المحاضرة رقم 02 — قياس TP01

مقدمة: لقد ساهم علم الاهتزازات في توضيح مفهوم المادة وأسرارها في كون سمته الحوادث الاهتزازية ابتداءً من الذرة وانتهاءً بالمجرات، وكذلك يشكل علم الاهتزازات القاسم المشترك لأكثر من فروع الفيزياء و تقنياتها، فمحرك النواس اهتزازية و النقل الحلقة ينابض له حركة اهتزازية، وكذلك الذرات في الجسم الطبي تهتز أيضا و بما أن الامواج عبارة عن اهتزازات منتشرة في الزمان المكان فكذلك هي الأخرى لها أهميتها الكبرى في الكثير من مستوى

دراسة الحركة التوافقية البسيطة تستدرج دراسة معادلة تفاضلية هذه المعادلة التفاضلية نجدها مشتركة بين كثير من الظواهر مثل اهتزاز الشحنات في دارة كهربائية وكذلك اهتزاز الالكترونات في ذرة والتي تولد أمواج ضوئية الخ... تفاضلية تشابهم ولهذا أصبح حل هذه الظواهر وغيرها يخضع لهذه المعادلة بالتفصيل مهمة جدا:
دراسة الحركة التوافقية البسيطة بالتفصيل مهمة جدا:

الفصل الأول: الاهتزازات الحرة غير المتحدة
درجة حرية واحدة

تمهيد: تعني بالاهتزازات الحرة تلك الاهتزازات الناجمة عن ازاحة النظام عن وضع اتزانه او اكتساب احدى نقاطه المادية سرعة ابتدائية ثم تركه يتذبذب بصورة حرة

1 - حل مسألة حركية:

1-1- الاحداثيات المعممة: كل نقطة مادية M يمكن تحديدها في الفضاء بواسطة ثلاث احداثيات أما بالنسبة لجسم الطلب فيتحدد موضعه بواسطة 3 احداثيات لحركة انتقالية بالاضافة الى زوايا أويلر الثلاث (Angles d'Euler) والمثالي لتحديد موضع جسم طلب يلزم توفر (6) احداثيات وهي من هنا فإن نظاما ميكانيكيا متكونا من P نقطة مادية و Φ جسم طلب يمكن تحديده بواسطة N احداثيا حيث

$$N = 3P + 6\Phi$$

و نسمى $N = q_1(t), q_2$ ...

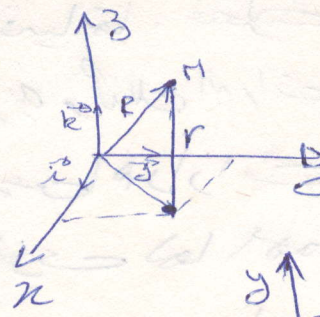
الاحداثيات المعممة (coordonnées generalisées) وتشمل ما يلي:

الاحداثيات الديكارتية أو الكرتيزية "coordonnées cartesiennes"

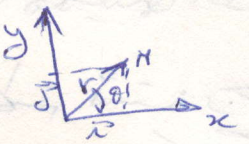
تعرف الاحداثيات الديكارتية نقطة M بالنسبة للمبدأ O بواسطة الشعاع $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

حيث $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



الاحداثيات القطبية "coordonnées polaires"



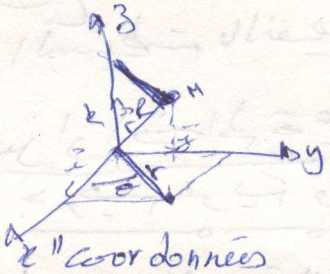
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\begin{pmatrix} R \\ \theta \end{pmatrix}$$

الاحداثيات الاسطوانية: "coordonnées cylindrique"

تعطى الاحداثيات الاسطوانية بواسطة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الذي له احداثيات التالية

$$\overrightarrow{OM} = r\begin{pmatrix} R \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OM} = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$$

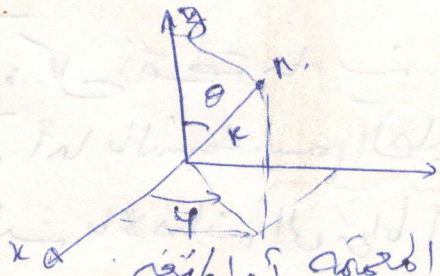


الاحداثيات الكروية: "coordonnées spheriques"

في الاحداثيات الكروية يكون الشعاع $\overrightarrow{OM} = r$ يعني: $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\begin{pmatrix} R \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$

و تسمى هذه الزوايا بزوايا أولر (Euler)

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = R\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + R\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + R\cos\theta\,\vec{k}$$



* إذا كان لدينا:

نظام من الدرجة الأولى:

فالاحداثية المعممة q_1 تمثل أحد تلك الاحداثيات المعممة أو المتغير:

q_1 (x position وضع
θ: angle الزاوية
q charge الشحنة
i intensité du courant شدة التيار
V d'dp فرق الكمون

$\left.\begin{matrix} q_1 = x \\ q_2 = y \end{matrix}\right\}$ نظام من الدرجة الثانية ⇐ عملية ذات متغيرين

النظام من الدرجة الثالثة ⇐ عدد ذات ثلاث متغيرات:

$$\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = y \\ q_3 = z \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} q_1 = r \\ q_2 = \theta \\ q_3 = \beta \end{cases}$$

- أما السرعات المعممة: "Vitesse generalisée" تكتب على الشكل الآتي:

في الميكانيك: $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

في الكهرباء: $\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt} = \dot{i}_1$

1-2- تعريف درجات الحرية: "degrés de liberté"

تعرف درجات الحرية الخاصة بنظام معين بأنها عدد الاحداثيات المستقلة التي تلزم لتحديد كل جزئيات أو أجزاء النظام تحديدا كاملا.

