشطة الحرجة، الموجودة على المسار الحرج، فإنه يحدث تأخر انجاز المشروع بالضرورة.

تقوم الجدولة باستخدام أسلوب المسار الحرج على الخطوات التالية:

1) يتم تحديد كافة الأنشطة التي سوف تنجز في المشروع، من خلال تحليل الأنشطة مع ترقيم وترميز الأنشطة؛

2) يحدد التتابع الفني اللازم والذي يحكم العلاقة بين الأنشطة من خلال تحديد النشاط أو الأنشطة السابقة مباشرة، والأنشطة التي ليس لها أي نشاط يسبقها على أنها قبلها مباشرة بدء المشروع؛

3) رسم الشبكة (المخطط) لتوضيح العلاقات بين الأنشطة؛

4) تحديد مقدار الوقت اللازم لكل نشاط وهو أفضل وقت؛

5) تحديد المسار الحرج.

يتم تحديد المسار الحرج بخطوتين أساسيتين:

- **الخطوة الأولى:** تعرف بخطوة التوجه الأمام Forword pass وهذا انطلاقا من عقد البداية الى عقد النهاية وتعرف كذلك بقاعدة زمن البداية المبكر ESTi لكل النشاطات من الحدث i حيث:

زمن البداية المبكر لنشاط حدث البداية: هو أكبر أزمنة بداية النهاية لكل النشاطات الداخلة للحدث، أي هو الزمن المبكر للنشاط اللاحق للانطلاق.

ويرمز لها على الشبكة بالرمز $\square$ حيث:

$$\mathbf{EST_j=MAX_j\ (EST_i+t_{ij})}$$

$$J=(1.2.3\ldots\ldots n)\ \ldots.\ j\#n$$

$\mathbf{t_{ij}}$**:** وقت أو زمن انجاز المشروع.

$\mathbf{EST_0}$**:** صفر (زمن البداية للمشروع).

$\mathbf{EST_n}$**:** الوقت المبكر لإنجاز المشروع في الوقت العادي.

- **الخطوة الثانية:** وتعرف بخطوة التوجه الى الوراء Backword pass وهذا انطلاقا من عقدة النهاية الى عقدة البداية وتعرف كذلك بقاعدة زمن النهاية المتأخر **LSTi** لكل النشاطات.

زمن النهاية المتأخر لنشاط حدث النهاية: هو أقل أزمنة نهاية البداية لكل النشاطات الخارجة للحدث، أي هو الزمن الممكن لنهاية النشاط اللاحق دون أي تأخر في زمن انجاز المشروع.

ويرمز له بالرمز △ على الشبكة، حيث الرقم الأول يمثل EST والرقم الثاني يمثل LST كما هو موضح في المستطيل

$$LST_i = MIN_j\,(LST_j - t_{ij})$$

$$i=(n-1\ .n-2\ .\ \ldots\ldots 1)\quad i=j$$

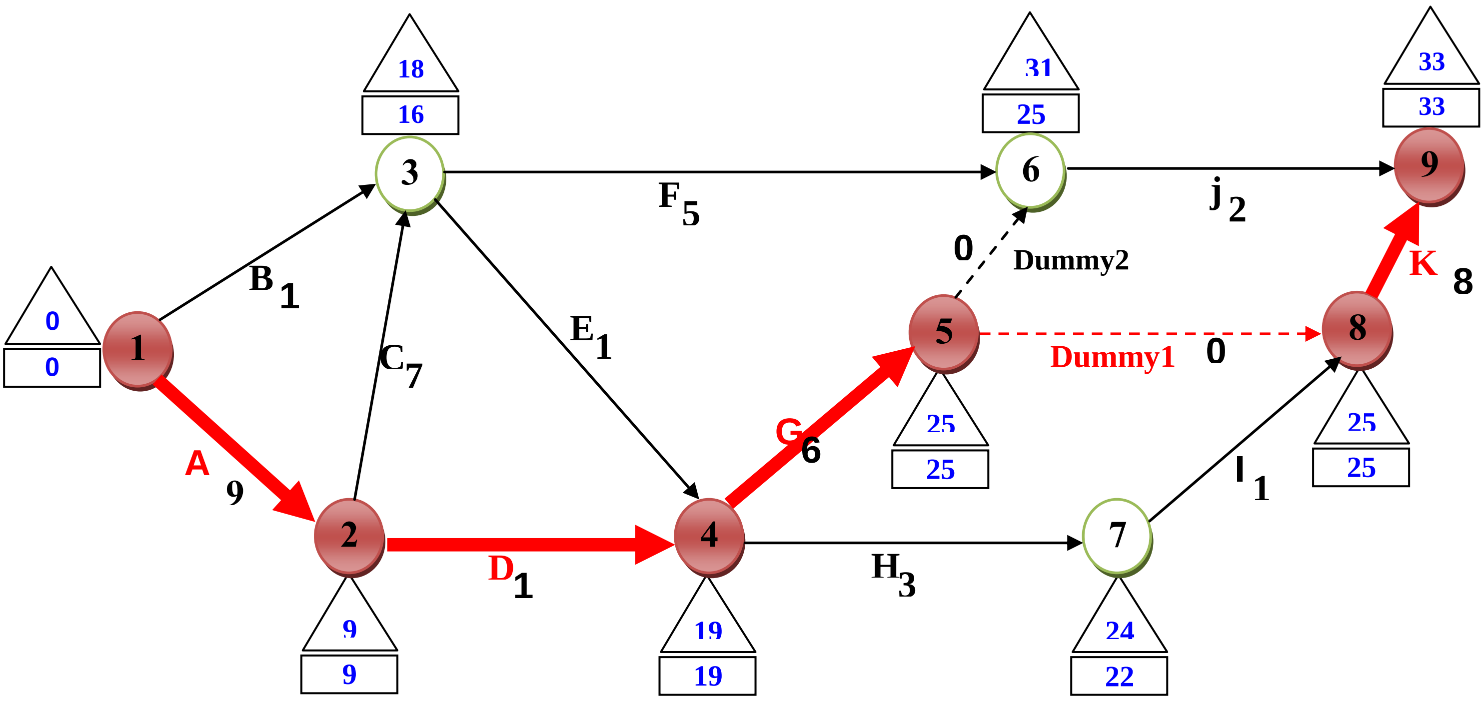
$$LST_n=EST_n$$
$$LST_0=0\ .$$

مثال: اليك المشروع التالي:

النشاط	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
الزمن/ الأسبوع	9	11	7	10	1	5	6	3	1	2	8
النشاط التابع	C.D	E.F	E.F	G.H	G.H	J	J.K	I	K	/	/

☜ **المطلوب:** مثل المشروع شبكيا؟ حدد المسار الحرج؟

الحل:



1- يمكن تحديد الأنشطة الحرجة وهى الأنشطة التي يتساوى فيها زمن البداية المبكرة مع زمن البداية المتأخرة وهى الأنشطة **A ; D ; G ; Dummy$_1$; K**

2- يمكن حساب المسار الحرج وهى نقاط الأنشطة الحرجة **1 – 2 – 4 – 5 – 8 – 9**

3- يمكن حساب الوقت الإجمالي المسموح بالتأخير عنه للنشاط وذلك حسب القانون:

$$TS_{ij} = LT_j - ET_i - t_{ij}$$

TS$_{ij}$ = latest time at j – earliest at i – activity (i ; j) duration

4- يمكن حساب الفائض من زمن النشاط وهو الوقت الذى يمكن فيه اداء النشاط بدون تأخير وذلك حسب القانون:

$$FS_{ij} = ET_j - ET_i - t_{ij}$$

FS$_{ij}$ = Earliest Time at j – Earliest at i – Activity (i ; j) Duration

ويمكن وضع هذه الأزمنة على الشبكة لينتج الجدول التالي:

Activity	Activity nodes (i ; j)	Activity duration	Earliest time at node i	Latest time at node j	TS	FS	C. path TS=FS=0
A	1;2	9	0	9	**0**	**0**	✓
B	1;3	11	0	18	7	5	
C	2;3	7	9	18	2	0	
D	2;4	10	9	19	**0**	**0**	✓
E	3;4	1	16	19	2	2	
F	3;6	5	16	31	10	4	
G	4;5	6	19	25	**0**	**0**	✓
H	4;7	3	19	24	2	0	
I	7;8	1	22	25	2	2	
Dummy$_1$	5;8	0	25	25	**0**	**0**	✓
Dummy$_2$	5;6	0	25	31	6	0	
J	6;9	2	25	33	6	6	
K	8;9	8	25	33	**0**	**0**	✓

مثال رقم (2):

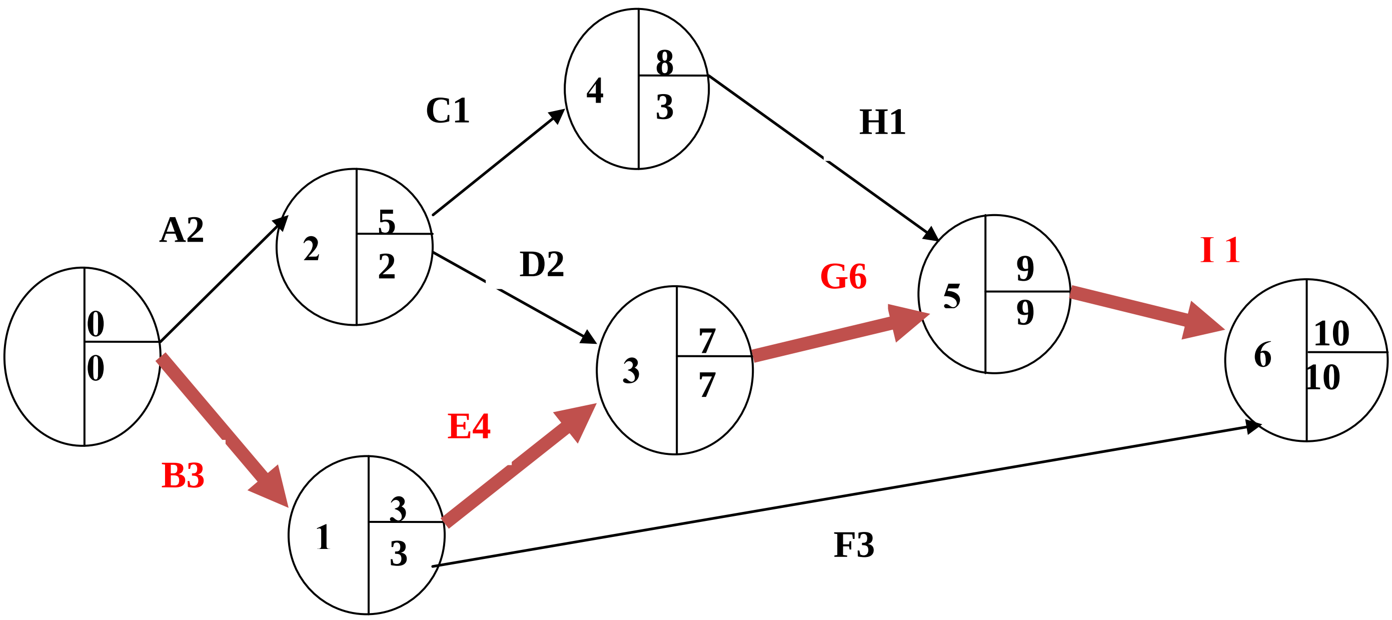
يتكون مشروع إنجاز مركب صحي بأحد الولايات من عدة أنشطة مختلفة، موزعة كما يلي:

