

Modélisation de la machine asynchrone triphasée

1.1 Introduction

1.2 Modélisation du moteur (machine) asynchrone triphasée (MAS)

1.3 Transformation de Park appliquée à la MAS triphasée

1.4 Transformation de Laplace appliquée au modèle de Park de la MAS triphasée

1.1 Introduction

La machine asynchrone (MAS), malgré son rendement pas très élevé, est la machine la plus répandue dans les applications à vitesse constante ou à vitesse variable. Cela est dû à ces avantages de :

- simple construction ou de fabrication (rotor à cage d'écurueil simple non alimenté et sans aimant permanent, stator alimenté à travers des anneaux liés aux extrémités des bobines statoriques au lieu du collecteur comme dans la machine à courant continu),
- faible coût de maintenance,
- Gamme de puissance importante de quelques kilowatts à quelques mégawatts.

L'étude du comportement de la machine asynchrone pour différents points de fonctionnement et dans des régimes statiques et variables (dynamiques) est indispensable pour le dimensionnement ou le choix de la machine à utiliser avec ces accessoires, ainsi que la conception de la commande adoptée. Cette étude peut se faire en utilisant physiquement la MAS elle-même ou en utilisant son modèle mathématique équivalent. La modélisation d'un système physique (la MAS) signifie la définition d'un modèle mathématique équivalent au système physique. La simulation est définie comme l'utilisation du modèle mathématique équivalent d'un système physique pour étudier le comportement de ce système physique, à travers son modèle mathématique équivalent. Cela permet de réduire le coût, les risques et le temps de l'étude du système physique.

Dans le présent chapitre, la modélisation de la MAS est développée à partir d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices dans son repère réel triphasé, suivi de la transformation de PARK des équations réel triphasée au repère fictif de Park, à titre de simplification de ces équations, et en vue d'une modélisation de la machine asynchrone triphasée par une machine biphasée fictive équivalente. La plupart des commandes de la MAS nécessitent son modèle présenté sous forme d'équation commandé en tension sachant que celle-ci est alimentée par un onduleur de tension.

1.2 Modélisation du moteur asynchrone triphasé

1.2.1 Description

L'étude de la modélisation de la machine asynchrone sera faite sous les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Entrefer constant (pas de saillance ou MAS à pôles lisses).
- Effet des encoches négligé.
- Distribution spatiale sinusoïdale des forces magnétomotrices d'entrefer.

- Circuit magnétique non saturé et à perméabilité constante (inductances propres constantes).
- Pertes ferromagnétiques négligeables.
- L'influence de l'effet de peau sur les caractéristiques est négligeable.
- Influence de l'effet de peau et de l'échauffement sur les paramètres de la MAS est négligeable (les résistances statoriques et rotoriques sont constantes).
- Additivité des flux.

La structure principale de la machine asynchrone est représentée par la figure (1.1), elle comporte six enroulements dans l'espace électrique, les axes statoriques sont décalés entre eux d'un angle ($2\pi/3$), ainsi que les axes rotoriques. L'angle (θ) représente l'angle entre l'axe de la phase rotorique de référence (R_a) et l'axe fixe de la phase statorique de référence (S_a). Les flux sont considérés positifs selon le sens des axes des enroulements de la machine asynchrone.

1.2.2 Equations électriques

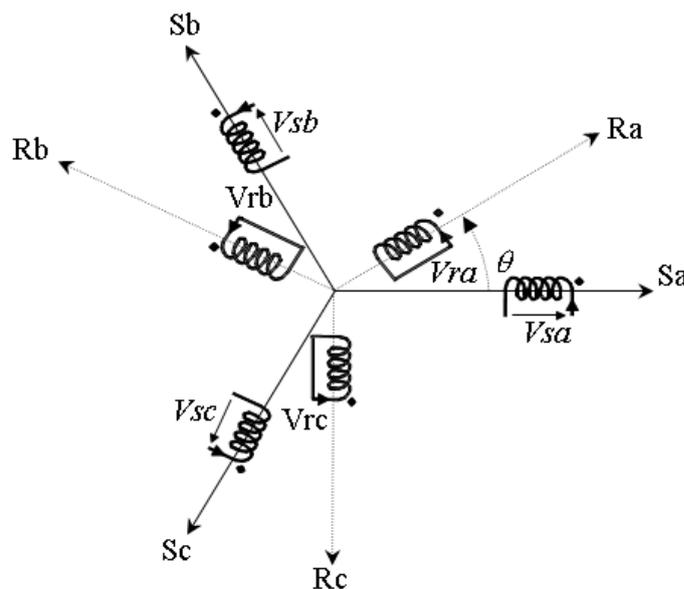


Figure 1.1 Représentation des enroulements de la machine asynchrone triphasée dans l'espace électrique.

