Table des matières

1 Espaces des applications lineaires **1**

1.1 Applications linéaires 1

1.1.1 Rappel 1

1.1.2 Les applications linéaires continues 1

1.2 Formes linéaires 3

1.2.1 Prolongement des applications linéaires continues 4

1.2.2 Théorème de réprésentation de Riesz 5

1.3 Quelques exercices corrigés 6

Chapitre 1

Espaces des applications lineaires

Nous présentons dans ce chapitre les résultats principaux sur les applications linéaires (Définition, la continuité, formes linéaires, isomorphisme isométrique, prolongement des applications linéaires continues...).

1.1 Applications linéaires

1.1.1 Rappel

Soit $(E, N_1), (F, N_2)$ deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{k}$ (en pratique $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit f une application de E dans F. On rappelle qu'une application f de E dans F est dite **linéaire** si pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Notation 1.1.1 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{k}$. On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

1.1.2 Les applications linéaires continues

Proposition 1.1.1 *Soit $f \in L(E, F)$. Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes.*
1°/ $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E,$
2°/ f est continue sur E,

3°/ f est continue en 0,

4°/ f est bornée sur la boule unité fermée,

5°/ f est bornée sur la sphère unité.

Preuve. $1° \Rightarrow 2°$: Par linéarité de f, on a $f(y) - f(x) = f(y-x)$. Donc,

$$\forall (x,y) \in E^2, \|f(y) - f(x)\|_F \leq M \|y - x\|_E .$$

Donc f est lipschitzienne donc continue.

$2° \Rightarrow 3°$: Trivial.

$3° \Rightarrow 4°$: Comme f est continue au point 0_E, on a :

$$(\exists \alpha > 0)(\forall x \in E) \ \ \|x\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x)\|_F < 1$$

Soit $x \in \overline{B}(0,1)$ alors: $\left\|\frac{\alpha}{2}x\right\| = \frac{\alpha}{2} < \alpha$ donc $\|f(x)\|_F < \frac{2}{\alpha}$.

$4° \Rightarrow 5°$: Trivial.

$5° \Rightarrow 1°$: Notons M une borne de f restreinte à la sphère unité. Si $x \neq 0$, le point $\dfrac{x}{\|x\|_E}$ appartient à la sphère unité. En utilisant la linéarité de f et le fait que f est bornée par M sur la sphère unité, on obtient donc

$$\|f(x)\|_F \leq \|x\|_E \left\| f(\frac{x}{\|x\|_E}) \right\|_F \leq M \|x\|_E$$

■

Définition 1.1.1 *Soit $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ la plus petite constante M telle que*

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E .$$

Puisque $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \inf\{M \text{ réel} > 0/\forall x \in E : \|f(x)\|_F < M. \|x\|_E\}$, et comme la borne inférieure est le plus grand des minorants, on a l'inégalité fondamentale suivante :

$$\forall x \in E : \ \|f(x)\|_F < \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} . \|x\|_E$$

et on a aussi

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E \ et \ \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$$

Proposition 1.1.2 *Soient E, F et G trois e.v.n, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ et l'on a l'inégalité suivante :*

$$\|g \circ f\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)}$$

Proposition 1.1.3 *Soit $(E, \|.\|_E)$ un e.v.n. et $(F, \|.\|_F)$ un Banach. Alors $(\mathcal{L}(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ est un espace de Banach.*

Remarque 1.1.1 *En particulier, si $F = \Bbbk$, alors $\mathcal{L}(E, \Bbbk)$ est toujours Banach.*

1.2 Formes linéaires

Définition 1.2.1 *$\mathcal{L}(E, \Bbbk)$ est noté E^* et est appelé le dual de E. C'est toujours un espace de Banach.*

Notons que E^* est le dual topologique de E, et est strictement plus petit que le dual algébrique, l'espace de toutes les formes linéaires, de E, du moins si E est de dimension infinie.