النشاط	A	B	C	D	E	F	G	H	I
النشاط التابع	C,D	E,F	H	G	G	/	I	I	/
الزمن (أسبوع)	2	3	1	2	4	3	2	1	1

1. أوجد التمثيل الشبكي لهذا المشروع ؟
2. حدد زمن انجازه؟
3. حدد المسار الحرج ؟
4. مثل الشبكة بيانيا؟
5. أوجد الزمن الاحتياطي الكلي **TF** و الحر **FF**؟

الحل:

رسم الشبكة

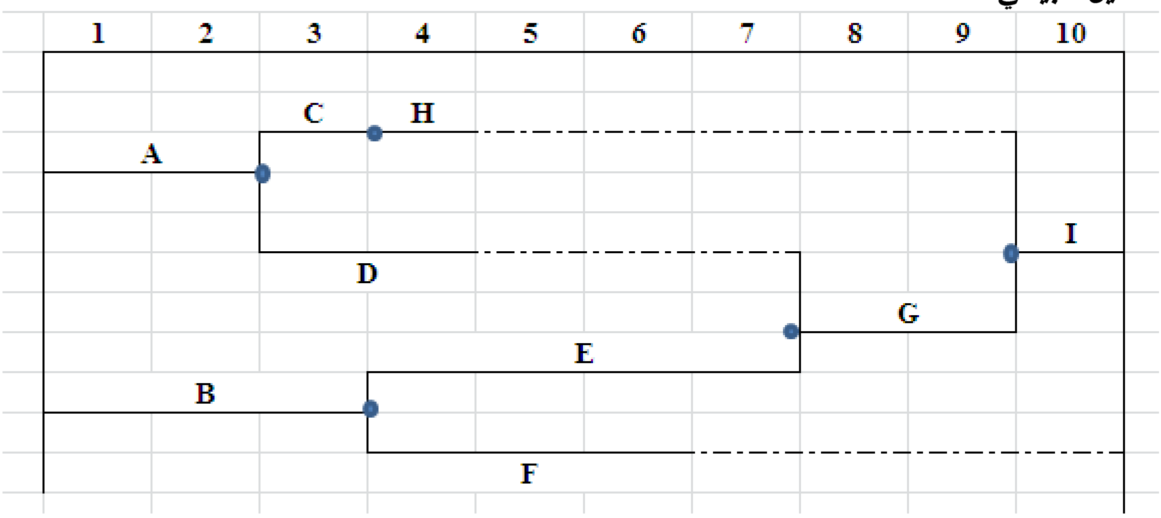


- الوقت اللازم لإنجاز المشروع هو: **10 أسابيع**

3- تحديد المسار الحرج عن طريق TF, FF:

النشاط	TF الزمن الاحتياطي الكلي	FF الزمن الاحتياطي الحر	
A	5-2-0=3	2-2-0=0	المسار الحرج B, E, G, I.
B	3-3-0=0	3-3-0=0	
C	8-1-2=5	3-1-2=0	
D	7-2-2=3	7-2-2=3	
E	7-4-3=0	7-4-3=0	
F	10-3-3 = 4	10-3-3=4	
G	9-2-7=0	9-2-7=0	
H	9-1-3=5	9-1-3=5	
I	10-1-9=0	10-1-9=0	

التمثيل البياني:



2) طريقة تقييم ومراجعة البرامج
Program Evaluation and Review

يرمز لها اختصارا بـــــ: **PERT**: تعتمد هذه الطريقة في أساسها على طريقة المسار الحرج، الى أن الاختلاف الرئيسي فيما بينهما يكمن في طبيعة أوقات الأنشطة المختلفة، ففي حالة المسار الحرج يوجد وقت واحد لكل نشاط من الأنشطة وأن هذا الوقت أكيد وثابت Deterministic، أما في حالة تقويم ومراجعة البرامج فإن أوقات الأنشطة هي احتمالية Probabilling وليست ثابتة، لذلك فإننا نحتاج الى أكثر من وقت واحد لكل نشاط، ومن ثم نقوم بإيجاد متوسط هذه الأوقات ليمثل معدل الوقت لكل نشاط.

يقوم أسلوب **PERT** على مجموعة من القواعد والأسس والمتمثلة في:

أ. في حالة وجود عدة مسارات متساوية بالوقت المتوقع، فإن المسار الحرج هو المسار الذي له أكبر انحراف معياري، بغض النظر عن الوقت المطلوب انهاء المشروع ضمنه؛

ب. يمكن أن تتغير المسارات الحرجة أثناء تنفيذ المشروع، لأن جميع الأوقات المؤثرة في حسابات الجدولة هي أوقات احتمالية، يمكن أن تستغرق بعض النشاطات أكثر من الوقت المتوقع لإنهائها، وهذا أمر طبيعي جدا؛

ج. يمكن أن يتغير المسار الحرج أكثر من مرة أثناء تنفيذ المشروع؛

د. في حالة وجود عدة مسارات في المشروع تستغرق أوقات متقاربة ولها انحرافات معيارية متفاوتة، قد نجد المسار الأقصر ذا الانحراف الأعلى هو المسار الأكثر تأثيرا في احتمالية انهاء المشروع في وقت محدد.

تتطلب المشاكل التي تحل بأسلوب بيرت الشروط التالية:

1) أن يتكون المشروع من مجموعة من الوظائف أو الأنشطة المختلفة والمستقلة معرفة تعريفا كاملا، محدد زمن بدايتها وزمن نهايتها، لها علاقة مع بعضها البعض من حيث البداية والنهاية، ومن حيث بداية المشروع ونهايته.

2) الانطلاق في تنفيذ بعض الوظائف أو النشاطات يمكن أن يتم دون النظر إلى البعض الآخر، ولكن وفق ترتيب معين.

3) أن يكون هناك ترتيب تنازلي وفني معين للنشاطات بحيث يمكن معرفة النشاطات المبتدئ بها المشروع والنشاطات المنتهي بها المشروع، وهذا يشير إلى عدم إمكان تنفيذ جميع النشاطات في الوقت نفسه، بحيث يمكن أن يكون لكل نشاط مجموعة من النشاطات السابقة ومجموعة من النشاطات اللاحقة.

أسلوب بيرت يساعد متخذ القرار في تحديد مدة الإنجاز أي الأزمنة المختلفة والزمن المتوقع وفق ثلاث تقديرات كما يلي:

أ. **الزمن التفاؤلي Optimistic:** وهو الزمن الذي يتوقع فيه إتمام المشروع لو مرت كل الأمور عادية، بنفس الإمكانيات المتاحة. وما دام تقدير تفاؤلي فقد خصص له وزن واحد.

ب. **الزمن الأكثر احتمالا Most Likely:** حيث يتوقع أن يتم فيه النشاط في ظروف تحت درجة احتمال عالية جدا. وبهذا خصص له وزن احتمالي بـــ 4 أوزان.

ج. الزمن التشاؤمي Pessimistic: وهو الزمن الأكثر تحفظا خوفا من حدوث ظروف سيئة، بهذا تم إعطاؤه وزن واحد.

وبهذه الأزمنة فإن الزمن المتوقع يمكن حسابه وفق العلاقة الإحصائية التالية:

الزمن المتوقع = (الزمن التفاؤلي + 4 الزمن الأكثر احتمالا + الزمن التشاؤمي) / 6

$$\textbf{Mean} = (a_{ij}+4m_{ij}+b_{ij})/6$$

وهذه المعادلة الأخيرة تعبر عن المتوسط.