En considérant la figure (1.1), les équations électriques statoriques du modèle de la machine asynchrone triphasée s'écrivent respectivement comme suit (l'indice (s) indique le stator)

$$\begin{bmatrix} V_{sa} \\ V_{sb} \\ V_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{sa} \\ \Phi_{sb} \\ \Phi_{sc} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

et les équations électriques rotoriques du modèle de la machine asynchrone triphasée s'écrivent respectivement comme suit (l'indice (r) indique le stator) :

$$\begin{bmatrix} V_{ra} \\ V_{rb} \\ V_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Avec V , i et Φ sont respectivement la tension, le courant et le flux.

R_s et R_r sont respectivement la résistance d'une phase statorique et la résistance d'une phase du rotor.

1.2.3 Equations magnétiques

Les hypothèses présentées précédemment, conduisent à des relations linéaires entre les flux et les courants.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{sa} \\ \Phi_{sb} \\ \Phi_{sc} \\ \Phi_{ra} \\ \Phi_{rb} \\ \Phi_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{ss} & M_{ss} & M_{ss} & M_{1sr} & M_{3sr} & M_{2sr} \\ M_{ss} & l_{ss} & M_{ss} & M_{2sr} & M_{1sr} & M_{3sr} \\ M_{ss} & M_{ss} & l_{ss} & M_{3sr} & M_{2sr} & M_{1sr} \\ M_{1sr} & M_{2sr} & M_{3sr} & l_{rr} & M_{rr} & M_{rr} \\ M_{3sr} & M_{1sr} & M_{2sr} & M_{rr} & l_{rr} & M_{rr} \\ M_{2sr} & M_{3sr} & M_{1sr} & M_{rr} & M_{rr} & l_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \\ i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Avec :

l_{ss} , l_{rr} : Inductance propre d'une phase statorique et Inductance propre d'une phase rotorique.

M_{ss} : Inductance mutuelle entre deux phases statoriques.

M_{rr} : Inductance mutuelle entre deux phases rotoriques.

$M_{1sr,2sr,3sr}$: Inductances mutuelles instantanées entre une phase statorique et une phase rotorique.

$$\begin{bmatrix} M_{1sr} \\ M_{2sr} \\ M_{3sr} \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

M_0 : Maximum de l'inductance mutuelle entre une phase statorique et une phase rotorique.

La matrice des flux réels fait apparaître deux sous matrices d'inductances :

$$[\Phi_{sabc}] = [L_{ss}][i_{sabc}] + [M_{sr}][i_{rabc}] \quad (1.5)$$

$$[\Phi_{rabc}] = [M_{rs}] [i_{sabc}] + [L_{rr}] [i_{rabc}] \quad (1.6)$$

Avec :

$$[L_{ss}] = \begin{bmatrix} l_s & M_s & M_s \\ M_s & l_s & M_s \\ M_s & M_s & l_s \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$[L_{rr}] = \begin{bmatrix} l_r & M_r & M_r \\ M_r & l_r & M_r \\ M_r & M_r & l_r \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$[M_{sr}] = [M_{rs}]^T = M_0 \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Deux remarques important sont observées :

- On note que le flux (Φ_{sa}) de la phase statorique (Sa) est composée de **6** flux, un flux propre ($I_{ss} \cdot i_{sa}$) et **5** flux mutuels (**2** flux mutuel entre les 2 phases statoriques (Sb) et (Sc) et la phase statorique (Sa) exprimés par ($M_{ss} \cdot i_{sb}$) et ($M_{ss} \cdot i_{sc}$), et **3** flux mutuel entre les 3 phases rotoriques (Ra), (Rb) et (Rc) et la phase statorique (Sa) exprimés par ($M_{Isr} \cdot i_{ra}$), ($M_{3sr} \cdot i_{rb}$) et ($M_{2sr} \cdot i_{rc}$). Même remarque est observée pour les autres flux statoriques et rotoriques. Cela signifie l'existence d'un couplage magnétique fort entre les phases statoriques.
- Les inductances mutuelles stator/stator (M_{ss}) sont constantes mais les inductances mutuelles stator/rotor (M_{Isr} , M_{2sr} , M_{3sr}) sont variables et fonction de la position rotorique (θ). Dont, les flux mutuels rotor/stator ($M_{Isr} \cdot i_{ra}$), ($M_{3sr} \cdot i_{rb}$) et ($M_{2sr} \cdot i_{rc}$) varient en fonction de la position rotorique (θ).

