- برنامج الاهتزازات والامواج:
بشكل عام:

١- مقدمة رياضية
- القسم الاول الاهتزازات
- مدخل للحركة الاهتزازية
- الاهتزازات الحرة غير المخمدة درجة حرية واحدة
- " " " المخمدة
- " " القسرية لنظام ذو درجة حرية واحدة
- تحليل فورييه للحركة الاهتزازية
- الاهتزازات الحرة لنظام متعدد درجات الحرية
- القسم الثاني: انتشار الامواج
- عموميات حول ظواهر الانتشار
- انتشار الامواج العرضية
- " " الطولية
- القسم الثالث: الامواج الكهرومغناطيسية:

المراجع: نظرية الاهتزازات والأمواج الميكانيكية. د. هشام جبر
ق 8 / 28 / 364

- الميكانيك العام - الجزء الرابع.
الاهتزازات والأمواج أسس النظرية النسبية الخاصة
د. عبد الله موسى. ق 8 / 584.
- الاهتزازات والأمواج
بسام المعصراني. ف 8 / 277
-
THEory and problems of Mechanical
VIBRATIONS

- Formalisme De Lagrange et ossillations lineaires.

Rappel de cours, exercices et problemes avec solutions

Ali Kamel Zine.

office des Publications Universitaires

قسم الجذع المشترك للعلوم الدقيقة والتكنولوجيا والإعلام الآلي.

مقياس TP 2080 - الاهتزازات والأمواج.

- مقدمة رياضية

I - المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية ذات معاملات ثابتة

1 - تعريف: تكون المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية أنها خطية إذا كانت من الشكل:

$$y'' + py' + qy = f(t) \longrightarrow (1)$$

حيث: $p, q, f(t)$ هي توابع بدلالة الزمن أو ثوابت و $f(t)$ هو الطرف الثاني للمعادلة التفاضلية (1)

* إذا كانت $f(t) = 0 \longrightarrow$ المعادلة (1) متجانسة

$f(t) \neq 0 \longrightarrow$ المعادلة (1) غير متجانسة

(1) الحالة الأولى: $f(t) = 0$ المعادلة (1) تصبح

$$y'' + py' + qy = 0 \longrightarrow (2)$$

نضع

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

المعادلة رقم (2) تصبح:

$$(r^2 + pr + q)e^{rt} = 0$$

$$e^{rt} \neq 0 \Rightarrow r^2 + pr + q = 0 \longrightarrow (3)$$

المعادلة (3) تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية رقم (2)

حلها يعطى كما يلي:

إذا كان: r جذر المعادلة فإن $y(t) = e^{rt}$ حل، ومنه نميز الحالات التالية.

(أ) . $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ جذرين مختلفين $(r_1 \neq r_2)$

فإن حل المعادلة (3) يعطى بالشكل التالي:

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

مثال:

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

المعادلة المميزة

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

$$\Delta = 49 - 48 = 1 > 0$$

$r_1 = 3$, $r_2 = 4 \Rightarrow y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t}$ ومنه

ب) r_1 و r_2 ∈ $\mathbb{R}$ جذرين متساويين $(r_2 = r_1)$

الحل يكون من الشكل $y(t) = e^{rt}(c_1 t + c_2)$

مثال:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

المعادلة المميزة $r^2 - 4r + 4 = 0$

لدينا $\Delta = 4 - 4 = 0$ ومنه الحل يكون: $y(t) = e^{2t}(c_1 t + c_2)$

ج) r_1 و r_2 ∈ $\mathbb{C}$ (أعداد مركبة) أي: $r_1 = \alpha + i\beta$ ، $r_2 = \alpha - i\beta$

الحل يكون من الشكل: $y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t)$

مثال:

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

لدينا: $\Delta' = -9 = (3i)^2 \Rightarrow r_1 = -1 - 3i$, $r_2 = -1 + 3i$

الحل يكون من الشكل: $y(t) = e^{-t}(c_1 \cos 3t - c_2 \sin 3t)$

الحالة الثانية: $f(t) \neq 0$. المعادلة التفاضلية تصبح $y'' + py' + qy = f(t)$

الحل يكون من الشكل: $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

حيث: $y(t)$ الحل العام

$y_p(t)$ الحل الخاص.