ولحساب نسبة الإنجاز للمشروع فإنه يتم حساب التباين للنشاطات الحرجة (النشاطات المكونة للمسار الحرج) وفق العلاقة الإحصائية التالية:

التباين = (الزمن التشاؤمي – الزمن التفاؤلي) / 6

$$\textbf{Var.}=(b_{ij}-a_{ij})/6)^2$$

والخطوة اللاحقة هي حساب الانحراف المعياري، لاختيار درجة التغير في تقدير الزمن المتفائل والزمن المتشائم ومدى بعده أو قربه عن الزمن الأكثر احتمالا، والفرق بين الزمن المتفائل والزمن المتشائم يمثل المسافة بين أقصى اليسار وأقصى اليمين في توزيع الأزمنة المقدرة للنشاط ويحدد الانحراف المعياري وفق المعادلة التالية:

الانحراف المعياري = الجذر التربيعي لمجموع مربعات تباينات الأنشطة الحرجة

وبهذا تبرز أهمية أسلوب بيرت في إيجاد الاحتمالات المختلفة المتصلة غير المتقطعة لإكمال المشروع وفق زمن معين، وهذا بحساب المساحة المحصورة تحت المنحنى الطبيعي، لأن هذا التوزيع يتمتع بإمكان استخدامه في حساب هذا التقدير، لزمن المسار الحرج كما مبينة في الشكل أدناه، حسب قيمة **(Z - value)**، حيث:

Z - value = (الوقت المستهدف – وقت المسار الحرج) / الانحراف المعياري للمشروع

مثال:

الجدول التالي يمثل ترتيب عمليات أحد المشاريع الجديدة، إضافة إلى الأزمنة الثلاثة (الوحدة الزمنية هي أسبوع) المساعدة على حساب الزمن المتوقع لعمليات المشروع الجديد:

تشاؤمي Tp Pessimistic	أكثر احتمالا Tm Most Likely	تفاؤلي To Optimistic	السابقة لها مباشرة	العملية
8	5	2	-	**A**
2	2	2	-	**B**
3	2	1	A	**C**
4	3	2	B	**D**
1	1	1	C-D	**E**
3	2	1	C-D	**F**
5	4	3	E	**G**
6	4	2	F-G	**H**
3	2	1	E-G	**I**
1	1	1	H	**J**

المطلوب: تحديد أهم العمليات في المشروع وأقصى مدة لإنجازه ؟ .

الحل:

1- قبل التمثيل الشبكي للمشروع نقوم بحساب المدة المتوقعة لكل عملية المساوية إلى:

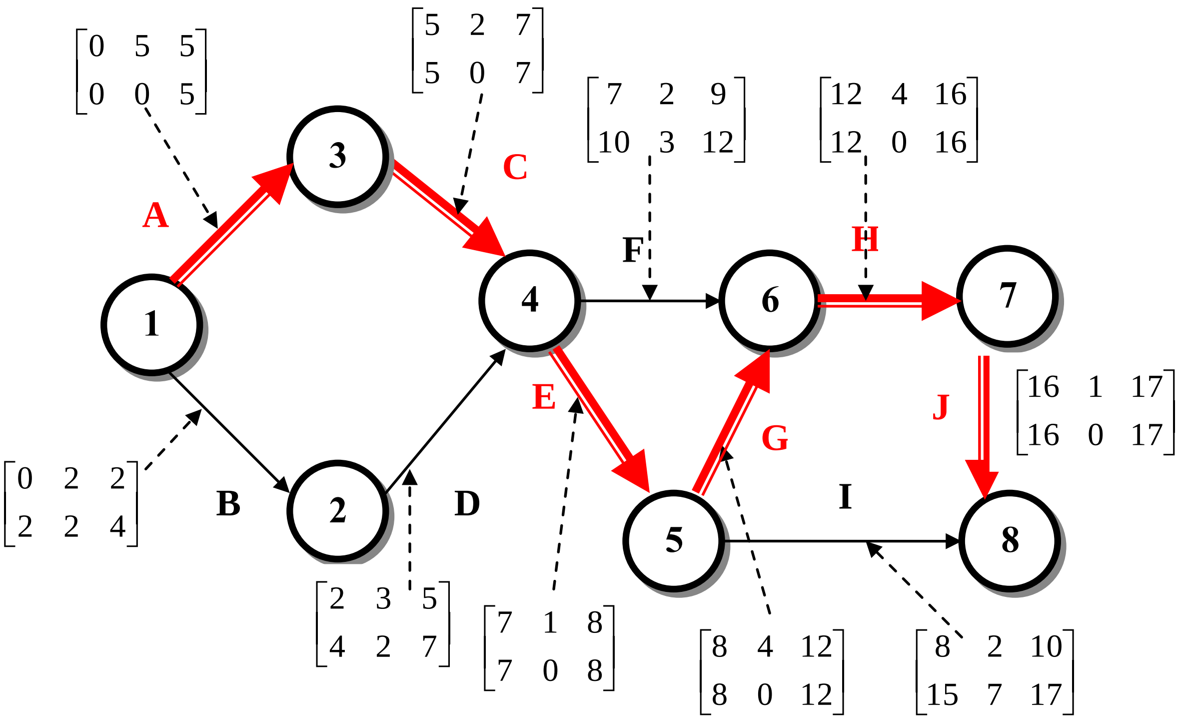
$$Te = \frac{To + 4Tm + Tp}{6}$$

من خلال الجدول التالي:

المدة المتوقعة Te	تشاؤمي Tp Pessimistic	أكثر احتمالا Tm Most Likely	تفاؤلي To Optimistic	العملية
5	8	5	2	**A**
2	2	2	2	**B**
2	3	2	1	**C**
3	4	3	2	**D**
1	1	1	1	**E**
2	3	2	1	**F**
4	5	4	3	**G**
4	6	4	2	**H**
2	3	2	1	**I**
1	1	1	1	**J**

المدة المتوقعة للعملية **A** هي: $Te = \frac{To + 4Tm + Tp}{6} = \frac{2 + (4 \times 5) + 8}{6} = 5$

بعد استخراج المدة المتوقعة لكل عملية نستطيع أن نمثل المشروع شبكيا كما يلي:



من خلال تحليل الشبكة أعلاه نجد:

- ليكون بذلك المسار الحرج هو: **A-C-E-G-H-J**
- المدة النهائية الممكنة لإنجاز المشروع هي: **17** أسبوعا، والمتمثلة في آخر **LF** زمن النهاية المتأخر.

ثالثا: تحليل التكلفة في شبكة المشروعات

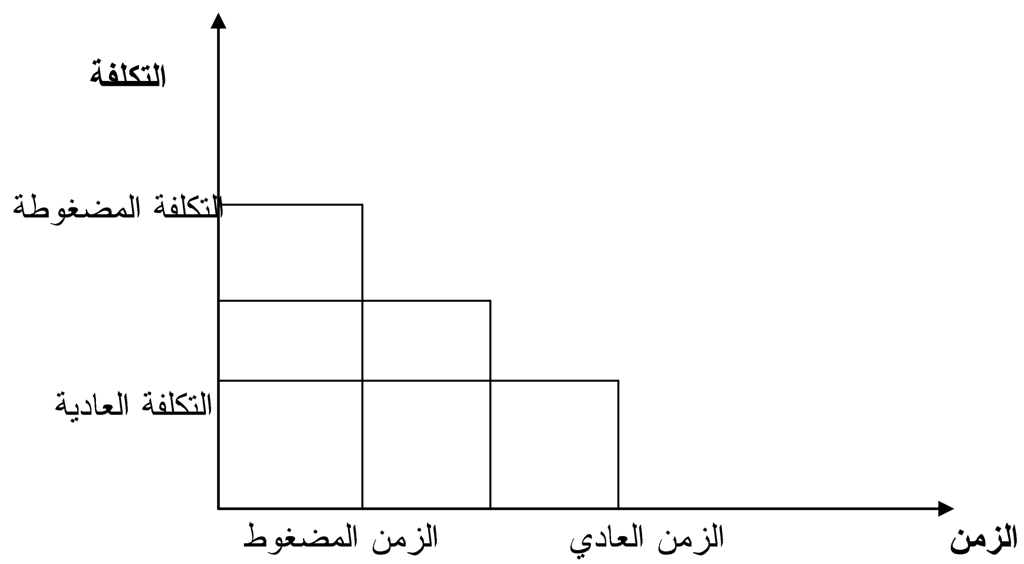
تحديد تكلفة الأنشطة واختصار وقت المشروع، ويتم ذلك لتلبية رغبات العميل في اختصار زمن المشروع وفي هذه الحالة سيكون من ضمن المعطيات الزمن المطلوب لأداء الأنشطة والزمن المرغوب فيه وكذلك تكلفة كل نشاط وتكلفة النشاط في حالة اختصار وقت المشروع وتكون التكلفة الكلية للمشروع عبارة عن تكاليف أداء الأنشطة مضافا إليها التكاليف المستخدمة لاختصار وقت المشروع (عمل اضافي، معدات اضافية، غير ذلك) ويتم ذلك على عدة خطوات:

1. ترسم الشبكة عاديا، يحدد المسار الحرج والتكلفة لكل نشاط، حيث أن فترة المسار الحرج هي الفترة الأطول لإنجاز المشروع، يطلق على التكلفة في هذه المرحلة بالتكلفة العادية وعلى الزمن بالزمن العادي.
2. يتم البحث عن بدائل معينة لتنفيذ الأنشطة المختلفة على أن يتم تحديد زمن النشاط وتكلفته وفقا لكل بديل ووفقا لكل معدل تكلفة، ومعدل التكلفة في هذه الحالة يكون:

معدل التكلفة = (التكلفة المضغوطة – التكلفة العادية) / (الزمن العادي – الزمن المضغوط)

3. تبدأ عملية تخفيض للزمن القائمة على فرضية وجود علاقة خطية بين الزمن المطلوب والتكاليف، بمعنى أن تخفيض الزمن اللازم لإتمام المشروع يؤدي إلى ارتفاع التكاليف، عملية التخفيض تبدأ بوحدة واحدة، وفق مبدأ أقل معدل تكلفة للنشاطات الممثلة للمسار أو المسارات الحرجة انطلاقا من الوراء رجوعا إلى الأمام، وتسمى هذه العملية بعملية التبادل بين الزمن والتكلفة لنشاط ما، ويمكن تمثيلها كالتالي:

الشكل رقم (3): التبادل بين التكلفة والزمن لنشاط ما



نلاحظ أنه كلما تم تخفيض الزمن (الانتقال من الزمن العادي إلى الزمن المضغوط) كلما ارتفعت التكلفة (الانتقال من التكلفة العادية إلى التكلفة المضغوطة).

رابعا: تحليل ندرة الموارد

إن استعمال شبكات الأعمال لا تتوقف على تحديد الزمن فقط، بل تسمح بتسيير الموارد المتاحة لتنفيذ المشروع وهذه النقطة مهمة لأنه يمكن أن لا يكون هناك أية علاقة بين زمن إنجاز الأنشطة وزمن اليد العاملة الذي تتطلبه هذه الأنشطة.