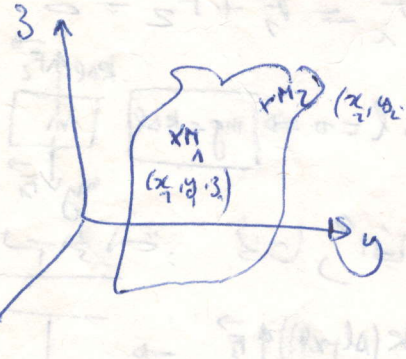
- أما عدد درجات الحرية لنظام ما فتتم معرفتها عن طريق العلاقة التالية:

$$\eta = N - r = 3P + 6\varphi - r$$

حيث r: هو عدد العلاقات بين الاحداثيات المعممة (هو عدد القيود)

N هو عدد معاملات الوضعية و η هو عدد درجات الحرية أو عدد درجات الحركية.

مثال: أوجد عدد درجات الحركية لنقطتين M_1 , M_2 الذين يتحركان على مساحة مستوية في حالة ما إذا بقيا البعد بينهما ثابت.



عدد معاملات الوضعية $N = 3 \times 2 = 6$

$\begin{cases} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \end{cases}$

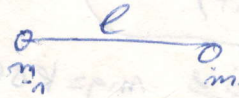
عدد العلاقات

$\begin{cases} f(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ f(x_2, y_2, z_2) = 0 \end{cases}$ معادلة السطح Equation de la surface

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = cte$$

$$\eta = N - r = 6 - 3 = 3$$

مثال 2: نظام ميكانيكي متكون من نقطتين ماديتين m_1 , m_2 مرتبطتين بقضيب طوله ℓ



عدد الاحداثيات المعممة $N = 6$

$m_1(x_1, y_1, z_1)$ و $m_2(x_2, y_2, z_2)$

عدد القيود: قيد واحد $r = 1$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = cte$$

$n = N - r = 5$: درجات الحرية ⇐

و بالتالي لوصف هذا النظام الميكانيكي يستوجب معرفة (05) دوال للزمن $q_1(t) - q_5(t)$

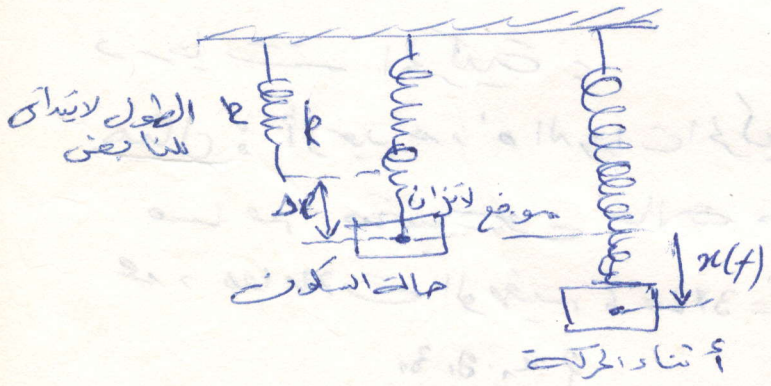
3-1 استنتاج معادلة الحركة وإيجاد التواتر الخاص

لإيجاد التواتر الخاص للنظام الذي يؤدي حركة توافقية بسيطة هم الطرق المستعملة هي : * طريقة الاتزان (مبدأ نيوتن)

* طريقة لاغرانج
* طريقة هاملتون
* طريقة رايلي.
* طريقة الطاقة.

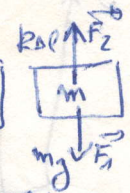
3-1 طريقة الاتزان (طريقة نيوتن)

تعتمد على استخدام كاتونة نيوتن الثاني للحركة ($\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$) لاستنتاج المعادلة التفاضلية للنظام، فنأخذ نظاما ميكانيكيا بسيطا كما هو مبين في الشكل التالي :



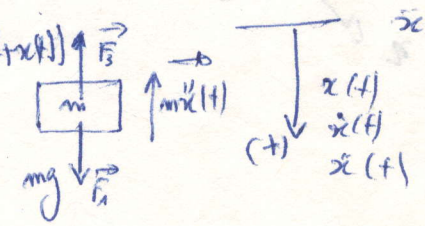
في حالة السكون : تؤثر على الكتلة قوتان هما وزنها وقوة الشد في النابض

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$



$$mg - k\Delta l = 0 \Rightarrow \boxed{mg = k\Delta l}$$

في حالة الحركة : نختار اتجاها نفرضه موجبا للاتزام $x(t)$ والسرعة $\dot{x}(t)$ والتسارع $\ddot{x}(t)$



هنالك ثلاث قوى تؤثر على الكتلة وهي وزن الكتلة وقوة الشد في النابض وقوة العطالة

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\ddot{x}(t) = 0$$

$$\boxed{mg - k(\Delta l + x(t)) - m\ddot{x}(t) = 0}$$

بتعويض العبارة $mg = k\Delta l$ نحصل على

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0}$$

وتسمى المعادلة التفاضلية لحركة الكتلة

التردد والزمن الدوري:

لهما دالتان لخاصتين النظام المهتز ولايتأثران بمقدار سعة الاهتزاز x_m و الشرط لابتدائية الحركة ويمكن اشتقاق مقدارهما في المعادلة التفاضلية لحركة النظام:

العلاقة بين هذه القيم

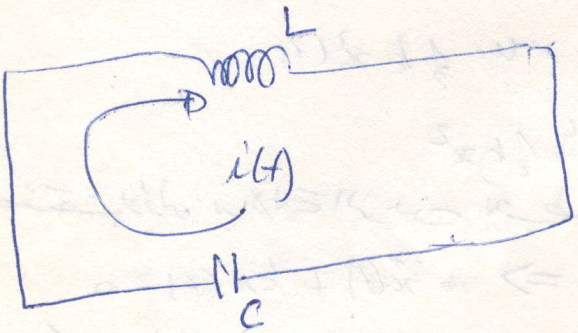
$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T_0$

النبض الخاص للحركة أو التواتر الزواي — التردد — الزمن الدوري (s) و يمثل زمن زوبعة واحدة

(rad/s) (Hz) (1/s) (Hz)

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Leftarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