وفي هذا المقياس سنتعرض إلى الحالات من الشكل:

$$f(t) = P_n(t)\cos\alpha t + Q_m(t)\sin\alpha t$$

أ) - إذا كان $(\mp i\alpha)$ ليس جذر للمعادلة المميزة

فإن: $y_p(t) = S_M(t)\cos\alpha t + T_M(t)\sin\alpha t$

$M = Max(n, m)$

ب) إذا كان . $(\mp i\alpha)$ جذر للمعادلة المميزة

فإن $y_p(t) = t\left[S_M(t)\cos\alpha t + T_M(t)\sin\alpha t\right]$

مثال:

$$y'' + 10y' + 2y = 20\cos 2t$$

$y'' + 10y' + 2y = 0 \Rightarrow r^2 + 10r + 2 = 0$ (معادلة مميزة)

$\Delta' = 23 \Rightarrow r_1 = -5 + \sqrt{23}, \quad r_2 = -5 - \sqrt{23}$

ومنه

$$y_0(t) = c_1 e^{(-5+\sqrt{23})t} + c_2 e^{(-5-\sqrt{23})t}$$

لدينا:

$f(t) = P_0(t)\cos 2t + Q_0(t)\sin 2t \Leftarrow f(t) = 20\cos 2t$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_0(t) = 20 \\ Q_0(t) = 0 \end{cases}$$

لدينا: $\mp 2i$ ليس حل المعادلة المميزة.

$y_p(t) = S_0(t)\cos 2t + T_0(t)\sin 2t$.

$y_p(t) = A\cos 2t + B\sin 2t \longrightarrow (1)$

$y'' + 10y' + 2y = 20\cos 2t \longrightarrow (2)$

$(1) \Rightarrow 10y'_p(t) = -20A\sin 2t + 20B\cos 2t$

$(1) \Rightarrow y''_p(t) = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$

$(1) \Rightarrow 2y_p(t) = 2A\cos 2t + B\sin 2t$

بالتعويض ثم (أ).(ب).(ج) في الحل (2) نتحصل على:

$20\cos 2t = (20B - 2A)\cos 2t + (-20A - 2B)\sin 2t$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20 = 20B - 2A \Rightarrow 10 = 10B - A \\ 0 = -20A - 2B \Rightarrow B = -10A \end{cases}$$

ومنه نستخلص:

$A = \frac{-10}{101} \Rightarrow B = \frac{100}{101}$

إذن الحل يعطى:

$y_p(x) = \frac{-10}{101}\cos 2t + \frac{100}{101}\sin 2t$

إذن الحل الكلي أو الإجمالي للمعادلة يكون :

$$y(t)=y_0(t)+y_p(t)$$

$$y(t)=c_1 e^{(-5+\sqrt{23})t}+c_2 e^{(-5-\sqrt{23})t}-\frac{10}{101}\cos 2t+\frac{100}{101}\sin 2t$$

c_1 ، c_2 نجدهما بتطبيق الشروط الابتدائية .

مثال :

$$y''+y=4\cos t$$

المعادلة المميزة : $r^2+1=0 \Rightarrow r_1=i \,,\, r_2=-i$

$$y_0=c_1\cos t+c_2\sin t$$

$y_p(t)=?$ ومنه $f(t)=4\cos t$

$$f(t)=P_0(t)\cos t+Q_0(t)\sin t$$

بالمقارنة نجد $\begin{cases} P_0(t)=4 \\ Q_0(t)=0 \end{cases}$

في هاته الحالة $\mp i$ جذر للمعادلة المميزة

ومنه $y_p(t)=t\left(S_0(t)\cos t+T_0(t)\sin t\right)$

$$=t\left(A\cos t+B\sin t\right)=At\cos t+Bt\sin t .$$

$$y'=A\cos t-At\sin t-B\sin t+Bt\cos t .$$

$$y''=-A\sin t-A\sin t-At\cos t+B\cos t-Bt\sin t .$$

$$y''+y=-2A\sin t+2B\cos t=\underline{4}\cos t$$

بالمقارنة نجد

$$2B=4\Rightarrow B=2$$

$$-2A=0\Rightarrow A=0$$

إذن الحل يعطى $y_p(t)=2t\sin t$

الحل الإجمالي للمعادلة يعطى بالشكل :