وتخصيص الموارد البشرية لنشاطات محددة يعتبر مهما لعدة أسباب:

- يسمح لنا بالتخفيض من البرنامج: ففي بعض الحالات تظهر الحاجة للإسراع بها عن طريق تخصيص موارد بشرية اضافية لإنجازها؛

- يعتبر مهما أن تعلم التنظيمات المشاركة وبدقة من الذي يكون مكلفا بهذا النشاط او ذاك ومتى والتأكد من أن تكون اليد العاملة المخصصة لكل نشاط متوفرة في الوقت المحدد؛
- هذه المعلومات تكون جد هامة عندما يتعلق الامر بوضع ميزانية مفصلة للمشروع وتتمثل الموارد في اليد العاملة، آلات، المواد الأولية المستعملة، والموارد المالية لدى المشروع
- في حالة ما الهيئة المسيرة تظهر لها صعوبات حول استعمال الموارد فانه يجب معرفة النشاطات الحرجة للمشروع، الموارد الممكنة الاستعمال حتى تتمكن من تخطيطها تخطيطا سليما يتماشى مع زمن الانجاز.

من أجل تخطيط متطلبات الموارد للمشروع يجب مراعاة التالي:

- معرفة تامة لكل النشاطات من موارد مستعملة وزمن انجاز وغيره.
- معرفة الندرة الموجودة أي التقيد الممكن على النشاط.

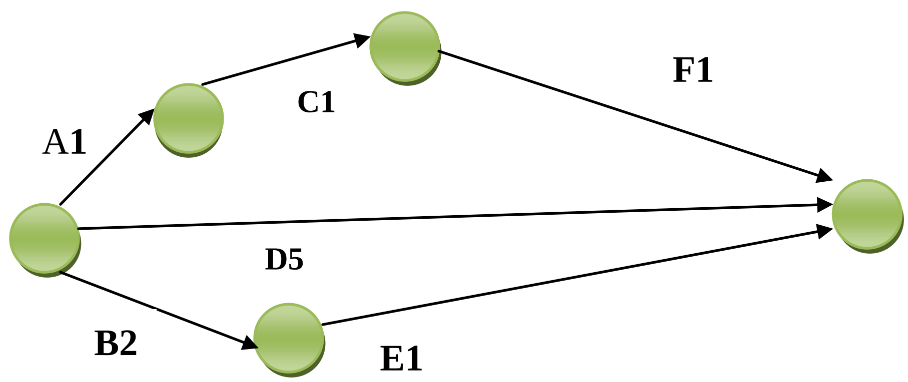
__مثال:__ المشروع التالي حسب المعطيات التالية:

النشاط	A	B	C	D	E	F
النشاط السابق	/	/	A	/	B	C
الزمن العادي/الأيام	1	2	1	5	1	1
اليد العاملة المتاحة	2	1	1	1	1	1

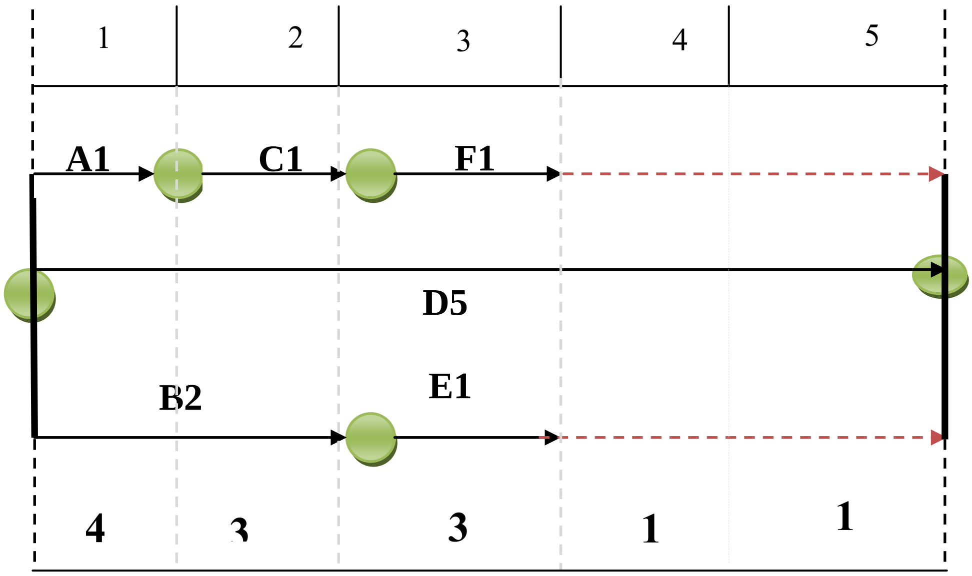
المشروع متاح له عاملين فقط

☜ **المطلوب:** تمثيل المشروع شبكيا وبيانيا مراعيا في ذلك ندرة اليد العاملة

__الحل:__

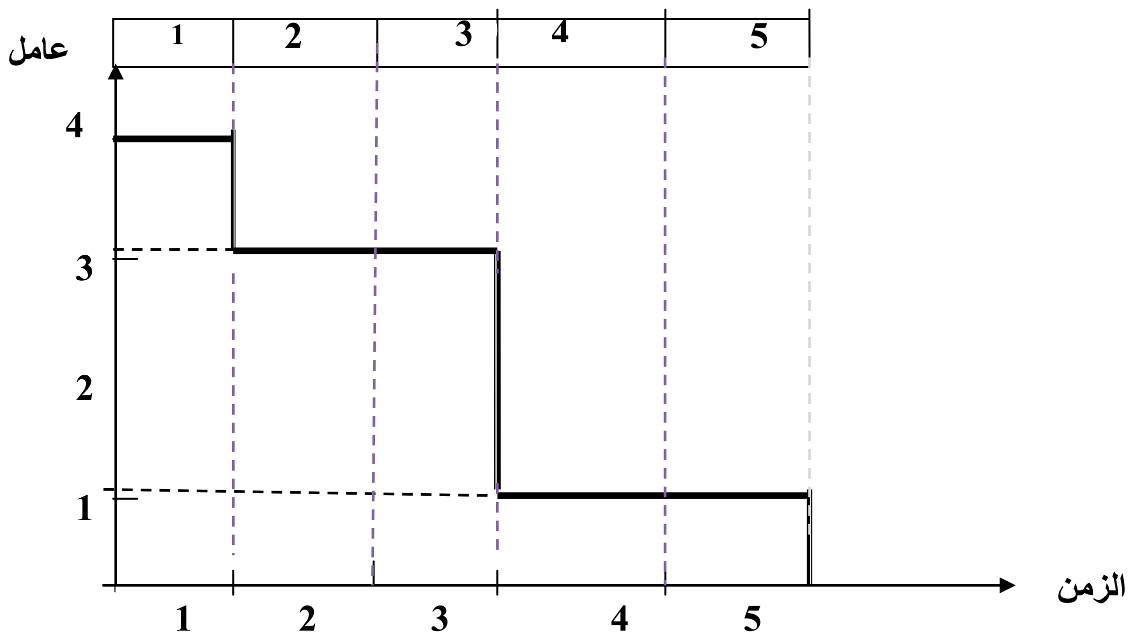


من خلال التمثيل البياني التدريجي للزمن نجد أن المسار الحرج هو النشاط D بزمن انجاز 5 أيام دون الأخذ بعين الاعتبار ندرة اليد العاملة.

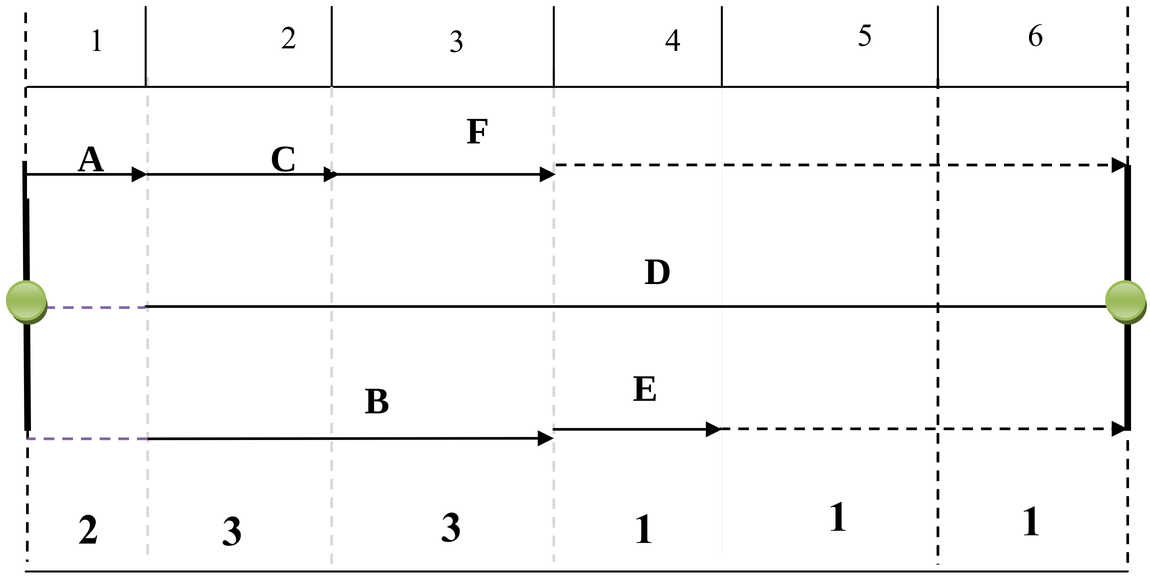


عندما نأخذ اليد العاملة الممثلة بالأرقام مع الأحرف الأبجدية بالرسم كقيد من التقييدات المفروضة على تأخير زمن الانجاز يمكن الاستعانة بالتمثيل البياني لمعرفة الفترات الممكنة التي يستعمل فيها أكبر عدد من اليد العاملة.