La norme de $T \in E^*$ est donc définie par:

$$\|f\|_{E^*} = \|f\|_{\mathcal{L}(E,\Bbbk)} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E \text{ et } \|x\|_E = 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)|$$

Notation 1.2.1 *On utilise souvent la notation*

$$\langle T, x \rangle = T(x) = Tx.$$

Théorème 1.2.1 *Soit f une forme linéaire sur $(E, \|.\|_E)$. Alors*

$$f \text{ est continue } \Leftrightarrow \ker f \text{ est fermé}$$

Preuve. Voir les exercices. ■

Proposition 1.2.1 *L'application linéaire $T : X \to Y$ est isomorphisme si et seulement si T est bijective et qu'il existe deux constantes $0 < \alpha < \beta < \infty$ telles que*

$$\alpha \|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq \beta \|x\|_X \text{ pour tout } x \in X$$

Preuve. Soit $T : X \to Y$ est isomorphisme. La continuité de T^{-1} permet d'ecrire

$$\left\|T^{-1}(y)\right\|_Y \leq \left\|T^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|y\|_Y \text{ pour tout y} \in Y$$

et donc

$$\|x\|_X \leq \left\|T^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|T(x)\|_Y \text{ pour tout x} \in X$$

Alors par la continuité de T, on obtient

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}} \|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \text{ pour tout x} \in X.$$

D'où le résultat avec $\alpha = \frac{1}{\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}$ et $\beta = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.
Inversement, si ona cette inégalité, alors T est continue et $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \beta$ et T^{-1} est continue et $\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{1}{\alpha}$ puisque

$$\alpha \|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y \Rightarrow \alpha \left\|T^{-1}(y)\right\|_X \leq \|y\|_Y \text{ pour tout } y \in Y.$$

■

1.2.1 Prolongement des applications linéaires continues

Théorème 1.2.2 *Soit* $(X, \|.\|_X)$ *un e.v.n,* $(Y, \|.\|_Y)$ *un e.v.n. complet et* E *un s.e.v. dense de* X*. Soit* $T \in \mathcal{L}(E, Y)$*. Il existe une unique application* $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ *qui prolonge* T *sur* X*.*
De plus, on a

$$\left\|\tilde{T}\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,Y)}.$$

Preuve. Puisque T est uniformément continue, d'après le Théorème précédent, il existe une unique application continue$\tilde{T} : X \to Y$ prolongeant T. Montrons que $\tilde{T}$ est linéaire et $\left\|\tilde{T}\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,Y)}$.
Soient $x, y \in X$, $\alpha \in \Bbbk$. Comme $\bar{E} = X$, il existe deux suites (x_n) et (y_n) dans E tel que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ et } y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

d'après la continuité de $\tilde{T}$ on a

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\alpha x + \beta y) &= \tilde{T}(\lim_n(\alpha x_n + \beta y_n)\\
&= \lim_n \tilde{T}(\alpha x_n) + \lim_n \tilde{T}(\beta y_n)\\
&= \alpha \lim_n \tilde{T}(x_n) + \beta \lim_n \tilde{T}(y_n)\\
&= \alpha T(x) + \beta T(y)
\end{aligned}$$

donc $\tilde{T}$ est linéaire. D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathcal{L}(E,Y)} &= \sup_{x\in E \text{ et } \|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_Y\\
&= \sup_{x\in E \text{ et } \|x\|_E \leq 1} \left\|\tilde{T}(x)\right\|_Y\\
&\leq \sup_{x\in X \text{ et } \|x\|_X \leq 1} \left\|\tilde{T}(x)\right\|_Y = \left\|\tilde{T}\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.
\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Pour tout $n \geq 1$, On a

$$\left\|\tilde{T}(x_n)\right\|_Y = \|T(x_n)\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,Y)} \|x_n\|_E$$

donc

$$\lim_n \left\|\tilde{T}(x_n)\right\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,Y)} \lim_n \|x_n\|_E$$

et comme la norme est continue, alors

$$\left\|\tilde{T}(x)\right\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,Y)} \|x\|_X$$

ce qui donne

$$\left\|\tilde{T}\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,Y)} \tag{1.2.2}$$

les inégalités (1.2.1) et (1.2.2) donnent que

$$\left\|\tilde{T}\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,Y)}$$

■

1.2.2 Théorème de réprésentation de Riesz

Théorème 1.2.3 *Soit H un espace de Hilbert et soit $L \in H^*$(une forme linéaire). Alors un unique élément $a \in H$ tel que*

1- $L(x) = \langle a, x\rangle$ *pour tout* $x \in H$

2- $\|L\|_{H^*} = \|a\|_H$.