$$y(t)=2t\sin t+c_1\cos t+c_2\sin t$$

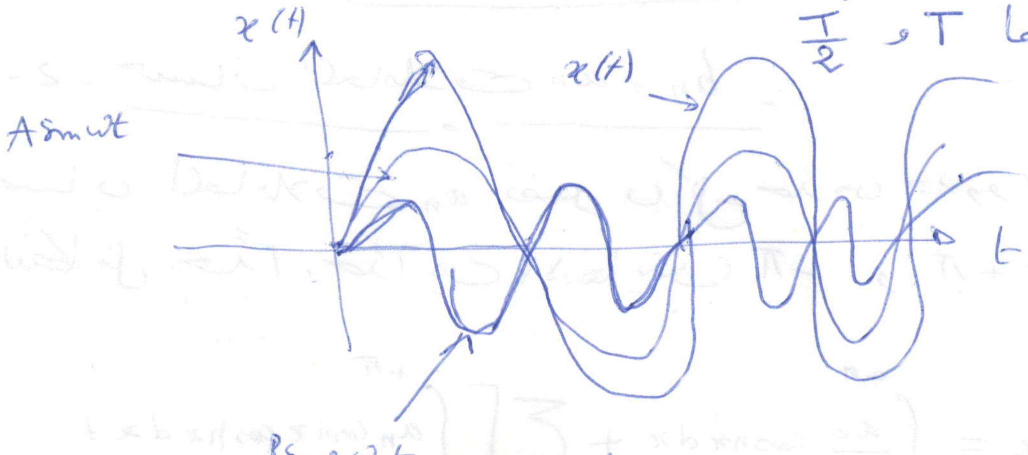
c_1 ، c_2 هما ثوابت الحركة نجدهما بتطبيق الشروط الابتدائية .

تحليل فورييه للحركة الاهتزازية

تمهيد: لقد ذكرنا من قبل أن الحركة الجيبية ما هي إلا حالة خاصة من الحركات الاهتزازية الدورية.

نأخذ مثلاً الحركة المعرفة بالعلاقة التالية: $x(t) = A \sin \omega t + B \sin 2\omega t$

تمثل $x(t)$ تداخل حركتين توافقيتين لهما نفس الاتجاه x، تواترهما ω و 2ω ودورهما T و $\frac{T}{2}$



- من خلال المنحنى البياني للحركة المحصلة يتبين أن $x(t)$ دوري ولكنه ليس جيبياً
- إذا أضفنا إلى دالة $x(t)$ حدوداً من الشكل $B \sin 3\omega t$، $\sin 4\omega t$ .... $\sin n\omega t$

فإننا نحصل على حركة $x(t)$ دورية، دورها T وشكلها تتعلق بعدد الدالات التي جمعت:

الخلاصة: أنه بجمع حركات جيبية تواتراتها مضاعفات لتواتر أساسي وسعاتها مختارة اختياراً مناسباً يمكن الحصول على أية دالة دورية تقريباً والعكس صحيح أيضاً - ويؤلف ما يسمى نظرية "Fourier" والتي تؤكد أنه يمكن لدالة دورية $f(t)$ دورها $T = \frac{2\pi}{\omega}$ أن تكتب بشكل مجموع دوال جيبية بالشكل التالي:

$$x(t) = f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_n \cos n\omega t + \dots b_1 \sin \omega t + \dots b_n \sin n\omega t$$

ويدعى التواتر ω بالتواتر الأساسي وتدعى التواترات 2ω ، 3ω و $n\omega$ بالمدروجات (التوافقيات) Les harmoniques