Les deux remarque précédentes implique que le système d'équations magnétiques et par conséquence le système d'équations électriques est un système fortement couplé et non linéaire. Cela implique que sa résolution (définition des inconnues (i_{sa} , i_{sb} , i_{sc} , i_{ra} , i_{rb} , i_{rc} et θ) en fonction des connue (V_{sa} , V_{sb} , V_{sc}) et le paramètre de la MAS (R_s , R_r , l_{ss} , l_{rr} et $M_{Isr,2sr,3sr}$) est difficile et très compliqué. Cela peut se faire en utilisant les méthodes numériques mais analytiquement il est compliqué. Vue cela, il est indispensable de faire un changement de repère qui permet transformer le modèle triphasé de la MAS en un modèle simple, moins couplé est moins compliqué à résoudre. Ce changement de repère est dite ' transformation de Park '.

1.3 Transformation de Park appliquée à la MAS triphasée

1.3.1 Présentation de la transformation de Park appliquée

La transformation de Park permet le passage du système triphasé au système biphasé. Elle s'effectue en faisant correspondre aux variables réelles leurs composantes homopolaire, directe et en quadrature.

La figure 1.2 présente la machine asynchrone triphasée dont les phases statoriques sont présentées par ses axes (**As**, **Bs** et **Cs** ou **Sa**, **Sb** et **Sc** (figure 1.1)) et les bobines rotoriques sont présentées par ses axes (**ar**, **br** et **cr** ou **Ra**, **Rb** et **Rc** (figure 1.1)). Le passage du repère réel triphasé (abc) au repère fictif biphasé orthogonal est d'axes (**uv**) s'effectue en faisant correspondre aux variables réelles statoriques et rotoriques leurs composantes directe, en quadrature et homopolaire, tout en faisant intervenir les angles entre les axes des enroulements statorique (**As**, **Bs** et **Cs**), les axes rotoriques (**ar**, **br** et **cr**) et les axes du repère fictif (**u,v**) (les angle θ_a pour les grandeur statorique et θ_b pour les grandeurs rotoriques tout en considérant les déphasages de $2\pi/3$ et $4\pi/3$).

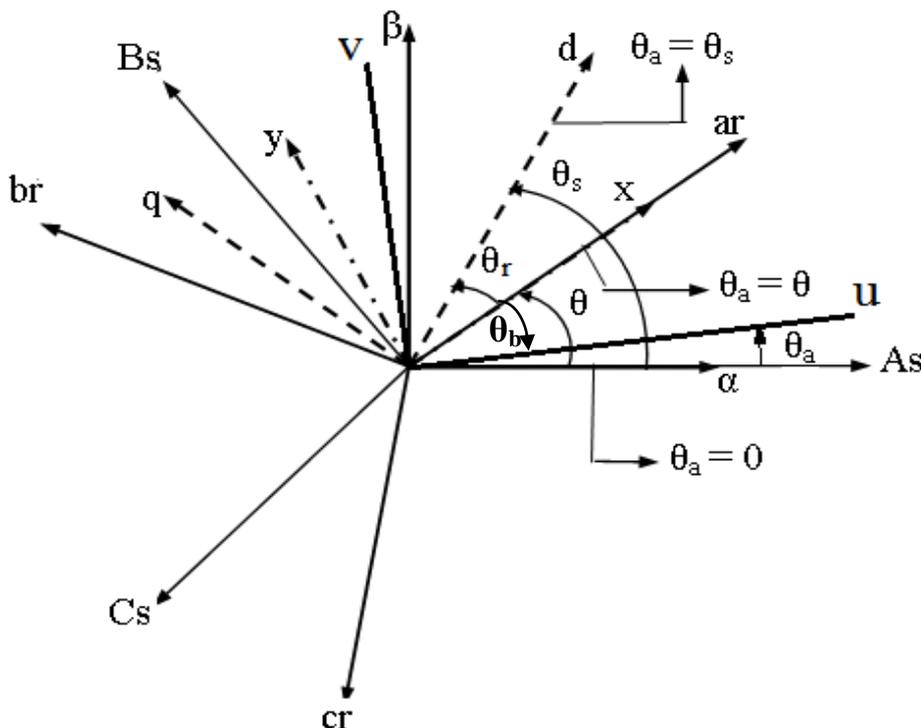


Figure 1.2 : Passage du système triphasé au système biphasé et inversement pour une MAS

θ_a : Représente l'angle instantané entre la phase de l'axe statorique x_{As} et l'axe **u**.