Autrement dit l'application

$$\begin{array}{rccl} \psi: & H & \to & H^* \\ & a & \to & \psi(a) \;= L \text{ avec } L(x) = \langle x, a\rangle \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique.

Exemple 1.2.1 *Soient* $H = L^2(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *et* $g \in L^2(\Omega)$ *fixé. Soit aussi l'opérateur défini par*

$$L_g : f \to \int_\Omega fg$$

est linéaire et borné. En fait, les inégalités de Schwarz donnent

$$|L_g(f)| = \left|\int_\Omega fg\right| \leq \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_H \|g\|_H$$

pour que $L_g \in H^*$ *et* $\|L_g\|_{H^*} \leq \|g\|_H$ *. plus de ça si on prend* $f = g$*, on trouve*

$$|L_g(g)| = \left|\int_\Omega g^2\right| = \|g\|_H^2 \leq \|L_g\|_{H^*} \|g\|_H$$

ce qui donne

$$\|g\|_H \leq \|L_g\|_{H^*}$$

Conclusion: $\|L_g\|_{H^*} = \|g\|_H$.

De même on a les résultats essentiels suivants :

Soit μ une mesure positive et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

♣ $L^q(\mu)$ est le dual de $L^p(\mu)$ pour $1 < p < \infty$.

♣ $L^\infty(\mu)$ est le dual de $L^1(\mu)$ lorsque μ est σ-finie.

1.3 Quelques exercices corrigés

Exercice 1.3.1 *Soit* $X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *et* $Y = C^1([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme uniforme* $\|.\|_\infty$ *et soit l'opérateur définie par:*

$$\begin{array}{rccl} T: & X & \to & Y \\ & f & \to & T(f) = \int_0^x f(t)dt, \end{array}$$

pour tout $x \in [0,1]$*. Montrer que* T *est un opérateur continu et calculer sa norme?*

Solution 1.3.1 *Il est facile de voir que l'opérateur est linéaire .*
Pour tout $f \in X$ *et* $x \in [0,1]$

$$|T(f)| \leq \|f\|_\infty \int_0^x dt = x \|f\|_\infty .$$

En prenant la borne supérieur lorsque $x \in [0,1]$, *on trouve*

$$|T(f)| \leq \|f\|_\infty ,$$

ce qui donne

$$\|T\| \leq 1. \tag{1.3.1}$$

Considéron $f_0 \in X$ *définie par* $f_0(t) = 1$ *pour tout* $t \in [0,1]$. *On a* $\|f_0\|_\infty = 1$.

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|T(f)\|_F \geq \|T(f_0)\|_\infty = 1 \tag{1.3.2}$$

(1.3.1) et (1.3.2) donnent

$$\|T\| = 1.$$

Exercice 1.3.2 *Soint* $E = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \colon (1 + x^2) |f(x)|$ *soit bornée*$\}$. *On pose*

$$N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + x^2) |f(x)|$$

1) Vérifier que N *est une norme.sur* E

2) Montrer que la forme linéaire

$$\begin{array}{cccc} L : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \to & L(f) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx \end{array}$$

est continue et calculer sa norme.

Solution 1.3.2 *Il est facile de montrer que* N *est une norme et* L *est une forme linéaire .*
Pour tout $f \in E$

$$|L(f)| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+x^2)}{(1+x^2)} |f(x)| \, dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + x^2) |f(x)| \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)} \leq \pi N(f)$$

On conclu que L *est continue et plus*

$$\|L\| \leq \pi.$$

En outre, la fonction $f_0(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$ *vérifant:*

$$N(f_0) = 1$$

et

$$|L(f_0)| = \pi.$$

Ce qui permet que

$$\|L\| = \pi.$$

Exercice 1.3.3 *Soit* H *un espace normé et* $f \in L(E, \mathbb{k})$. *Montrer que*