نظام كهربائي



المجموع الجبري لفروق الجهد في دارة مغلقة يساوي صفر (قانون كرشوف) $\equiv$ يناظر قانون نيوتن في نظام ميكانيكي:

$$V_L(t) + V_C(t) = 0$$

تكتب هذه المعادلة بدلالة التيار على الشكل الآتي

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = 0$$

وبالاشتقاق بالنسبة للزمن:

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt\right)$$

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t) = 0 \Leftarrow \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}q(t) = 0$$

كما يمكن كتابة المعادلة بدلالة الشحنة

المعادلتان السابقتان تمثلان معادلتين تفاضليتين من الدرجة الثانية لذا يجب توافقيتهما مع المعادلة المعممة

التردد والزمن الدوري:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{و} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

نبين أن التواتر الزواي والزمن الدوري يتعلقان بدلالة العناصر المكونة للنظام

1-3-2- طريقة الطاقة:

تعتمد طريقة الطاقة على اشتقاق المعادلة التفاضلية لحركة جسم صلب انطلاقا من مبدأ انحفاظ الطاقة إذا يبقى مقدار الطاقة الكلية للنظام ثابتا في أية لحظة من الزمن:

$$T + U = E = \text{ثابت}$$

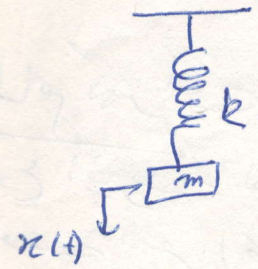
- E: الطاقة الكلية للجملة
- T: الطاقة الحركية
- U: الطاقة الكامنة (طاقة الوضع)

نأخذ المشتق الأول للمعادلة بدلالة الزمن:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$$

ومنها نستخرج المعادلة التفاضلية لحركة النظام كما يبين ذلك المثال الآتي:

- نظام ميكانيكي: (كتلة نابض)



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) \quad , \quad U = \frac{1}{2} k x^2(t)$$

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

المشتق الأول بدلالة الزمن نجد:

$$m \ddot{x}(t) \dot{x}(t) + k x(t) \dot{x}(t) = 0 \Rightarrow m \ddot{x}(t) + k x(t) = 0$$

نظام كهربائي: (الدارة LC)

إيجاد المعادلة التفاضلية للدارة الكهربائية والطاقة المغناطيسية

$$W_{elec} \equiv U = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} \quad . \quad W_{mag} \equiv T = \frac{1}{2} L \dot{q}^2(t)$$

$$E = \frac{1}{2} L \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C}\right]$$

$$L \dot{q}(t) \ddot{q}(t) + \frac{q(t)}{C} \dot{q}(t) = 0$$

$$\boxed{L \ddot{q}(t) + \frac{q(t)}{C} = 0}$$

وهي المعادلة التفاضلية للدارة الكهربائية.

3-3-1 طريقة لاغراج "principe de lagrange" (مبدأ لاغراج)

إذا كانت q_i الاحداثيات المعممة و $\dot{q}_i$ السرعات المعممة. نعرف دالة لاغراج $L = T - U$ بحيث $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ ومعادلة لاغراج أو تحويل لاغراج يكتب على الشكل:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] = 0$$

إذا كانت النظام من الدرجة الأولى $\Leftarrow L = L_a(\dot{x}, x, t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

نموذج نظام ميكانيكي (نواس بسيط)

يتكون النواس من كتلة m (نقطة مادية) وذراع مهمل الكتلة طوله l وهو يهتز زوايا صغيرة θ

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \quad U = mgl(1-\cos\theta)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m l^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

$$m l^2 \ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

من أجل الاهتزازات صغيرة السعة $\sin\theta \approx \theta$

$$m l^2 \ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

4-1- إيجاد حل المعادلة التفاضلية:

بما أن معادلة الحركة الاهتزازية الحرة من درجة حرية واحدة فهي من الشكل

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ في حالة الكتلة المعلقة بنابض أو من الشكل:

$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$ في حالة النواس: ويوضع $\frac{g}{l} = \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

نحصل على المعادلة الأولى مثلا: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ ويكون الحل

الرياضي الشامل لهذا النوع من المعادلات التفاضلية:

$$x(t) = De^{\beta t}$$

⇐ بالاشتقاق مرتين والتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على:

$$\beta^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftarrow \beta = \mp j\omega_0 \Leftarrow x(t) = D_1 e^{\beta_1 t} + D_2 e^{\beta_2 t}$$

وبما أن $x(t) = D_1 e^{j\omega_0 t} + D_2 e^{-j\omega_0 t}$

$$e^{\mp j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \mp j \sin\omega_0 t$$

⇐ $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ أو حل المعادلة التفاضلية:

$$x(t) = D\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

حيث $\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{B}{A}$ و $D = \sqrt{A^2 + B^2}$

D_1 ، D_2 ، A ، B ثوابت تحسب من الشروط الابتدائية.

الشرح الحرفي من الحل هو أنه عبارة عن حركة توافقية بسيطة كونها تحدث على المحور الجيبي وهي حركة دورية في الزمن ذات دور $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ وتواتر ذاتي $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

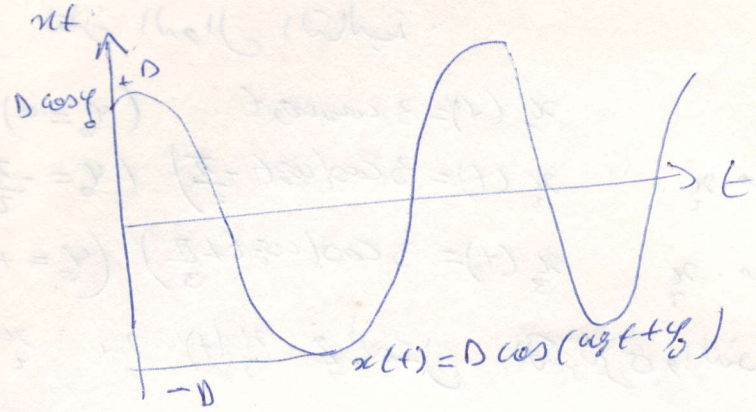
تسمى D سعة الحركة، و $(\omega_0 t + \varphi_0)$ طورها الابتدائي عند $t = 0$ و φ_0 الطور الابتدائي.