θ_b : Représente l'angle instantané entre la phase de l'axe rotorique x_{ar} et l'axe **u**. ($\theta_b = \theta - \theta_a$)

$\omega_a = \frac{d\theta_a}{dt}$: Vitesse angulaire de rotation de l'axe (**u**) du repère d'axes biphasés (**uv**) par rapport à l'axe (**As**) du repère d'axes triphasés statoriques (**ABC**).

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$: Vitesse angulaire de rotation de l'axe (**ar**) du rotor par rapport à l'axe (**As**) du repère d'axes triphasés statoriques (**ABC**).

$\omega_s = \frac{d\theta_s}{dt}$: Vitesse angulaire de rotation du champ tournant (statorique) par rapport à l'axe (**As**) du repère d'axes triphasés statoriques (**ABC**).

$\omega_r = \frac{d\theta_r}{dt}$: Vitesse angulaire de rotation du champ tournant (statorique) par rapport à l'axe (**ar**) du rotor.

Le passage du système triphasé de tension statorique (**abc**) au système triphasé statorique (**uvo**) s'obtient à partir de la matrice de transformation de PARK [$P_i(\theta_a)$] (avec $i = 1$ ou 2), sachant que la composante homopolaire V_{so} est nulle pour les systèmes triphasés équilibrés, comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} V_{su} \\ V_{sv} \\ V_{so} \end{bmatrix} = [P_i(\theta_a)] \begin{bmatrix} V_{sa} \\ V_{sb} \\ V_{sc} \end{bmatrix} \quad \text{avec } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (1.10)$$

Le passage du système statorique triphasé au système biphasé s'obtient à partir de la matrice de transformation de PARK [$P_1(\theta_a)$] ou [$P_2(\theta_a)$].

$$[P_1(\theta_a)] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_a) & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\theta_a) & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a - \frac{4\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.10.a)$$

$$[P_2(\theta_a)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta_a) & \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_a - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\theta_a) & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a - \frac{4\pi}{3}) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (1.10.b)$$

Les variables triphasées statoriques réelles sont obtenues à partir des variables biphasées (V_{su}, V_{sv}) par la transformation inverse comme suit:

$$\begin{bmatrix} V_{sa} \\ V_{sb} \\ V_{sc} \end{bmatrix} = [P_i(\theta_a)]^{-1} \begin{bmatrix} V_{su} \\ V_{sv} \\ V_{so} \end{bmatrix} \quad \text{avec } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (1.11)$$

La matrice inverse de Park est donnée par :

$$[P_1(\theta_a)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_a) & -\sin(\theta_a) & 1 \\ \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_a - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta_a - \frac{4\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11.a)$$

$$[P_2(\theta_a)]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta_a) & -\sin(\theta_a) & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_a - \frac{2\pi}{3}) & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos(\theta_a - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta_a - \frac{4\pi}{3}) & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (1.11.b)$$

De même pour les grandeurs rotoriques, le passage du système triphasé de tension rotorique (**abc**) au système triphasé rotorique (**uvo**) s'obtient à partir de la matrice de transformation de PARK $[P_i(\theta_b)]$ (avec $i = 1$ ou 2), sachant que la composante homopolaire V_{ro} est nulle pour les systèmes triphasés équilibrés, comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} V_{ru} \\ V_{rv} \\ V_{ro} \end{bmatrix} = [P_i(\theta_b)] \begin{bmatrix} V_{ra} \\ V_{rb} \\ V_{rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (1.12)$$

Le passage du système rotorique triphasé au système biphasé s'obtient à partir de la matrice de transformation de PARK $[P_1(\theta_b)]$ ou $[P_2(\theta_b)]$.

$$[P_1(\theta_b)] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_b) & \cos(\theta_b - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_b - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\theta_b) & -\sin(\theta_b - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_b - \frac{4\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.12.a)$$

$$[P_2(\theta_b)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta_b) & \cos(\theta_b - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_b - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\theta_b) & -\sin(\theta_b - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_b - \frac{4\pi}{3}) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (1.12.b)$$

Les variables triphasées rotoriques réelles sont obtenues à partir des variables biphasées (V_{ru}, V_{rv}) par la transformation inverse comme suit:

$$\begin{bmatrix} V_{ra} \\ V_{rb} \\ V_{rc} \end{bmatrix} = [P_i(\theta_b)]^{-1} \begin{bmatrix} V_{ru} \\ V_{rv} \\ V_{ro} \end{bmatrix} \quad \text{avec } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (1.13)$$

La matrice inverse de Park est donnée par :

$$[P_1(\theta_b)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_b) & -\sin(\theta_b) & 1 \\ \cos(\theta_b - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_b - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta_b - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta_b - \frac{4\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13.a)$$

$$[P_2(\theta_b)]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta_b) & -\sin(\theta_b) & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos(\theta_b - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_b - \frac{2\pi}{3}) & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos(\theta_b - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\theta_b - \frac{4\pi}{3}) & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (1.13.b)$$

Le passage du repère **(abc)** au repère **(uv)** est applicable pour les tensions, les courants et les flux statoriques et rotoriques.