1-1- تمثيل فوريي : لتكن الدالة $f(x)$ الدورية بين $-\pi$ و $+\pi$ والمستمرة أو التي تتضمن في مجالها هذا عدد محدودًا من الانقطاعات أو النهايات العظمى والصغرى وبحيث أن التكامل: $\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|\,dx$
قيمة محدودة إذن يمكن كتابة:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx} \longrightarrow (1)$$

1-2- حساب المعاملات a_n و b_n :

لحساب المعاملات a_n نضرب كل حد من حدود المعادلة (1) في: $\cos nx$ ونكامل حدًا حدًا بين النهايتين $-\pi$ و $+\pi$ فنحصل على:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx\,dx}_{0} + \sum_{n}\Big[\underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} a_n \cos nx \cos nx\,dx}_{\neq 0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} b_n \sin nx \cos nx\,dx}_{\frac{1}{2}\sin 2nx \to 0}\Big]$$

وبما أن: $\cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2}$ فيكون لدينا

$$(\alpha) \longrightarrow \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{1+\cos 2nx}{2}\right)dx = a_n \pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx}$$

- يتم حساب b_n بنفس الطريقة وذلك بأن نضرب كل حد من حدود المعادلة (1) ب $\sin nx$
وباختصار يكون لدينا:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \varphi(t)\sin n\omega t\, dt.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{E_0}{T} t \sin n\omega t\, dt = \frac{-2E_0}{\underset{2\pi}{n\omega T}}\int_0^T t\, d(\cos n\omega t)\, dt$$

$$b_n = \frac{-E_0}{n\omega T}\Big[t\cos n\omega t\Big]_0^T = \frac{-E_0}{\pi n} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \underbrace{\frac{E_0}{2L}}_{q_0(t)} - \frac{E_0}{\pi L}\sum \frac{1}{n}\sin n\omega t$$

$q_n(t)$.

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad q_0 = \frac{E_0}{2L\omega_0^2}$$

$$q_n(t) = q_{mn}\sin(n\omega_n t + \theta_n)$$

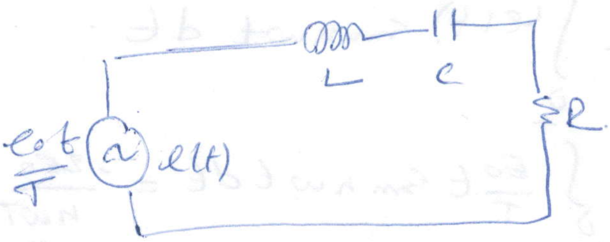
$$q_{mn} = \frac{-\frac{E_0}{\pi L}\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{(\omega_0^2 - (n\omega)^2)^2 + (2\gamma n\omega)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\theta_n = \frac{-2\gamma(n\omega)}{\omega_0^2 - (n\omega)^2}$$

$$q(t) = \frac{E_0}{2L\omega_0^2} + \sum_{n=1} q_{mn}\sin(n\omega t + \theta_n).$$

(4)

حل المثال :



$V_L = L\frac{dI}{dt}$

$I = \frac{dq}{dt}$

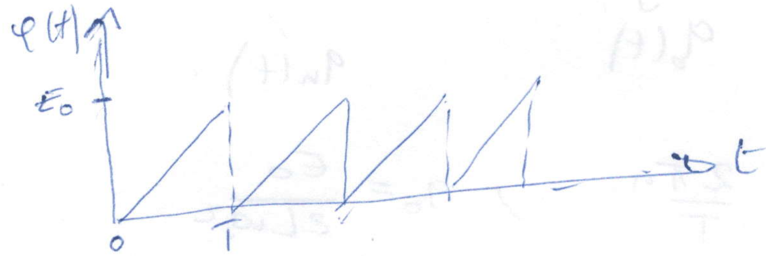
$0 < t < T \qquad V_L + V_R + V_C = \varphi(t) \qquad V_L = L\ddot{q}$

$V_R = RI = R\frac{dq}{dt} \qquad V_C = \frac{1}{C}$

$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \varphi(t) \Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}\varphi(t)$

$\frac{R}{L} = 2\gamma, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow \ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L}\varphi(t)$