1-5- تمثيل الحركة التوافقية البسيطة:

1-5-1- التمثيل الكرتيزي للحركة:

يشمل هذا التمثيل للحركة تغيرات الدالة $x(t)$ بدلالة الزمن t.

إذا أخذنا: $x(t) = D\cos(\omega t + \varphi)$

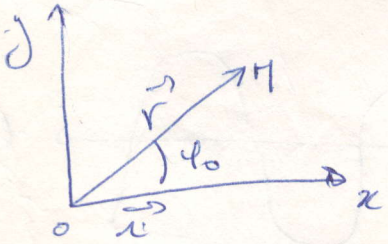


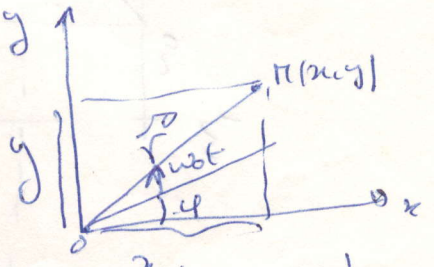
1-5-2- التمثيل السعافي للحركة:

نأخذ السعاع $\vec{r}$ الذي طوله $|\vec{r}| = D = OM$ والذي يدور بسرعة منتظمة حول المركز O بالاتجاه المعاكس لعقارب الساعة. يوضع السعاع في مستوى محاذيا المحاور الكرتيزية بحيث أن يصنع زاوية مقدارها $(\omega t + \varphi)$ مع الجزء الموجب للمحور Ox.

إسقاط السعاع $\vec{r}$ على المحور (Ox) يعطينا $x(t)$

$$\left(\text{Proj}\,\vec{r}\right)_x = x(t) = D\cos(\omega t + \varphi)$$





ملاحظة: حين نأخذ هذا التمثيل السعافي في اللحظة $t=0$ تكون الزاوية $(\vec{i}, \vec{r})$ تساوي φ_0 تسمى هذه التمثيل تمثيل فرنسل Representation de Fresnel

1-5-3- التمثيل العقدي للحركة:

يكون ذلك بتعويض المحاور $(\vec{oy}, \vec{ox})$ للمستوى السعافي بالمحاور $(\vec{Re}, \vec{Im})$ للمستوى العقدي حيث كل نقطة P ذات الإحداثيات (x,y) تكتب أو تمثل على شكل $z = x + iy$ حيث z عدد عقدي.

ونقول أن الحركة مثلا $x(t) = D\cos(\omega t + \varphi)$ عقدية

ـ التمثيل العقدي: نربط بين الإشارة $x(t)$ كما رأينا سابقا وبين $z(t)$ كيف

$x_1(t) = 3\cos\omega t \rightsquigarrow z_1(t) = x_1 + jy_1$ نعلم سابقا

$= 3(\cos\omega t + j\sin\omega t) = 3e^{j\omega t}$

$z_1 = r_1 e^{j\theta_1} \longrightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 3 \\ \theta_1(t) = \omega_0 t, \quad \varphi_0 = 0 \end{cases}$

$x_2(t) = 3\left(\cos\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightsquigarrow z_2(t) = x_2 + jy_2 = 3\left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

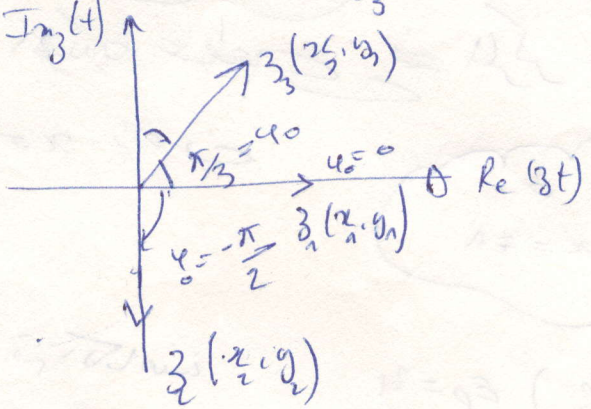
$= 3e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$

$z_2 = r_2 e^{j\theta_2} \longrightarrow \begin{cases} r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 3 \\ \theta_2(t) = \omega t - \frac{\pi}{2} \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$x_3(t) = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \rightsquigarrow z_3(t) = x_3 + jy_3 = 3\left[\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= 3e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)}$

$z_3 = r_3 e^{j\theta_3} \longrightarrow \begin{cases} r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = 3 \\ \theta_3(t) = \omega t + \frac{\pi}{3} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$



- القوة في الحركة التوافقية البسيطة

تكتب المعادلة الأساسية في الميكانيك كما يلي: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$

وفي حالة جملة ذات بعد واحد: $F(t) = M\frac{d^2x}{dt^2}$ وبتعويض

نسمي المعادلة التي تحصر المشاريع بـ: $F(x) = -Mw^2x = -kx$ حيث $k = mw^2$ = ثابت. هذا يدل على أن القوة في الحركة الجيبية متناسبة مع الانفعال ومعاكسة له وتؤدي به (بعض إعادة النظام الحر إلى وضع التوازن)

⇐ قوة إرجاع: "force de Rappal"

- الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة (الجيبية):

إن الطاقة الحركية (énergie cinétique) للكتلة المتحركة بالنابض والتي تتحرك وفق المعادلة $x(t) = A\cos(w_0t+\varphi)$ هي

$$E_C = T = \frac{1}{2}mv^2 =$$
$$= \frac{1}{2}mA^2w^2\sin^2(w_0t+\varphi)$$

وبما أن: $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ ينتج إذن

$$T = \frac{1}{2}mw^2A^2\left[1 - \cos^2(w_0t+\varphi)\right]$$

$$T = \frac{1}{2}mw^2(A^2 - x^2)$$

يلاحظ أن الطاقة الحركية عظمى في المركز $(x=0)$ ومنعدمة عند نهايتي الاهتزاز $x = \mp A$ إذن

$$T_{max} \Leftarrow x = 0$$
$$T = 0 \Leftarrow x = \mp A$$

والحصول على الطاقة الكامنة (énergie potentielle) $E_p = U$ نستعمل العلاقة $F = -\frac{dE_p}{dx} = -\frac{dU}{dx}$.