1.3.1 Transformation de Park appliquée aux équations électriques et magnétiques de la MAS avec un repère diphasé orthogonal quelconque (u,v)

Après l'application de la transformation de Park au système d'équations statoriques et rotoriques, et après développement du calcul, le modèle électrique et magnétique équivalent de la machine dans le repère quelconque **(uv)** sera comme suit:

$$\begin{bmatrix} V_{su} \\ V_{sv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{su} \\ i_{sv} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{su} \\ \Phi_{sv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_a \\ \omega_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{su} \\ \Phi_{sv} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$\begin{bmatrix} V_{ru} \\ V_{rv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ru} \\ i_{rv} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{ru} \\ \Phi_{rv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_a - \omega) \\ (\omega_a - \omega) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{ru} \\ \Phi_{rv} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{su} \\ \Phi_{ru} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{su} \\ i_{ru} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{sv} \\ \Phi_{rv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sv} \\ i_{rv} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Avec :

$L_s = l_{ss} - M_{ss}$: Inductance propre cyclique du stator à pôles lisses.

$L_r = l_{rr} - M_{rr}$: Inductance propre cyclique du rotor à pôles lisses.

$M = \frac{3}{2} M_0$: Inductance mutuelle cyclique entre stator et rotor.

Φ_{su} : flux magnétique statorique dans le repère UV selon l'axe U.

Φ_{sv} : flux magnétique statorique dans le repère UV selon l'axe V.

Φ_{ru} : flux magnétique rotorique dans le repère UV selon l'axe U.

Φ_{rv} : flux magnétique rotorique dans le repère UV selon l'axe V.

A partir du modèle de la machine asynchrone triphasée dans le repère (uv), on peut déduire le modèle équivalent de la machine dans chacun des différents repères indiqués dans la figure 1.2.

a- Référence (α, β) (référence fixe lié au stator)

b- Référence (x, y) (référence tournant lié au rotor)

c- Référence (d, q) (référence tournant lié au champ tournant)

a- Référence (α, β) (référence fixe lié au stator)

Il se traduit par les conditions:

$$\theta_a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} U \rightarrow \alpha \\ V \rightarrow \beta \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta_a}{dt} = \omega_a = 0 \quad (\theta_b = \theta - \theta_a)$$

Les équations électriques prennent la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} V_{s\alpha} \\ V_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{s\alpha} \\ \Phi_{s\beta} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$\begin{bmatrix} V_{r\alpha} \\ V_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{r\alpha} \\ \Phi_{r\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{r\alpha} \\ \Phi_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Avec

$$\begin{bmatrix} \Phi_{s\alpha} \\ \Phi_{r\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{r\alpha} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{s\beta} \\ \Phi_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\beta} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

b- Référence (x, y) (référence tournant lié au rotor)

Il se traduit par les conditions :

$$\theta_a = \theta \Rightarrow \begin{cases} U \rightarrow X \\ V \rightarrow Y \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega = \omega_a \quad (\theta_b = \theta - \theta_a = 0)$$

Les équations électriques prennent la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} V_{sx} \\ V_{sy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{sx} \\ \Phi_{sy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{sx} \\ \Phi_{sy} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

$$\begin{bmatrix} V_{rx} \\ V_{ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rx} \\ i_{ry} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{rx} \\ \Phi_{ry} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Avec

$$\begin{bmatrix} \Phi_{sx} \\ \Phi_{rx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{rx} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{sy} \\ \Phi_{ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sy} \\ i_{ry} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

c- Référence (d, q) (référence tournant lié au champ tournant)

Il se traduit par les conditions :

$$\theta_a = \theta_s \Rightarrow \begin{cases} U \rightarrow d \\ V \rightarrow q \end{cases} \quad \text{et} \quad \omega_s = \frac{d\theta_s}{dt} = \omega_a \quad \text{Avec} \quad \omega_s - \omega = \omega_r \quad (\theta_b = \theta - \theta_a = \theta - \theta_s)$$