فترات اليد العاملة: نجد في الفترة من الزمن صفر الى الزمن واحد يحتاج المشروع 4 عمال، في الفترة من الزمن 1 الى الزمن 3 يحتاج المشروع 3 عمال بينما من الزمن 3 الى الزمن 5 يحتاج المشروع الى عامل واحد، هذه الفترات يمكن تمثيلها بيانيا كالتالي:



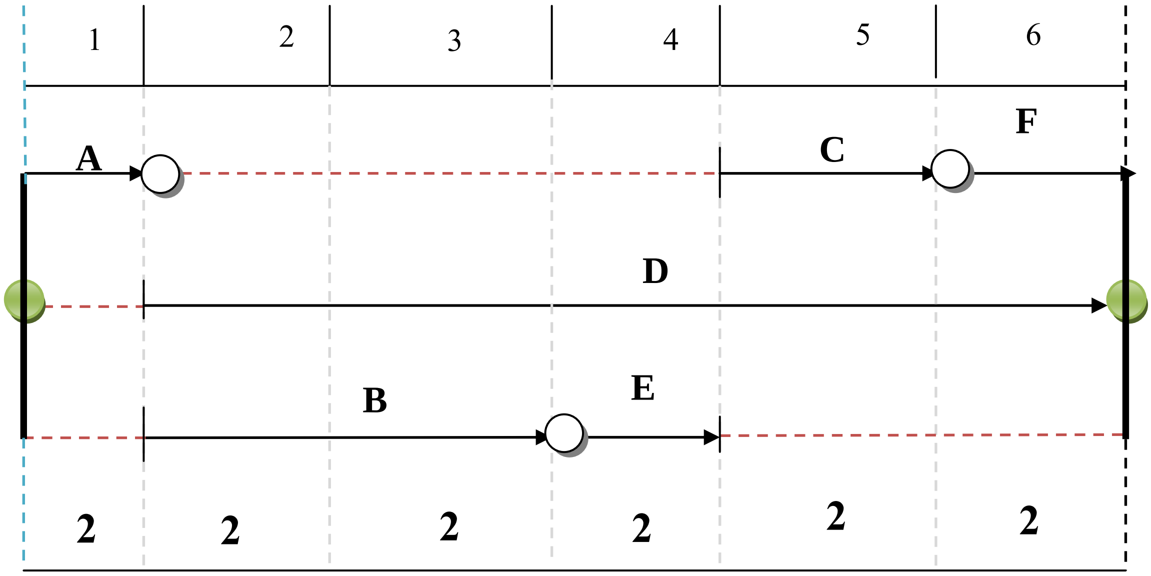
المشروع متاح لديه عاملين فقط فهذا يعني اعادة تخطيط المشروع وفقا لندرة اليد العاملة كالتالي: نبدأ بإنجاز النشاط A لأنه يتطلب يد عاملة كبيرة وتأخير النشاطينD,B بوحدة زمن واحدة ثم بعد الانتهاء من النشاط A ينطلق النشاطينD,B.



بهذا الوضع مجموع اليد العاملة للنشاطات C,D,B تساوي 3 وكذلك F,D,B وبالتالي غير ممكن أن تنطلق هذه النشاطات في نفس الوقت.

في التمثيل البياني يمكن ملاحظة أن هناك وقت احتياطي حر للنشاط F يتمثل في 3 وحدات زمنية هذا يعني يمكن تأجيل النشاطين F,C ويكون انطلاقهما من بداية الزمن الخامس دون زيادة اخرى في زمن انجاز المشروع، كذلك يمكن تأخير النشاطين E,B ويمكن انطلاقهما من الزمن الرابع دون التأثير على زمن انجاز المشروع.

زمن انجاز المشروع في هذه الحالة يساوي الى 6 أيام، التغيير الجديد للتمثيل البياني يصبح كالتالي:



في هذه الحالة يلاحظ أن زمن الإنجاز لا يتغير كما أن اليد العاملة يمكنها العمل من أجل إنجاز المشروع في 6 أيام.

الفصل الرابع: نظرية الألعاب
Game Theory

يعتبر العالم الفرنسي **إميل بوريل Emile Borel** أول من طرح فكرة النظرية سنة **1921** إلا أن الفضل الأكبر في إرساء أركان هذه النظرية وبرهنة نتائجها الأساسية وإظهار الإمكانيات الهائلة لها في التطبيق في المجالات الاقتصادية والعسكرية والإدارية يرجع إلى العالمين **جون فون نيومان** و **اسكار مورجانستون** فبعد أن أثبت **فون نيومان** القانون الأساسي للنظرية **(**قانون الأدنى الأعظمي**)** عام **1928**، تعاون مع **مورجاستون** في تقديم النظرية كأداة لتحليل المواقف التنافسية المتعارضة في المجالات الاقتصادية والحربية عام **1944** ومنذ ذلك الحين وحتى وقتنا هذا لم يتوقف سيل الإضافات والتطوير ومحاولات التغلب على مشاكل التطبيق ومن أهم الإضافات هي نتائج دراسات **شابلي** حيث قدم الدالة المعروفة بدالة قيم شابلي والتي على أساسها تتحدد قيمة عائد المباراة متعددة الأطراف.

تطورت نظرية الألعاب في **1950** من خلال أعمال **جون ناش** الذي ركز اهتمامه على إيجاد الحل الأمثل، على هذا الأساس فإن نظرية الألعاب تعبر عن مجمل الطرق الرياضية التي تناقش وتحلل الأوضاع.

أولا: تعاريف ومفاهيم أساسية

يتلخص مفهوم نظرية الألعاب بوجود لعبة محددة أو مباراة لها هدف نهائي يسعى من أجله كل لاعب ومن خلال مراحل خاصة يتم اختيارها حسب قوانين اللعب وأسلوب اللعبة.

المباراة	مسابقة بين طرفين أو أكثر كل منهما يرغب في الفوز، وتهدف نظرية المباريات إلى إيجاد الاستراتيجيات المثالية في ظل مواقف النزاع أو الصراع، ويكون لدى كل لاعب عدد من البدائل أو الاستراتيجيات، وبالتالي يوجد عائد لكل موقف من المواقف.
اللعبة	هي موقف تنافسي بين n شخص أو مجموعات يطلق عليها اللاعبون سواء كان هذا الموقف اقتصاديا أو إداريا أو عسكريا، حيث يسعى كل طرف في هذه اللعبة إلى تحقيق غاياته وأهدافه بحسب ما تقتضيه مصلحته الشخصية، وفقا لإجراءات وقواعد

	محددة ومتكاملة خاصة بكل لعبة، تسمى قواعد اللعبة (إن لكل لعبة قواعد موضوعة مسبقا ومعرفة بعائد معين، حيث تحدد هذه القواعد الأنشطة الأولية لتحركات اللعبة).
الخطة	مجموعة من البرامج التي يتم من خلالها تحقيق أهداف جهة معينة في تعظيم أرباحها أو تدني خسائرها.
العائد الخطة	يمثل العائد الصافي الذي تحققه الخطة، فإذا كان هدف الخطة تعظيم أرباح الوحدة الإنتاجية فإن عائد هذه الخطة يقاس بمقدار ما تحققه من ربح، أما إذا كان هدف الخطة زيادة قيمة المبيعات أو الإنتاج فإن عدد الخطة يتمثل في مقدار المبيعات أو الإنتاج الممكن تحقيقه بعد تنفيذ الخطة.

1. **قواعد المباراة:** من قواعد المباريات نجد ما يلي:
- عدد المشاركين (اللاعبين) في المباريات محدد؛
- لكل لاعب عدد محدد من الاستراتيجيات المتاحة أمامه؛
- لا يتصل اللاعبون بعضهم البعض الآخر، أي أن ما يختاره اللاعب الأول من استراتيجية لا يعرف به اللاعب الآخر؛
- قرارات جميع اللاعبين تتخذ في نفس الوقت؛
- كل لاعب يمارس قدرا محددا من التحكم، وعليه أن يستخدم هذا القرار في التحكم بأفضل طريقة ممكنة، أي اختيار أفضل استراتيجية بحيث تحقق له أفضل عائد ممكن؛
- قرار كل لاعب يؤثر عليه فيما يحققه من ربح، ويؤثر على اللاعب الآخر المشترك في المباراة من ربح، فعندما يتخذ اللاعب قرارا يقيد من حرية اللاعب الآخر في اختيار استراتيجياته، واللاعب ذاته بدوره مقيد في اتخاذ قراره نتيجة تعرضه للاعب الآخر.

2. **تصنيفات المباريات**

تصنف الألعاب عادة إما حسب عدد اللاعبين المشاركين في اللعبة أو عدد الإستراتيجيات أو حسب نتيجة اللعبة:

أ. **حسب عدد اللاعبين:** تقسم الألعاب إلى نوعين:

- لعبة ذات شخصين: أي عدد المشاركين في اللعبة اثنان فقط؛
- لعبة متعددة الأطراف: أي إن عدد المشاركين في اللعبة اكثر من اثنين.

ب. حسب عدد الاستراتيجيات: تقسم الألعاب إلي نوعين:

- لعبة محددة وهي اللعبة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات المتاحة أمام كل لاعب محدودا؛
- لعبة مستمرة (غير محددة) وهي اللعبة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات المتاحة أمام كل لاعب عير محدد أي لا نهائيا.

ج. حسب نتيجة اللعبة: فتقسم إلي نوعين أيضا:

- لعبة ذات مجموع صفري: وهي اللعبة التي يكون فيها ربح اللاعب الأول يساوى تماما خسارة اللاعب الأخر؛
- لعبة ذات مجموع صفري: وهي اللعبة التي يكون فيه رجع أحد اللاعبين لا يساوي خسارة اللاعب الأخر وإنما يمكن أن يخسر الطرفين أو يكسب نتيجة المباراة.

ثانيا: طرق حل المباريات

1) المباريات الثنائية ذات الحصيلة الصفرية

ان هذا النوع من المباريات يقوم بين اثنين من اللاعبين، ولكي يكون بالإمكان اجراء التحليلي الرياضي للمباريات يتم أولا اجراء توصيف كامل للمشكلة من خلال مصفوفة يطلق عليها اسم **مصفوفة الدفع (Pay of Matrix)** ويقصد بذلك مقدار ما يدفعه أحد اللاعبين للاعب الآخر.