$$F = -\frac{dE_p}{dx} \left(= -kx\right) = kx = \frac{dE_p}{dx} \Leftarrow$$

وبالتكامل نحصل على:

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^x kx\,dx \Rightarrow U = E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mw^2x^2$$

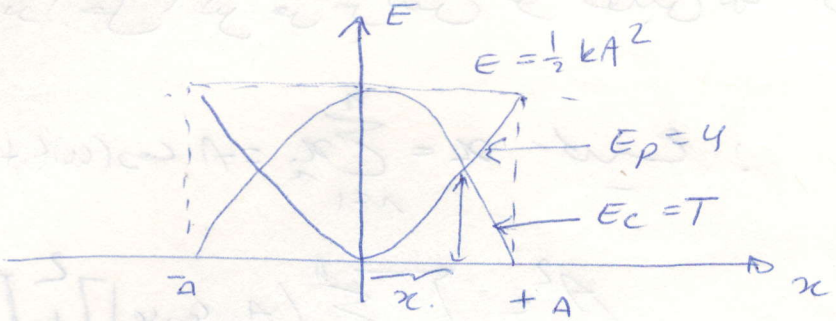
وهكذا فإن الطاقة الكامنة منعدمة في المركز $(x=0)$ وتكون عظمى عند نهايتي الاهتزاز $x = \mp A$

$$\begin{cases} E_p = 0 \Leftarrow x = 0 \\ \Leftarrow x = \mp A \\ E_{p\,max.} \end{cases}$$

نجمع معادلتي الطاقة الحركية أو الطاقة الكامنة U نحصل على الطاقة الكلية E

$$E = T + U = \frac{1}{2}mw^2(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}mw^2x^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2 = \text{ثابتة}$$

الخلاصة: أثناء اهتزازة واحدة يوجد تبادل مستمر بين الطاقة الكامنة والحركية فعندما ينعدم الجسم عن موضع التوازن تزداد الطاقة الكامنة على حساب الطاقة الحركية وتحصل العكس عندما تعود الجسم نحو موضع التوازن



I - 6 - تداخل حركتين توافقيتين:

- تداخل حركتين توافقيتين لهما نفس المحاور ونفس التواتر ω:

نأخذ دالتين توافقيتين

$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

- الطريقة العقدية:

$x_1(t) = x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightsquigarrow \underline{x}_1(t) = \underline{x}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}$

$= A_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}$

$x_2(t) = x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightsquigarrow \underline{x}_2(t) = \underline{x}_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = A_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_1 + x_2 \rightsquigarrow \underline{x}(t) = \underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t) =$

$x \rightarrow \underline{x} = A e^{j(\omega t + \varphi)} = A e^{j\varphi} e^{j\omega t} \Rightarrow$

$A_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t} + A_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t} = A e^{j\varphi} e^{j\omega t}$

$\Rightarrow \boxed{A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2} = A e^{j\varphi}}$

من خاصية أولر لدينا:

$e^{jx} = \cos x + j \sin x$ حيث x عدد حقيقي

$\left.\begin{array}{l} A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 = A\cos\varphi \\ A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 = A\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}}$

$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$ كذلك:

ملاحظة: إذا جمعنا عدد من الحركات الجيبية التوافقية البسيطة في
التردد ω نحصل على دالة توافقية جديدة لها نفس التردد ω
- وكذلك في حالة تداخل أكثر من حركتين توافقيتين لهما نفس التواتر ω

المحصلة:

كما: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$A^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} A_i \cos\varphi_i\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n} A_i \sin\varphi_i\right]^2$$

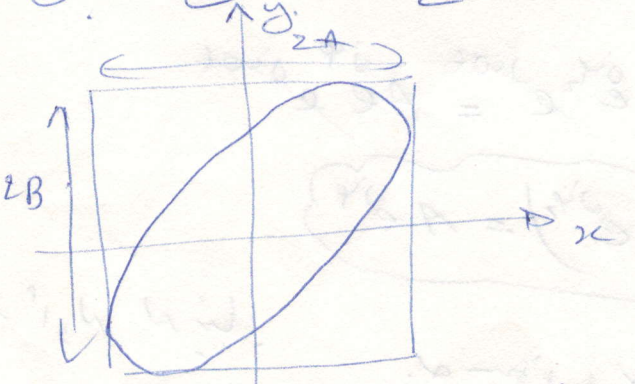
$$\tan\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \sin\varphi_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cos\varphi_i}$$

- تداخل حركتين توافقيتين متعامدتين

لنأخذ الآن حركتين توافقيتين لهما نفس التواتر ω
الأولى في الاتجاه الأفقي: $x(t) = A\cos\omega t$
الثانية في الاتجاه العمودي: $y(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$
حيث φ هو فرق الطورين اهتزازي x و y المحصلة من
من الشكل:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

وهي معادلة قطع ناقص يقع كليا داخل مستطيل عرضه يساوي $2A$
وارتفاعه $2B$.