Les équations électriques prennent la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} V_{sd} \\ V_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{sd} \\ \Phi_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_s \\ \omega_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{sd} \\ \Phi_{sq} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$\begin{bmatrix} V_{rd} \\ V_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_{rd} \\ \Phi_{rq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r \\ \omega_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{rd} \\ \Phi_{rq} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Avec

$$\begin{bmatrix} \Phi_{sd} \\ \Phi_{rd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{rd} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{sq} \\ \Phi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & M \\ M & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sq} \\ i_{rq} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Le champ tournant peut être :

- Champ statorique Φ_s
- Champ rotorique Φ_r
- Champ d'entrefer Φ_g

Le modèle (1.26 et 1.27) peut être aussi donné en fonction des courants en remplaçant les flux par leurs expressions (1.28 et 1.29) dans les équations des tensions (1.26 et 1.27) :

$$V_{sd} = R_s i_{sd} + L_s \frac{di_{sd}}{dt} + M \frac{di_{rd}}{dt} - \omega_s L_s i_{sq} - \omega_s M i_{rq} \quad (1.29)$$

$$V_{sq} = R_s i_{sq} + L_s \frac{di_{sq}}{dt} + M \frac{di_{rq}}{dt} + \omega_s L_s i_{sd} + \omega_s M i_{rd} \quad (1.30)$$

$$V_{rd} = R_r i_{rd} + M \frac{di_{sd}}{dt} + L_r \frac{di_{rd}}{dt} - \omega_r M i_{sq} - \omega_r L_r i_{rq} = 0 \quad (1.31)$$

$$V_{rq} = R_r i_{rq} + M \frac{di_{sq}}{dt} + L_r \frac{di_{rq}}{dt} + \omega_r M i_{sd} + \omega_r L_r i_{rd} = 0 \quad (1.32)$$

On remarque que le flux (Φ_{sd}) est composé d'un flux propre ($L_s \cdot i_{sd}$) et d'un seul flux mutuel rotor /stator ($M \cdot i_{rd}$). Même remarque est observée pour les autres flux. Donc les flux de la MAS dans ce modèle (**uv** ou **dq**) sont moins couplés en comparaison avec les flux dans le modèle réel triphasé (**abc**) de la MAS. Donc les équations magnétiques et par conséquence électriques de la MAS sont moins couplées et relativement faciles à résoudre en comparaison avec ceux de la MAS dans le repère réel triphasé.

En plus, on remarque aussi que la dernière représentation électrique et magnétique fait apparaître des grandeurs électriques et magnétiques statoriques et rotoriques continues. La conception du contrôle vectoriel par orientation du flux nécessite ce choix et les modèles d'action dépendent de la position du référentiel par rapport aux divers axes de flux. La conception de la commande directe du couple nécessite le modèle dans le repère fixe lié au stator (α, β) où les grandeurs électriques et magnétiques sont des grandeurs alternatives.

1.3.2 Equation électromagnétique

Les différentes expressions du couple électromagnétique dans le repère tournant lié au champ tournant, sont exprimées par les équations suivantes en fonction des flux et des courants statoriques et rotoriques, lorsqu'on utilise la matrice de Park (P_2), la puissance et donc le couple électromagnétique sont conservés :

$$C_e = p_p \left[\Phi_{sd} i_{sq} - \Phi_{sq} i_{sd} \right] \quad (1.33)$$

$$C_e = p_p \left[\Phi_{rq} i_{rd} - \Phi_{rd} i_{rq} \right] \quad (1.34)$$

$$C_e = \frac{p_p M}{L_s} [\Phi_{sd} i_{rq} - \Phi_{sq} i_{rd}] \quad (1.35)$$

$$C_e = \frac{p_p M}{L_r} [\Phi_{rd} i_{sq} - \Phi_{rq} i_{sd}] \quad (1.36)$$

$$C_e = p_p M (i_{sq} i_{dr} - i_{sd} i_{rq}) \quad (1.37)$$

Avec :

p_p : Nombre de paires de pôles.

En utilisant la matrice de Park (P_1), la puissance et donc le couple électromagnétique ne sont pas conservés, et le couple devient :

$$C_e = \frac{3}{2} p_p M (i_{sq} i_{dr} - i_{sd} i_{rq}) \quad (1.37)$$

1.3.3 Equation mécanique

L'évolution de la vitesse de rotation en fonction du couple électromagnétique et de la charge de la machine caractérisée par le couple résistant C_r , est décrite par l'expression suivante :

$$J \frac{d}{dt} \Omega + f \Omega = C_e - C_r \quad \text{et} \quad \omega = p_p \Omega \quad (1.38)$$

Avec

J : Moment d'inertie.

f : Coefficient de frottement.

C_r : Couple résistant imposé par la charge mécanique.

C_e : Couple électromagnétique.

Ω : Vitesse mécanique de rotation du rotor.