لنفترض أن اللاعب الأول يرمز له بالرمز (A) واللاعب الثاني يرمز له بالرمز (B)، فإن مصفوفة الدفع كما في الجدول التالي:

الجدول رقم (2): الصيغة العامة لمصفوفة الدفع (a_{ij})

اللاعب A | اللاعب B

	Y_1	Y_2	Y_j	Y_n
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{1j}	a_{1n}
X_2	a_{21}	a_{22}	a_{2j}	a_{2n}
X_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{ij}	a_{in}
…	……	……..	……..	…
X_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mj}	a_{mn}

المصدر: مؤيد عبد الحسين الفضل، عبد الكريم هادي صالح شعبان، **الموسوعة الشاملة الى ترشيد القرارات الادارية: بأسلوب التحليل الكمي**، دار زهران، عمان، الأردن، بدون سنة، ص 113.

اذا فرضنا أن اللاعب الأول A أما اللاعب الثاني فيتمثل B، فهذا يعني أن مجموع ما يربحه اللاعب A يساوي ما يخسره اللاعب B، لذا فإن الحاصل الكلي يساوي صفر، وعليه فإن مصفوفة الدفع Pay off – matrix للاعب B هي نفسها للاعب A، ولكن بإشارة معكوسة أن الأسلوب أو المعيار المتبع لعمل مثل هذا النوع من المسائل هو Minimax - Maximin ففي:

- المعيار Minimax يحاول اللاعب الثاني B اختيار الاستراتيجية التي يحقق بموجبها أقل خسارة ممكنة؛
- المعيار Maximin يحاول اللاعب الثاني A اختيار الاستراتيجية التي تزيد من ربحه القليل؛
- الحل الأمثل للمباراة عندما يلاحظ كل اللاعبين أن لا جدوى في تغيير استراتيجيتهم في هذه الحالة تكون المباراة قد استقرت في وضع متوازن، أي:

نقطة التوازن =أدنى قيم الصفوف = أكبر قيم الأعمدة

مثال: افترض المباراة التالية:

متنافس الأرباح A	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	9	3	10	6
a_2	7	6	8	15
a_3	8	4	5-	10

(B متنافس الخسائر)

☜ **المطلوب:** أوجد قيمة المباراة؟

الحل:

متنافس الأرباح A	b_1	b_2	b_3	b_4	Maximin
a_1	9	3	10	6	3
a_2	7	6	8	15	6
a_3	8	4	5-	10	4
Minimax	9	6	10	15	

(B متنافس الخسائر)

☜ العمود على يمين المصفوفة فيه أصغر القيم في كل السطر $\min a_{ij}$ والسطر في أسفل المصفوفة لنضع فيه أكبر القيم في كل عمود $\max b_{ij}$ ثم نختار أكبر القيم في عمود min وأصغر القيم في سطر max فإذا تساوي القيمتين عندئذ تكون قد حصلنا على نقطة توازن أو استقرار.

☜ هذا يعني أن المباراة لها نقطة **توازن أو تعادل**، كما تسمى **بنقطة العتبة**، ونقطة التوازن حددتها الاستراتيجية [2×2] للمصفوفة وقيمة المباراة تساوي **6**.

2) المباريات الثنائية غير صفرية الحصيلة

تتم بين طرفين متنافسين أو ذوي مصالح متعارضة، بحيث تكون الحصيلة الجبرية لعائد المباراة لكلا الطرفين معا غير مساوية للصفر، أي أن مكاسب أحدهما لا تساوي خسائر الآخر، ومن أمثلة ذلك أنه قد يترتب على حملة إعلامية يقوم بها أحد مشروعين متنافسين بزادة مبيعاته بنسبة معينة ولكن النقص في مبيعات المنافسة يقل عن هذه النسبة أو يزيد عنها، وفي الحالة الأولى تكون

المبيعات الكلية للمشروعين معا قد زاد، وفي الحالة الثانية تكون المبيعات الكلية قد نقصت، وتكون الزيادة في أرباح المشروع الأول في الحالة الأولى أكبر من النقص في أرباح الحالة الثانية، بينما تكون أقل من هذا النقص في الحالة الثانية.

مثال: افترض المباراة التالية:

متنافس الأرباح A	b_1	b_2 (B متنافس الخسائر)	b_3
a_1	9,5	12	7
a_2	7	8,5	6,5
a_3	6	9	10

☜ **المطلوب:** أوجد قيمة المباراة؟

الحل:

متنافس الأرباح A	b_1	b_2 (B متنافس الخسائر)	b_3	Maximin
a_1	**9,5**	12	7	**7**
a_2	7	8,5	6,5	6,5
a_3	6	9	10	6
Minimax	**9,5**	12	10	

المباراة لا توجد لها نقطة توازن اذن نواصل الحل باستخدام **مبدأ السيطرة (تخفيض المصفوفة):**

يتم حذف الاستراتيجية غير المهيمنة من المصفوفة لكل من اللاعبين حتى نحصل على مصفوفة من الحجم **2×2** ، وذلك في حالة وجود استراتيجيات غير مهيمنة وفي هذه الحالة نميز بين نوعين من الاستراتيجيات غير المهيمنة وهي:

- بالنسبة لاستراتيجيات اللاعب A الذي يلعب الصفوف فإن الاستراتيجية غير المهيمنة هي التي تكون قيم عوائدها اقل من قيم عوائد باقي الأعمدة المقابلة لها لأنها أقل ربح للاعب A؛

- بالنسبة لاستراتيجيات اللاعب B الذي يلعب الأعمدة فإن الاستراتيجية غير المهيمنة هي التي تكون قيم عوائدها أكبر من قيم عوائد باقي الأعمدة المقابلة لها لأنها تحقق أكبر خسارة للاعب B.

B متنافس الخسائر

متنافس الأرباح A	b_1	b_3	Maximin	
a_1	**9,5**	7	**7**	**x**
a_3	6	10	6	**(1-x)**
Minimax	**9,5**	10		
	y	**(1-y)**		

المباراة لا توجد لها نقطة توازن إذن نواصل الحل باستخدام الاحتمالات:

تقوم هذه الطريقة على الاحتمالات التي تشير لوقت لعب كل استراتيجية علما أن الوقت الذي يلعبه كل لاعب لمباراة واحدة هو (1) أو 100% وبالتالي يجب تحديد الاحتمال الذي تساوي عنده المكاسب المتوقعة من لعب الاستراتيجية الأخرى، بصرف النظر عن الاستراتيجية التي سيلعبها.

1. العائد المتوقع بالنسبة للمتنافس A:

$$9,5\,x + 6\,(1-x) = 7x + 10\,(1-x)$$

$$3,5\,x + 6 = -3\,x + 10$$

$$\mathbf{X = 0,6154}$$

- 61,54 % من الوقت يختار الاستراتيجية a_1
- 38,46 % من الوقت يختار الاستراتيجية a_3

وعليه العائد المتوقع من المباراة: $9,5\,(0,6154) + 6(0,3846) = \mathbf{8,1538}$

2. الخسارة المتوقعة للمتنافس B:

$$9,5\,y + 7\,(1-y) = 6y + 10\,(1-y)$$

$$2,5\,y + 7 = -4\,y + 10$$

$$\mathbf{Y = 0,4615}$$

- 46,15 % من الوقت يختار الاستراتيجية b_1
- 53,85 % من الوقت يختار الاستراتيجية b_3

قيمة المباراة: $9{,}5\,(0{,}4615) + 7(0{,}5385) = \mathbf{8{,}1538}$

- **المتنافسA** : زاد الربح من 7 الى 8,1538
- **المتنافسB :** خفض الخسارة من 9,5 الى 8,1538

الفصل الخامس: نماذج صفوف الانتظار
Waiting Lines Theory

يرجع الفضل لنشأة نظرية صفوف الانتظار لـــ **Erlang** خلال السنتين 1909م و1910م، الذي لاحظ الازدحام الكبير على التحويلات للمكالمات الهاتفية، نتيجة التزاحم الكبير للطلب عليها مع محدودية الأجهزة المقدمة للخدمة، الأمر الذي يؤدي الى ضياع الكثير من الطلبيات وبالتالي تفويت الفرصة على المؤسسة من زيادة العائد.

أولا: ماهية صفوف الانتظار

تختص النظرية صفوف الانتظار بوضع الأساليب الرياضية اللازمة لحل المشاكل المتعلقة بالمواقف التي تتسم بنقاط اختناق، أو تشكل صفوف انتظار نتيجة لوصول الوحدات الطالبة للخدمة وانتظار دورها لتلقيها، على أن يكون الوصول الى مكان أداء الخدمة عشوائيا يتبع توزيعا معينا، كما أن زمن أداء الخدمة لكل وحدة يمكن أن يأخذ صيغة عشوائية وتبعا لتوزيع معين، كما تقدم قياسا لقدرة مركز الخدمة على تحقيق الغرض الذي أنشئ من أجله، ويكون ذلك عن طريق قياس رياضي دقيق لمتوسط وقت الانتظار للحصول على الخدمة.

1. مفهوم نماذج صفوف الانتظار

يمكن تعريف صفوف الانتظار على أنها نماذج رياضية من علم بحوث العمليات، واحدى الأساليب الكمية التي تساعد الادارة أو القائمين على اتخاذ القرار في اتخاذ قراراتهم، وتهدف النظرية الى دراسة وتحليل المواقف التي تتسم بنقاط اختناق أو تشكل صفوف الانتظار، ومن ثم اتخاذ القرار المناسب بشأن تلك المواقف.

تهدف نظرية الانتظار Queuing Theory والتي تكون فيها الانتظار على شكل صف Queue، الى تحديد الفترة الزمنية للانتظار على المدى البعيد، وجعل الفترة أقل ما يمكن، وكذلك تحويل فترة الانتظار الى مقياس مادي وهي تكلفة الانتظار ودراسة أسلوب الموازنة بين تكلفة الانتظار وتكلفة اتخاذ القرار لتقليل وقت الانتظار.