حالات خاصة

1) فرق الطور $\varphi = 0$ يتبع من المعادلة السابقة

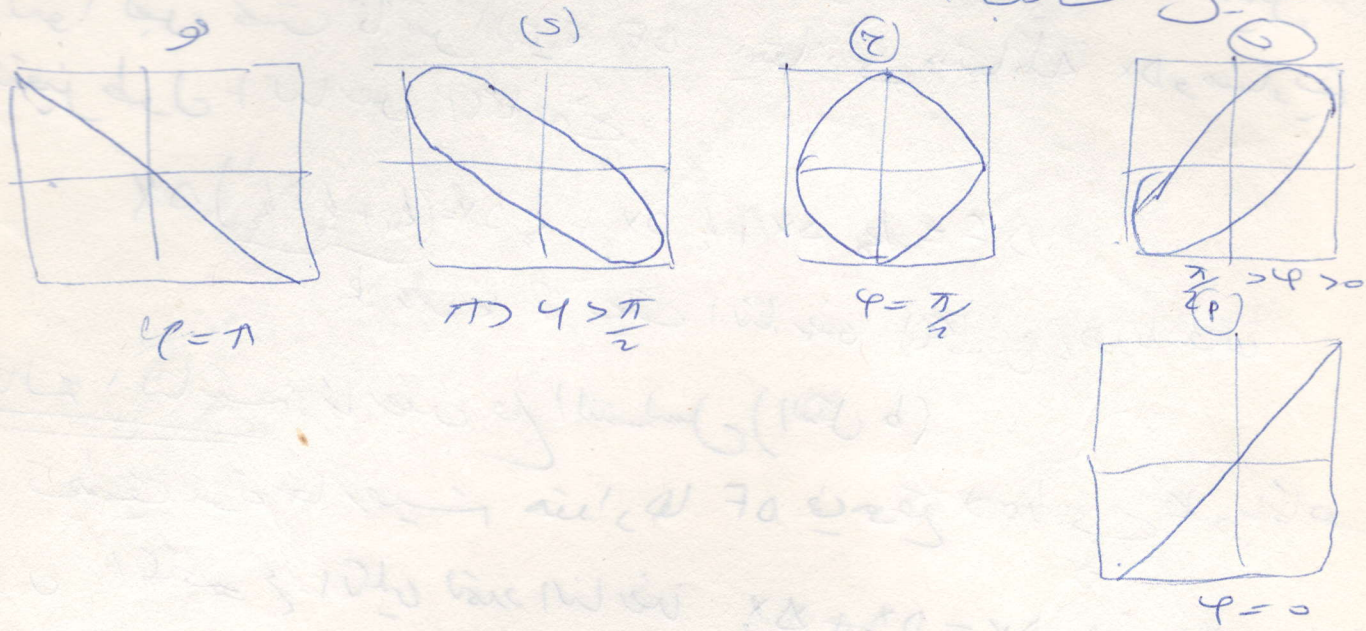
$$y(t) = \left(\frac{B}{A}\right) x(t) \quad \text{---} *$$

في حالة الطور $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ نحصل على قطع ناقص ذو محور موجب

" " $\varphi = \frac{\pi}{2}$ نصبح المعادلة العامة $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ وهي معادلة قطع ناقص قائم حيث في حالة ما إذا كان $A = B$ يتحول القطع الناقص إلى دائرة

③ الزاوية $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ نحصل على قطع ناقص ذو محور سالب

④ للزاوية $\varphi = \pi$ تصبح المعادلة $y(t) = -\frac{B}{A} x(t)$ وهي معادلة خط مستقيم ذو ميل سالب.

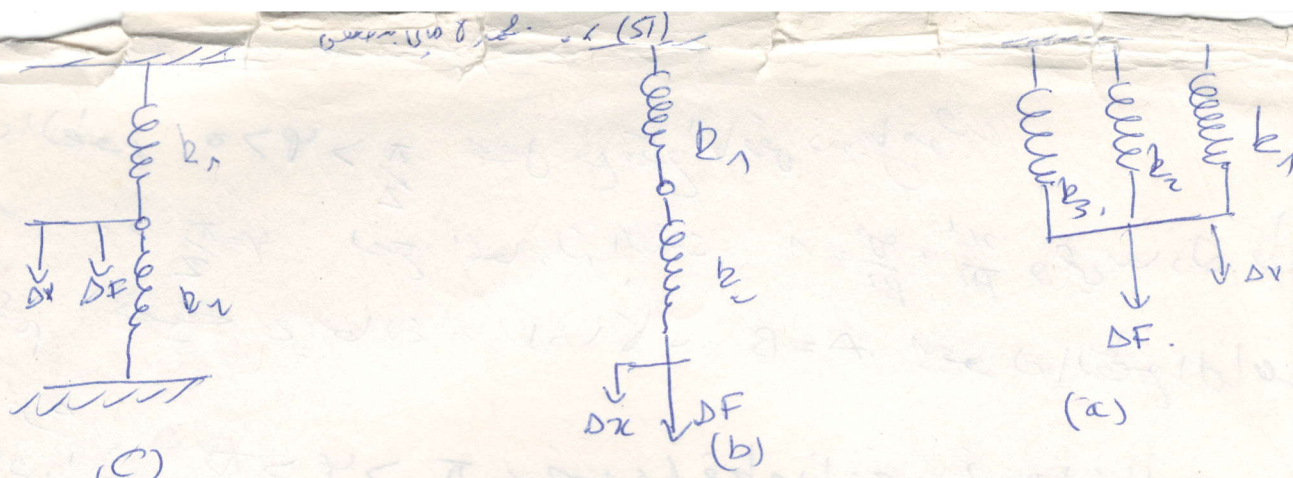


* النظام الميكانيكي : النظام الميكانيكي للنظام الحقيقي هو نظام مبسط حيث يسمح بتوضيح أكثر لمعرفة حركته وبالتالي إيجاد المعادلة التفاضلية لهذه الحركة وتسهل دراسة هذه الطريقة في إيجاد النابض الميكانيكي أو الحركة الميكانيكية على سبيل المثال

* إيجاد النابض الميكانيكي في النموذج المثالي البسيط:

نمكن تعويض عدد من النوابض المرتبطة بالنظام المهتز بنابض واحد ميكانيكي ذو تأثير مماثل بحيث يكون مقدار الإزاحة Δx تحت تأثير قوة خارجية ستاتيكية ΔF في هذا الموقع الاتزاني الحدود متساوي في الحالتين :

- في هذه الحالة يكون مقدار ثابت النابض الميكانيكي $k = \frac{\Delta F}{\Delta x}$.