$\varphi(t) = \frac{E_0}{T}t, \; 0 \leq t < T$



$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t.$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_0}{T}t\,dt = \frac{E_0}{T^2}\int_0^T t\,dt = \frac{E_0}{T^2}\frac{t^2}{2}\Big|_0^T$

$$\boxed{a_0 = \frac{E_0}{2}}$$

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \varphi(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{E_0}{T}t\cos n\omega t\,dt.$

$= \frac{2}{T}\left[\frac{E_0 t}{T\,n\omega}\cancelto{0}{\sin n\omega t}\right]_0^T - \frac{2}{T}\int_0^T \frac{E_0}{n\omega}\sin n\omega t\,dt$

$\Rightarrow a_n = \frac{2E_0}{(n\omega)^2}\left(\cos n\omega t\right)_0^T$

$\Rightarrow a_n = 0$

- ينتج الحد الأول من النشر بإجراء التكامل على طرفي المعادلة (2) من أجل $n=0$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} 2\,dx = 2a_0\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\pi = \frac{T\omega}{2}$

1-3- عبارة المعاملات في حالة الزمن المتحول:

إذا كانت $f(t)$ دورية في مجال يساوي T فيمكن إذن جعل التعابير $-\frac{T}{2}$ و $+\frac{T}{2}$ ، التفسير عن النشر بدلالة الخط المثلثي ωt بين $-\pi$ و $+\pi$ في المجال المفسر نظرا لأن $\omega = \frac{2\pi}{T}$

نضع: $x=\omega t$ يصبح لدينا: مثلا:

أو أيضا: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, d(\omega t)$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\, dt$$

ملاحظات: - يمثل $\frac{a_0}{2}$ متوسط $f(t)$ (القيمة الوسطية) خلال دور واحد.

- إذا كانت $f(t)$ زوجية في المجال المذكور فإن المعاملات $b_n=0 \Leftarrow$

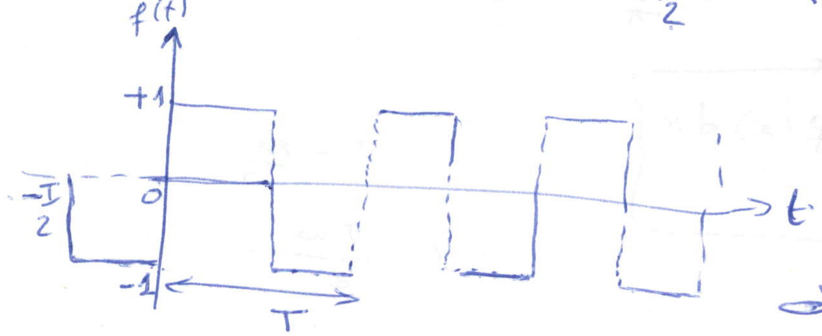
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t.$$

- إذا كانت $f(t)$ فردية في المجال المذكور فإن المعاملات $a_n=0$ (كما في ذلك a_0)

$$f(t) = \sum^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

مثال أنشر على طريقة فوريي الدالة المربعة المعرفة كما يلي

$$f(t) = \begin{cases} +1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$$



نلاحظ:

$$f(-t) = -f(t)$$

⇐ الدالة فردية

⇐ $a_n = 0$ (بما في ذلك a_0)

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-1)\sin n\omega t\,dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}(+1)\sin n\omega t\,dt$$

علماً أن $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0} - \frac{2}{T}\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

$$b_n = \frac{2}{n(\omega t)}\left[\left(1 - \cos\frac{n\omega T}{2}\right) - \left(\cos\frac{n\omega T}{2} - 1\right)\right] = \frac{2}{n(\omega T)}\left[2 - 2\cos\frac{n\omega T}{2}\right]$$

$$b_n = \frac{4}{n(\omega T)}\left[1 - \cos\frac{n\omega T}{2}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) \Rightarrow$$

$$b_n = \begin{cases} b_{2p} = 0 & \text{إذا كان } n \text{ زوجيا} \\ b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi} & \text{إذا كان } n \text{ فرديا} \end{cases}$$

و يكون النشر عندئذ كما يلي:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1} + \cdots\right]$$