2. خصائص صفوف الانتظار

لدراسة وتحليل نظم الانتظار ينبغي معرفة عناصره الأساسية والتي يمكن توضيحها:

- **نمط الوصول Arrivals at Facility:** ويقصد به معدل الوقت الذي يصل فيه طالب الخدمة الى مركز الخدمة وهذا النمط اما يكون عشوائي أو ثابت أو محدد.

- **نمط تقديم الخدمة Service Disipline:** متوسط الوقت اللازم لتقديم الخدمة وهو أيضا عشوائي أو ثابت؛

- **طاقة النظام Queue size:** مجموعة طالبي الخدمة والمتمثلة في المنتظرون في الخط والذين يتلقون الخدمة، ويمكن أن تكون محدودة أو غير محدودة.

- **قواعد تقديم الخدمة Rôles of Services**: وهي الأسس التي بموجبها يتنظم خط الانتظار، وتحدد معايير تقديم الخدمة ومنها:

  - الواصل أولا يخدم أولا: First Come First Served

  - الواصل الأخير يخدم أولا: Last Come First Served

- قاعدة الخدمة العشوائية (صف غير منتظم): Service In Rundom Order

ثانيا: التحليل الاقتصادي لصفوف الانتظار

ان مشكلة التكاليف وكيفية معالجتها تفرض على متخذ القرار التفكير في توسيع نطاق تقديم الخدمة لغرض تقليل وقت الانتظار أخذا بعين الاعتبار موضوع التكاليف وما سيترتب عليه من أعباء مالية ضائعة، وتتمثل التكاليف المترتبة عن ظاهرة الانتظار على:

أ. **تكلفة الخدمة:** تسمى تكلفة الطاقة، وهي التكلفة الخاصة بالمحافظة على قدرة النظام في تقديم الخدمة، ومن أمثلتها: عدد العمال القائمين بصيانة عطل الآلات، منافذ بيع تذاكر القطارات ... وغيرها؛

ب. **تكلفة الانتظار:** وتكون مرتبطة بانتظار العملاء للحصول على الخدمة، ومن أمثلتها التكلفة الخاصة بالأجور المدفوعة للعاملين المنتظرين تفريغ شحنات سياراتهم أو انتظار اصلاح آلاتهم.

ويتم حساب التكاليف الكلية لصفوف الانتظار بالاعتماد على العلاقة التالية:

التكاليف الكلية	=	**تكلفة الانتظار**	+	**تكلفة الخدمة**
التكاليف الكلية	=	(تكلفة الانتظار لكل وحدة × متوسط عدد الوحدات في النظام)	+	(تكلفة الخدمة لكل منفذ × عدد المنافذ)

C_w: تكلفة الانتظار لكل فترة زمنية لكل وحدة.

L: متوسط عدد الوحدات في النظام.

C_s: تكلفة الخدمة لكل فترة زمنية لكل فترة لكل قناة.

k: عدد القنوات

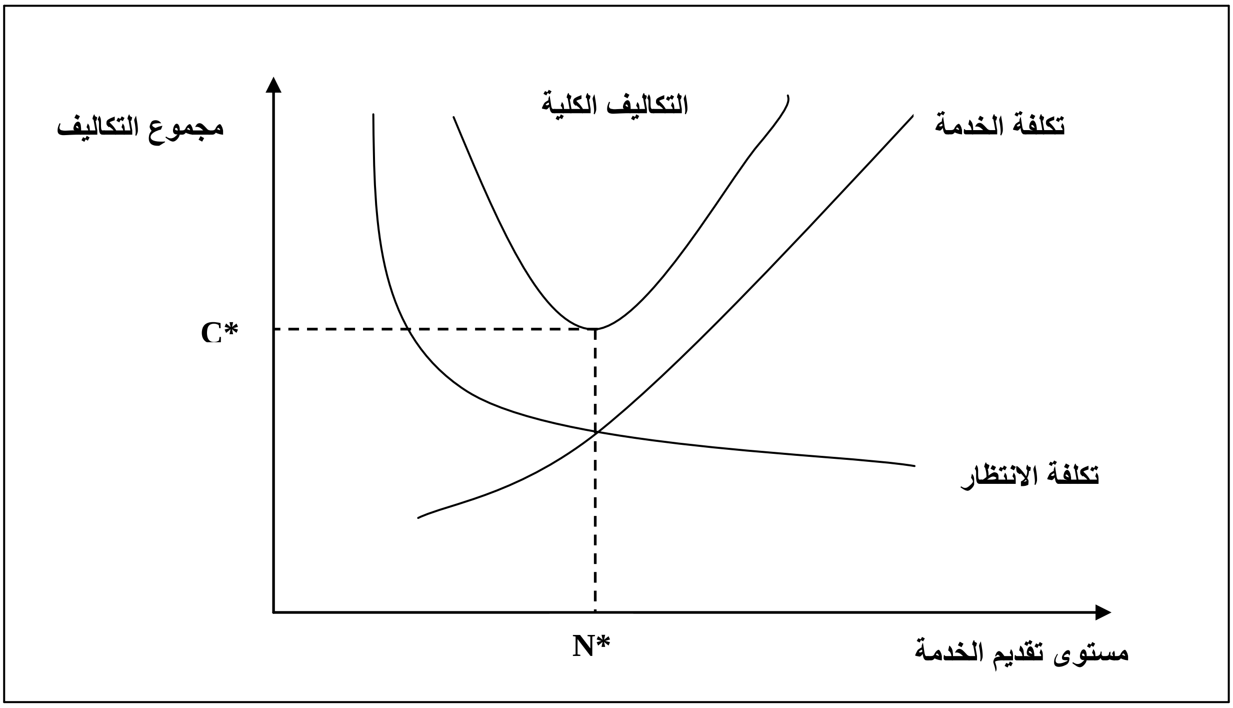
T_c: إجمالي التكلفة لكل فترة زمنية

إجمالي التكلفة هي مجموع تكلفة الانتظار وتكلفة الخدمة أي:

$$T_c = C_w \ L + C_s \ K$$

إن الهدف الأساسي من تحليل الصفوف هو توازن تكلفة تقديم الخدمة وتكلفة انتظار العملاء لتدنية التكاليف الكلية، والشكل الموالي نوضح العلاقة بين تكلفة الخدمة وتكلفة الانتظار.

الشكل رقم (5): العلاقة بين تكلفة الخدمة وتكلفة الانتظار



<u>**المصدر:**</u> سليمان محمد مرجان، **بحوث العمليات**، دار الكتب الوطنية، بنغازي، ليبيا، 2002، ص 259.

من خلال هذا الشكل نلاحظ نقطة التقاطع بين منحنى تكلفة الخدمة ومنحنى تكلفة الانتظار، تعطي نقطة ذات الاحداثيات**N*** و **C*** التي تحقق أفضل مستوى للخدمة مع حد أدنى للتكاليف.

ثالثا: أهم التوزيعات الاحتمالية المستخدمة في نظرية صفوف الانتظار

من أهم التوزيعات الاحتمالية المستخدمة في نظرية صفوف الانتظار إلى نوعين من التوزيعات النظرية، فوصول العملاء كثيرا ما يتبع التوزيع النظري لبواسون، أما فترات الخدمة فهي تتبع التوزيع الأسي.

أ. **توزيع بواسون:** يسمى بقانون الاحتمالات الصغيرة، ويتم الاستفادة منه في العديد من العمليات العشوائية التي تتولد مفرداتها في وحدة زمنية أو مكانية معينة، مثل عدد العملاء الذي يصلون إلى أحد البنوك كل 5 دقائق.

ونكتب الصيغ العامة للقانون بواسون بالشكل التالي:

$$P(r) = \lambda^{x} e^{-\lambda} / x!$$

لكل $r = 1, 2, \ldots N$

حيث:

x: عدد الوصول في الفترة المحددة؛

λ: معدل أو متوسط عدد الوصول في الفترة المحددة؛

e: 2,71828

ب. التوزيع الأسي: يستفاد منه في تحليل عدد العملاء الواصلين في فترة زمنية معينة، و أيضا الأوقات الفاصلة بين وصولين متتابعين. كما يستخدم في دراسة أوقات الخدمة، يعــرف التوزيـــع الأســـي بالصيغة التالية:

$$P_n(t) = \mu e^{-\mu t}$$

رابعا: المعالجة الرياضية لنماذج صفوف الانتظار

تمكن الباحثون الذين عملوا في مجال نظرية صفوف الانتظار من وضع نماذج رياضية تهدف إلي دراسة سلوك أنظمة صفوف الانتظار وتحديد مؤشراتها بشكل سهل وسريع، ونظرا للعدد الكبير من هذه النماذج الرياضية فإننا نركز على النماذج التي تتبع التوزيع البواسوني في عملية الوصول للوحدات، والتوزيع الأسي لأوقات الخدمة، ومن أهم المؤشرات:

μ: معدل أداء الخدمة.

λ: معدل وصول العملاء.

L_S: متوسط عدد الوحدات في النظام.

L_Q: متوسط عدد الوحدات في الصف.

W_Q: متوسط الوقت المستغرق في الصف

W_S: متوسط الوقت المستغرق في النظام.