الحالة الاولى: نوابض على التوازي (الشكل a)

يفرض أن البعد بين النوابض صغيرا جدا بحيث يمكن إهماله، تتعرض أطوال النوابض تحت تأثير القوة ΔF بمقادير متماثلة Δx ومساوية لتغير طول النابض المكافئ

$$\Delta F = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x + k_3 \Delta x = (k_1 + k_2 + k_3)\Delta x$$

k قيمة ثابت النابض المكافئ، هذه الحالة

الحالة الثانية: نابضان على التسلسل (الشكل b)

عند تطبيق قوة خارجية مقدارها ΔF في موقع أدناى x وباتجاهه تكون المجموع الكلي لتمدد النابضين $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$ حيث Δx_1 و Δx_2 هما تمددا النابضين. ①

وما أن قوة الشد في كل نابض تكون في هذه الحالة مساوية للقوة الخارجية المؤثرة إذن تصح العلاقة

② $\Delta F = k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2$

مما سبق ينتج

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

ومنها نتج قيمة ثابت النابض المكافئ $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

بالنسبة لعدد أكبر من النوابض على التسلسل

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

الحالة الثالثة:

عند دراسة وضع النابضين في الشكل (c) القوة ΔF الموثرة في الاتجاه

تولد قوة شد في النابض الاول وقوة انضغاط في النابض الثاني

يكونا مقدار التغير في طول كل منهما مساويا للزيادة Δx

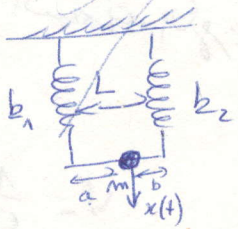
ومعادلة اتزان القوى تكتب $\Delta F = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x$

ينتج من هذه المعادلة قيمة ثابت النابض المكافئ $k = k_1 + k_2$

أي أن النابضين يتدرجان ضمن الحالة الاولى وليس الثانية

كما بدأنا في أول الأمر:

1 - 9 - 3 - النابض الميكانيكي لذراع مرتبط بنابضين:



a حالة التوازن

1 - 10 - المطابقة الكهروميكانيكية:

مقدمة: يوجد تشابه عميق عند المقارنة الرياضية لمسائل الدارات الكهربائية مع مسائل ميكانيكية، على سبيل المثال، لدينا في الميكانيك القانون الأساسي $F = m\gamma$ حيث $\gamma = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ وعند التوازن $\sum \vec{F} = 0$

والعنصر الأساسي في الكهرباء هو قانون أوم $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, $E = ZI$

$\sum E = 0$ حيث Z المقاومة E القوة المحركة الكهربائية

ومن جهة أخرى العمل المنجز في كل حالة كما يلي

ميكانيك $\rightarrow$ $dZ = F\,dx = F v\,dt$

$dZ = E\,dq = EI\,dt$

القوة المتعلقة بالحركة حول وضع التوازن هي:

قوة الارجاع $F_r = kx = k\int v\,dt$ force de Rappel.

قوة الاحتكاك $F_f = -\alpha v$ force de frottement

قوة العطالة -

فرق الكمون في الكهرباء:

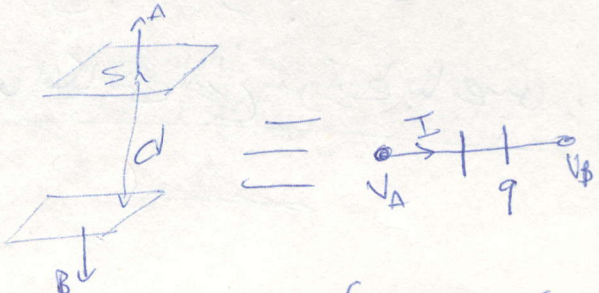
- فرق الكمون الحراري لمكثف $\varepsilon_C = \frac{1}{C} q = \frac{1}{C} \int I dt$

فرق الكمون للمقاومة $\varepsilon_R = RI$

" " " التحريض $\varepsilon_L = L \frac{dI}{dt}$

- المكافئ الميكانيكي للمكثفة:

إن المكثفة هي عبارة عن جهاز كهربائي يتشكل من صفيحتين متساويتين كل منهما واحدة تحمل وتيارا بمساحة d وموضوعتان داخل وسط كهربائي معامله ε وسعة هذه المكثفة هي: $C = \varepsilon \frac{S}{d}$ وتقدر بالفراد



I شدة التيار الكهربائي

q الشحنة الكهربائية

في الكهرباء لدينا: $q = \int I dt = C (V_A - V_B) = CV$ $\Leftarrow$ $V = \frac{1}{C} q$

في الميكانيك لدينا: $x = \int \dot{x} dt$ وكذلك $F = kx$ حيث k ثابت مرونة

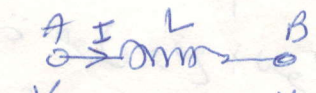
إذا نص على مقارنة الجهد V مع القوة F فإن: $\boxed{C \longleftrightarrow 1/k}$

إذن المكثفة ميكانيكيا النابض لأن السعة C ميكانيكيا تقابل ثابت المرونة k للنابض

* المكافئ الميكانيكي للوشيعة L:

الوشيعة ذات الذاتية L عبارة عن جهاز كهربائي متشكل من حلقات حلزونية والذاتية هي عبارة عن تدفق ϕ ينتج عن مرور التيار الكهربائي I عبر الحلقات إذن:

$L = \frac{\phi}{I} = \frac{B.S}{I} = \mu H \frac{S}{l}$ وتقاس بالهنري



ϕ = تدفق Flux.

B: induction magnetique التحريض المغناطيسي

μ = سماحية

H: إثارة المغناطيسية

$$V = V_A - V_B = L\frac{dI}{dt} = L\ddot{q} \Rightarrow V = L\ddot{q}$$

في الميكانيك:

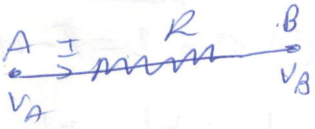
$$F = m\ddot{x}$$

الوشيعة مكافئ الكتلة m

$$L \leftrightarrow m$$

المكافئ الميكانيكي للمقاومة R:

المقاومة R لناقل ما هي النسبة بين التوتر الذي يظهر بين طرفيه و شدة التيار به:



$$R = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{V}{I}$$

و منه

$$V = RI$$

في الميكانيك

$$F = -\alpha \dot{x}$$

بإعطاء المقاومة مكافئ الاحتكاك

$$R \leftrightarrow \alpha$$

* **المكثف و حامل مستوى الطاقة:**

(أ) الطاقة المخزنة في المكثف و القوة المرجعة للنابض $F_r = -kx$ والقوة الضد المحركة للمكثفة $V = \frac{1}{C}q$ تشكل حامل مستوى الطاقة.