$$f \text{ est continue } \Leftrightarrow Ker(f) \text{ est fermé}$$

Exercice 1.3.4 $(\Rightarrow)$ *Si* f *est continue alors l'ensemble* $kerf$ *est fermé car* $kerf$ *est image réciproque du fermé* $\{0\}$ *de* $\mathbb{k}$.
$(\Leftarrow)$ *Supposons que* $kerf$ *est fermé.* C^{kerf} *est un ouvert non vide. Soit* $x_0 \in C^{kerf}$ *supposons par exemple* $f(x_0) < 0$. *Alors il existe un réel positif* r *tel que*

$$B(x_0, r) \subset C^{kerf}.$$

Montrons que

$$\forall x \in B(x_0, r) : f(x) < 0.$$

Supposons que, il existe $x_1 \in B(x_0, r)$ *tel que* $f(x_1) > 0$. *Comme* $B(x_0, r)$ *est convexe, alors pour tout* $t \in [0, 1]$ *l'élément* $x_t = (1-t)x_1 + tx_0$ *appartient à* $B(x_0, r)$ *qui entraine que*

$$f(x_t) \neq 0$$

pour la valeur

$$t = \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)},$$

on a

$$f(x_t) = 0$$

ce qui absurde car $\forall x \in B(x_0, r) : f(x) < 0$.
Comme $\forall x \in B(x_0, r) : f(x) < 0$, *alors on déduit que*

$$f(x_0 + rz) = f(x_0) + rf(z) < 0 \ \forall z \in B(0, 1)$$

D'ou

$$f(z) < -\frac{1}{r}f(x_0)$$

Par conséquent

$$\|f\| < -\frac{1}{r}f(x_0),$$

donc f est continue.

Exercice 1.3.5 *Soient $T : L^2([-1,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par*

$$T(f) = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx$$

1) Montrer que T est une forme linéaire continue et calculer sa norme (utiliser la fonction f_0 définie par $f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si $-1 \leq t < 0$ et $f_0(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ si $0 \leq t \leq 1$.)
2) Déterminer une fonction $g \in L^2([-1,1])$ telle que

$$T(f) = \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt, \text{ pour toute } f \in H$$

3) Montrer que $\ker T = [g]^{\perp}$ (où $[g]$ est le sous-espace engendré par la fonction g)
4) Déterminer la projection de l'application identique id sur $\ker T$.

Solution 1.3.3 *1) La linéairité de T est évidente. En plus*

$$\begin{aligned} |T(f)| &= \left| \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx \right| \\ &\leq \int_{-1}^{0} |f(x)|\,dx + \int_{0}^{1} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$(Cauchy-schwarz), on trouve

$$|T(f)| \leq \|f\|_2 \left\|1_{[-1,1]}\right\|_2 .$$

où

$$\left\|1_{[-1,1]}\right\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},$$

donc

$$|T(f)| \leq \sqrt{2}\,\|f\|_2 ,$$

ce qui montre que T est continue et assure que

$$\|T\| \leq \sqrt{2}.$$

En outre, la fonction f_0 vérifant:

$$\|f_0\|_2 = 1$$

et

$$|T(f_0)| = \sqrt{2}.$$

Ce qui permet que

$$\|T\| = \sqrt{2}.$$

2) La fonction g cherchée est: $f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ si $-1 \leq t < 0$ et $f_0(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ si $0 \leq t \leq 1$.)

$$g(x) = \begin{cases} 1, -1 \leq x < 0 \\ -1, 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

3) On a

$$f \in Ker(T) \Leftrightarrow T(f) = 0 \Leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0 \Leftrightarrow f \in [g]^{\perp}.$$

Donc

$$Ker(T) = [g]^{\perp}.$$

4) Comme T est continue, donc $Ker(T)$ est un sous espace vectoriel fermé de $L^2([-1,1])$. Alors on peut appliquer le théorème de la projection, En notant que $P_{Ker(T)}(id) = h$. Il vient

$$id - h \in (Ker(T))^{\perp} = [g]^{\perp\perp} = [g]$$

c'est à dire

$$id - h = \lambda g$$

et comme h est orthogonal sur g, on obtient

$$0 = \langle h, g \rangle = \langle id - \lambda g, g \rangle = \langle id, g \rangle - \lambda \langle g, g \rangle$$

Finalement, on trouve

$$g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, -1 \leq x < 0 \\ x - \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 1. \end{cases}.$$