ω : Vitesse électrique de rotation du rotor.

1.4 Transformation de Laplace appliquée au modèle de Park de la MAS triphasée

Cette transformation du domaine temporel au domaine fréquentiel de Laplace permet un changement de la variable temporelle (t) par une variable fréquentielle ($p = j\omega$). Ce changement rend le modèle mathématique de la MAS plus facile à résoudre, et par suite définir analytiquement la relation entre les inconnues du modèle et les connues du modèle.

En appliquant la transformation de Park aux équations électriques et mécanique (1.29), (1.30), (1.31), (1.32), (1.37), (1.38), et en mettant ($\frac{d}{dt} = p$, variable de Laplace), obtient le modèle équivalent de la MAS dans le repère de Park lié au champ tournant dans le domaine fréquentiel de Laplace :

$$V_{sd} = R_s i_{sd} + L_s p i_{sd} + M p i_{rd} - \omega_s L_s i_{sq} - \omega_s M i_{rq} \quad (1.39)$$

$$V_{sq} = R_s i_{sq} + L_s p i_{sq} + M p i_{rq} + \omega_s L_s i_{sd} + \omega_s M i_{rd} \quad (1.40)$$

$$V_{rd} = R_r i_{rd} + M p i_{sd} + L_r p i_{rd} - \omega_r M i_{sq} - \omega_r L_r i_{rq} = 0 \quad (1.41)$$

$$V_{rq} = R_r i_{rq} + M p i_{sq} + L_r p i_{rq} + \omega_r M i_{sd} + \omega_r L_r i_{rd} = 0 \quad (1.42)$$

$$C_e = p_p M (i_{sq} i_{dr} - i_{sd} i_{rq}) \quad (1.43)$$

$$J p \Omega + f \Omega = C_e - C_r \quad \text{et} \quad \omega = p_p \Omega \quad (1.44)$$

On peut résoudre ces équations en exprimant les inconnues (i_{sd} , i_{sq} , i_{rd} , i_{rq} , Ω) en fonction des connues et des paramètres de la MAS et la charge mécanique (V_{sd} , V_{sq} , R_s , L_s , R_r , L_r , J , f et C_r), comme suit :

$$i_{sd} = \frac{1}{(R_s + p L_s)} \left(V_{sd} - M p i_{rd} + \omega_s L_s i_{sq} + \omega_s M i_{rq} \right) \quad (1.45)$$

Signal commandé

Signal de commande

Perturbation ou termes de couplage entre les axes (d) et (q) et stator/rotor

De la même manière, on trouve :

$$i_{sq} = \frac{1}{(R_s + p L_s)} (V_{sq} - M p i_{rq} - \omega_s L_s i_{sd} - \omega_s M i_{rd}) \quad (1.46)$$

$$i_{rd} = \frac{1}{(R_r + p L_r)} (V_{rd} - M p i_{sd} + \omega_r M i_{sq} + \omega_r L_r i_{rq}) \quad (1.47)$$

$$= \frac{1}{(R_r + p L_r)} (0 - M p i_{sd} + \omega_r M i_{sq} + \omega_r L_r i_{rq})$$

$$i_{rq} = \frac{1}{(R_r + p L_r)} (V_{rq} - M p i_{sq} - \omega_r M i_{sd} - \omega_r L_r i_{rd}) \quad (1.48)$$

$$= \frac{1}{(R_r + p L_r)} (0 - M p i_{sq} - \omega_r M i_{sd} - \omega_r L_r i_{rd})$$

$$\Omega = \frac{1}{f + J p} (C_e - C_r) \quad \text{et} \quad \omega = p_p \Omega \quad (1.49)$$

L'équation (1.45) peut être mise sous forme schéma fonctionnel fréquentiel (Laplace), comme indiqué par la figure suivante :

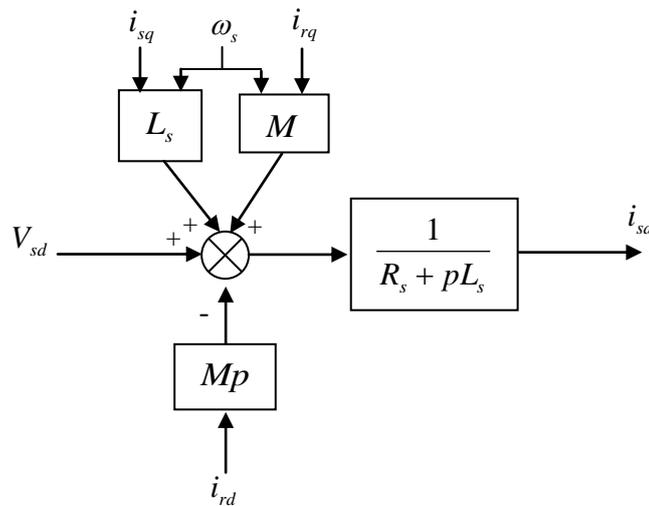


Figure 1.3 Schéma fonctionnel fréquentiel du modèle électrique statorique de la MAS selon l'axe (d) ($i_{sd} = f(V_{sd}, i_{rd}, i_{sq}, i_{rq}, \omega_s)$)