الجدول رقم (3):النماذج الرياضية لصفوف الانتظار

المؤشر	مركز خدمة واحد		عدة مراكز للخدمة	
	صف محدود	صف غير محدود	على التسلسل	على التوازي
L_Q	$L_Q = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^2}{1-\left(\lambda/\mu\right)}$	$L_Q = \frac{N(N+1)}{2(N+2)}$ إذ كان: $\frac{\lambda}{\mu} \neq 1$ $W_Q = \frac{\left[1-P^N - NP^N(1-P)\right]}{(1-P)(1-P^{N+2})}$ إذ كان: $\frac{\lambda}{\mu} = 1$	$L_Q = L_{Q1} + L_{Q2}$	$L_Q = P_0 \frac{s^s P^{s+1}}{s!(1-P)^2}$
L_s	$L_S = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$	$L_S = \frac{p}{1-P} - \frac{(N+2)P^{N+2}}{1-P^{N+2}}$ إذ كان: $\frac{\lambda}{\mu} \neq 1$ $L_S = \frac{N+2}{2}$ إذ كان: $\frac{\lambda}{\mu} = 1$	$L_S = Ls_1 + Ls_2$	$L_s = p_0 \frac{s^s p^{s+1}}{s!(1-p)^2} + sp$
W_Q	$W_Q = \frac{\lambda}{\mu-(\mu-\lambda)}$	$W_Q = \frac{N(N+1)}{2\lambda(N+2)}$ إذ كان: $\frac{\lambda}{\mu} \neq 1$ $W_Q = \frac{1-P^N - NP^N(1-P)}{\mu(1-P^{N+2})}$ إذا كان: $\frac{\lambda}{\mu} = 1$	$W_Q = W_{Q1} + W_{Q2}$	$W_Q = \frac{p_0}{\mu s} \frac{(sp)^s}{s!(1-p)^2}$
W_S	$W_S = \frac{1}{\mu-\lambda}$	$W_S = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{(N+2)^{N+2}}{\mu^{N+2}-\lambda^{N+2}}$ إذ كان: $\frac{\lambda}{\mu} \neq 1$ $W_S = \frac{N+2}{2\lambda}$ إذ كان: $\frac{\lambda}{\mu} = 1$	$W_s = Ws_1 + Ws_2$	$W_S = \frac{p_0}{\mu_S} \frac{(sp)^2}{s!(1.p)^2} + \frac{1}{\mu}$

تختلف نماذج صفوف الانتظار باختلاف خصائص صف الانتظار ومواصفات مكان الخدمة، والجدول الموالي يوضح أهم النماذج الرياضية لصفوف الانتظار.

الجدول رقم (4): بعض نماذج لصفوف الانتظار

اسم النموذج	عدد الصفوف	عدد المراحل	نمط الوصول	نمط وقت الخدمة	حجم المجتمع	نظام الخدمة في الصف
النموذج البسيط (M/M/I)	صف واحد	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	توزيع أسي	غير محدود	الوارد أولا يخدم أولا
نموذج مراكز الخمة المتعددة (M/M/S)	عدة صفوف	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	توزيع أسي	غير محدود	الوارد أولا يخدم أولا
نموذج مركز الخدمة الثابت (المحدود) (M/M/S)	صف واحد	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	ثابت	غير محدود	الوارد أولا يخدم أولا
نموذج المجتمع المحدود	صف واحد	مرحلة واحدة	توزيع بواسون	توزيع أسي	محدود	الوارد أولا يخدم أولا

المصدر: جلال ابراهيم العبد، **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية**، دار الجامعة الجديدة، الاسكندرية، مصر، 2004، ص 431.

لمعرفة أن الصف يوافق نموذج انتظار معين، يجب معرفة طريقة لترتيب صفوف الانتظار، وهذا الترتيب يتطلب الاجابة على بعض الأسئلة منها:

- هل نظام الصف له محطة خدمة واحدة أو أكثر؟
- هل الوحدات التي تصل الصف من أجل الخدمة، تصل عشوائيا أو متأثرة ببعض العوامل الأخرى؟
- هل وقت الخدمة يتم عشوائيا أو على أساس محدد؟.

مثال:

تمتلك محطة لخدمة السيارات جهازاً واحداً لغسيل السيارات، تصل هذه السيارات إلى المغسل وفق توزيع بواسون بمعدل 5 سيارات في الساعة. وقد وجد أن الزمن اللازم لغسل السيارة الواحدة يتبع التوزيع الأسي بمعدل 10 دقائق للسيارة. بافتراض وجود عدد كافٍ من مواقف السيارات في المحطة فالمطلوب:

1) إيجاد التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات التي تتواجد في المحطة ؟

2) إيجاد العدد المتوقع للسيارات التي تتواجد في المحطة والعدد المتوقع للسيارات التي تتلقى خدمة الغسيل ؟

3) ما هي نسبة الوقت الذي تتوقف فيه المحطة عن الغسيل؟

4) ما هو الزمن المتوقع لانتظار سيارة حتى تنتهي من الغسيل؟ وما هو الزمن المتوقع لانتظار سيارة حتى تبدأ خدمة الغسيل؟ وما هو احتمال أن ينتهي غسيل سيارة خلال:

- 10 دقائق على الأقل؛
- 10 دقائق على الأكثر.

5) لنفترض أن المحطة ترغب بتقليص المكان المخصص لوقوف السيارات في المحطة فما هو عدد المواقف التي يجب أن تحتفظ بها بحيث أن 90 % من الزبائن على الأقل سيجدون مواقف لسياراتهم حين وصولهم؟

6) لنفترض أن المحطة احتفظت بأربعة مواقف فقط وأن الزبائن الذين لا يجدون موقفاً لسياراتهم سوف ينصرفون فما هي نسبة هؤلاء الزبائن؟

الـــحــــــــل:

حسب معطيات المثال فإن نموذج نظام محطة الغسيل هو **$M/M/1/GD/\infty/\infty$** فيه: λ=5ساعة، μ=6 ساعة، ومنه ρ= 6/5 > 1 ومنه يكون:

$$P(n) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n,\ \ n \geq 0$$

☜ العدد المتوقع للسيارات التي تتواجد في المحطة $L = \frac{5}{6-5} = 5$ سيارة

☜ عدد السيارات في صف الانتظار $L_q = \frac{5}{6}(5) = \frac{25}{6}$ سيارة

☜ العدد المتوقع للسيارات التي تتلقى خدمة الغسيل $L - L_q = 5 - \frac{25}{6} = \frac{5}{6}$

☜ نسبة الوقت الذي تتوقف فيه المحطة عن العمل $P(0) = \frac{1}{6} \approx 17\%$

☜ الزمن المتوقع لانتظار سيارة ما حتى تنتهي من خدمة الغسيل هو W وقيمتها :

$W = \frac{1}{6-5} = 1$ ساعة

☜ الزمن المتوقع لانتظار سيارة ما حتى تبدأ خدمة الغسيل هو W_qوقيمتها : $\frac{5}{6(6-5)}=5/6$

$W_q =$ساعة

1) احتمال أن ينتهي غسيل السيارة خلال عشر دقائق$=\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ ساعة على الأكثر هو

$$W(\tfrac{1}{6}) = pr\{T \leq \tfrac{1}{6}\}$$

نجد $$W(\tfrac{1}{6}) = 1 - e^{-1/6}$$

2) احتمال أن ينتهي غسيل سيارة ما خلال عشر دقائق على الأقل هو:

$$pr\{T \geq 1/6\} = 1 - W(1/6) = e^{=1/6}$$

☜ لنرمز لعدد المواقف التي يجب أن تحتفظ بها المحطة لتأمين مواقف لـــ 90 % على الأقل من الزبائن.

☜ إن احتمال أن يجد زبون ما موقفاً من المواقف التي عددها m هو 90 %على الأقل أو أن: $P(0) + P(1) + P(2) + \ldots + P(m) \geq 0.9$

لكن $$\sum_{n=0}^{m} p(n) = (1-\rho) \sum_{n=0}^{m} \rho n = (1-\rho) \frac{1-\rho}{1-\rho} = 1-\rho^{m+1}$$

لذا علينا أن نبحث عن قيمة m التي تحقق:

$$1- \rho^{m+1} \geq 0.9 \leftrightarrow \rho^{m+1} \leq 0.1 \leftrightarrow$$

$$(m+1) \log \rho \leq \log (0.1) = -1 \leftrightarrow$$

$$(m+1)(-0.08) \leq -1 \rightarrow m \geq 11.63 \approx 12$$

لذا يجب على الإدارة أن تحتفظ بـــ 12 موقف للسيارات.

☜نسبة الزبائن الذين ينصرفون هنا تساوي احتمال أن يجد زبون ما، ما لا يقل عن خمسة (5) زبائن (4 زبائن + زبون يتلقى الخدمة) أي يساوي ($N \geq 5$) pr ويكون

$$pr\{N \geq 5\} = \rho^5 = (\tfrac{5}{6})^5 \approx 0.40$$

المراجع:

- بوقرة رابح، **بحوث العمليات**، الجزء الأول مع دراسة حالة، جامعة المسيلة، الجزائر، 2010/2009.
- بوقرة رابح، **بحوث العمليات: مدخل لاتخاذ القرارات**، الجزء الثاني، منشورات جامعة المسيلة، الجزائر، 2012.
- حسين محمود الجنابي، **الأحدث في بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2010.
- دلال صادق مصطفى الجواد، ناصر حميد الفتال، **بحوث العمليات**، الطبعة العربية، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008.
- راتول محمد، **بحوث العمليات**، الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006.
- سليمان محمد المرجان، **بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، الجامعة المفتوحة طرابلس، 2002.
- عبد الحي مرعي، كمال خليفة أبو زيد، **بحوث العمليات في المحاسبة**، دار الجامعة الجديدة للنشر، الإسكندرية، مصر، 2000.
- عبد الستار أحمد الألوسي، **أساليب بحوث العمليات: الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**، دار القلم، دبي، الامارات العربية المتحدة، 2002.
- علي العلاونة، محمد عبيدات، عبد الكريم عواد، **بحوث العمليات في العلوم التجارية**، الطبعة الأولى، دار المستقبل، عمان، الأردن، 2000.
- محمد إسماعيل بلال، **بحوث العمليات: استخدام الأساليب الكمية في صنع القرار**، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، 2005.
- محمد الطراونة، سليمان عبيدات، **مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.
- محمد صالح حناوي، محمد توفيق ماضي، **بحوث العمليات في تخطيط ومراقبة الإنتاج**، الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر، 2006.
- محمود العبيدي، **بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال**، الطبعة الأولى، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2004.

- Hamdy, A. Taha, Operations Research, An Introduction, Sixth Edition, Prentice Hall International, Inc.1997.
- Ravi Ravindran, Operations Research Applications, Taylor & Francis Group, USA, 2009.
- H.A. Eiselt & C.-; L. Sandblom, Operations Research: A Model-Based Approch, Springer, USA, 2010.
- Murthy P. Rama, Operations Research , second edition, New Age International (P) Ltd, New Delhi, 2009.