La perturbation ou les termes de couplage entre les axes (d) et (q) et stator/rotor dans l'équation électrique statorique selon l'axe (d) ($-Mp i_{rd}$, $+\omega_s L_s i_{sq}$, $+\omega_s M i_{rq}$) existent naturellement dans la machine asynchrone et ne peuvent pas être éliminés. Leur effet peut être éliminé ou compensé au niveau de la partie commande de la machine asynchrone comme l'indique la figure suivante. Le problème qui réside dans ce modèle est que certaines variables dans les termes de couplage sont difficilement mesurables ou accessibles tels que les courants rotoriques (i_{rd} , i_{rq}) notamment dans le cas de MAS à cage d'écureuil. Un deuxième modèle sera présenté présentant des termes de couplage compensables avec des variables accessibles et mesurables.

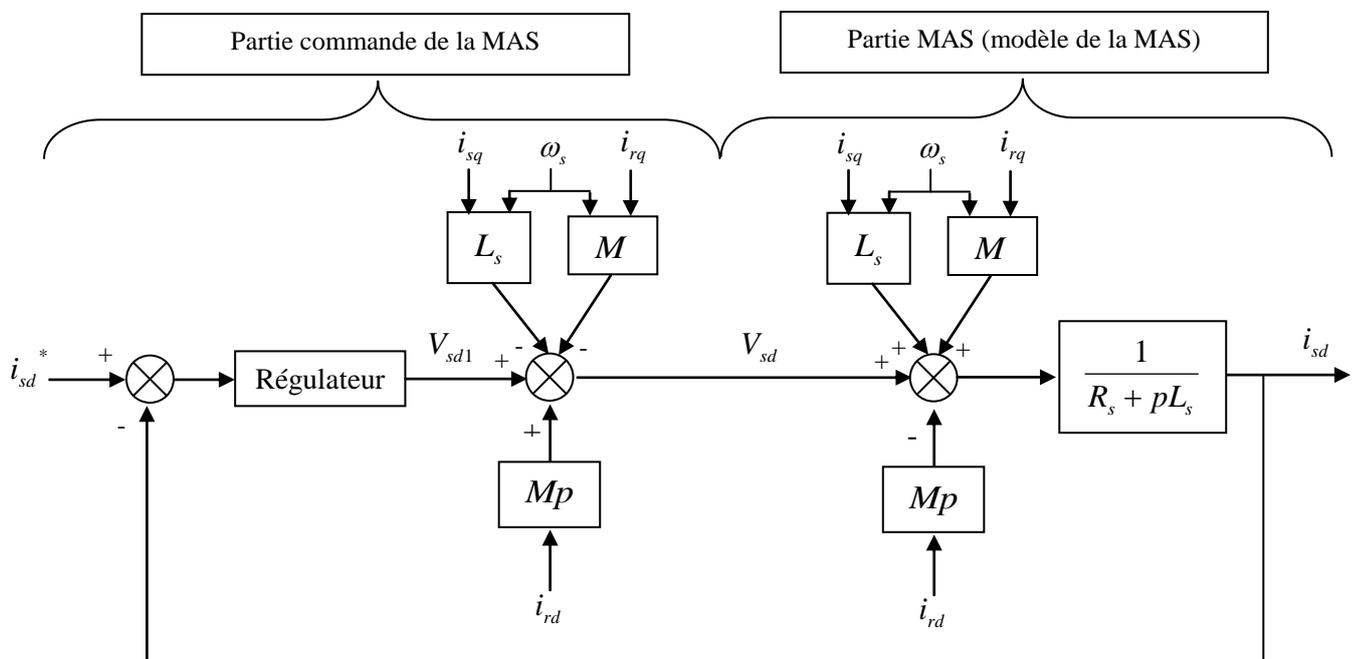


Figure 1.4 Principe de compensation de l'effet des termes de couplage entre les axes (d) et (q) et stator/rotor dans l'équation électrique statorique selon l'axe (d) (certaines variables difficilement accessibles (i_{rd} , i_{rq}))

La même chose est applicable pour les autres équations électriques statorique et rotorique.