النابض و المكثفة لا يمكنهما أن الطاقة إلى خارجهما بينما هما يبادران خزن الطاقة و يمكن لحظة بداية الحركة أو خراجها أي عند تحرير النابض أو عند ربط المكثف بالدارة

خزان الطاقة في الحركة

$$\begin{cases} x = \int \dot{x}\,dx \Rightarrow W_r = \frac{1}{2}kx^2 \\ q = \int I\,dt \Rightarrow W_{ele} = \frac{1}{2C}q^2 \end{cases}$$

تعطى الطاقة أثناء الحركة

(ب) الطاقة التي تعطيها قوة الوطال $F_i = m\ddot{x}$ هي الطاقة الحركية $W_{cin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ التي لا توجد إلا أثناء الحركة إذن تضاف في الكهرباء الطاقة المغناطيسية المتعلقة بمرور تيار كهربائي.

هاتين الطاقتين تعطى في خارج الجهازين (الوشيعة و الجسم ذو الكتلة m) لحظة توقف الحركة

خزان الطاقة أثناء الحركة

$$W_{cin} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$W_{magn} = \frac{1}{2}LI^2$$

تعطى الطاقة لحظة توقف الحركة

ج) - المقاومات توافق الاحتكاكات في الميكانيك فالظاهرتين توجدان
إذا فقت ان طاقة الخارج فالطاقة المفقودة هي:

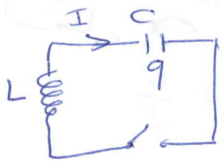
$$dw = f\,dl = F\,dx = F\dot{x}\,dt = \alpha \dot{x}^2 dt$$

في الميكانيك يسمى التخامد $dw = \alpha \dot{x}^2 dt$

في الكهرباء يسمى المقاومة $dw_{ela} = R I^2 dt$

- معادلة الحركة باستغلال الطاقة الكهروميكانيكية:

① دراسة الدارة الكهربائية LC:



في الميكانيك لدينا: $L = T - U$ وفي الكهرباء: $L = W_M - W_E$

W_M ← energie magnetique, W_E ← energie electrique.

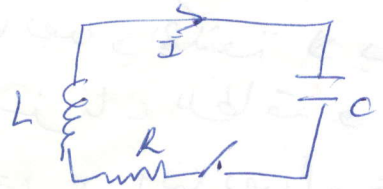
$$L = \frac{1}{2} L I^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow L\ddot{q} - \frac{1}{C} q = 0 \Rightarrow \ddot{q} - \omega_0^2 q = 0$$

حيث $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ⇐ معادلة الحركة

$$\boxed{f(t) = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

دراسة الدارة الكهربائية RLC:



$$L = W_M - W_E + dW_E = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + R\dot{q}\,dq$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L\dot{q} + R\,dq, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = L\ddot{q} + R\dot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C} \Rightarrow L\ddot{q} + \frac{q}{C} = -R\dot{q} \Rightarrow \boxed{L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0}$$

$$\Rightarrow L\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

الحل من شكل:

$$q = q_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$$

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

ω_a ← نبض الحركة المتخامدة

$$\gamma = \frac{R}{2L} = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{k}{m}$$

γ معامل التخامد.

خلاصة :

نظام كهربائي		نظام ميكانيكي
① شحنة كهربائية $q(t)$	⟵	إزاحة الجسم عن الموضع الاتزان $x(t)$
② تيار كهربائي $i(t)$	⟵	سرعة الجسم $v(t)$
③ ، شيفة أو محاثة L	⟵	كتلة الجسم m
④ مقلوب سعته $\frac{1}{C}$	⟵	ثابت مرونة k
⑤ مقاومة R	⟵	معامل احتكاك α
⑥ الطاقة الكهربائية Welec	⟵	الطاقة الكامنة $U(x)$
⑦ ، ، المغناطيسية $W_H(t)$	⟵	، ، الحركية $T(x)$

الفصل الثاني : الاهتزازات الحرة المخمدة
درجة حرية واحدة

2005 - 11 - 16

تعريف : يقوم الجسم الذي لا تؤثر عليه إلا قوى مرونية أو شبه مرونية ($-kx$) باهتزازات توافقية بسيطة ذات سعة ثابتة "A = cte"

غير أنه من الناحية العملية تؤثر على الوسط المحيط بالجملة قوى معيقة للحركة وقوى احتكاك.

من خلالها تضيع الطاقة الميكانيكية للجملة وبالتالي تتناقص السعة الاهتزازية مما ينتج في النهاية تخامد الاهتزازات.

وفيما يتعلق بالحل الميكانيكي، نميز نوعين من الاحتكاك التي تسبب تخامد الحركة الاهتزازية، هما:

(أ) تخامد ناتج عن احتكاك لزج (تخامد لزج)

(ب) تخامد ناتج عن احتكاك طلب (تخامد طلب)

$$\varphi_i = \sum_j \varphi_j \frac{\partial \overline{OM}}{\partial q_i}$$

الاهتزازات المتخامدة بفعل الاحتكاك اللزج :

وصف الظاهرة : تحدث مثل هذه الظاهرة نتيجة التفاعل بين مختلف الذرات والجزيئات المرتبة منها البلورة نتيجة التلامس بين الطبقات ... الاحتكاك اللزج بين الأجسام الصلبة، والسوائل (الغازات) متمثلا ظاهرة

إذا عند حركة الجسم الصلب ضمن السائل أو الغاز حدث احتكاك بين سطح الجسم الصلب والطبقة المحيطة به من السائل. هذه الطبقة تجر الطبقة البعيدة الملاصقة لها (لأن الجاذبية الجزيئية قوية نوعا ما بينهما) وهي بدورها تقاوم حركته بها وهذا هو سبب اللزوجة أو الاحتكاك الداخلي في السائل. والتي تعمل على تقليل سرعة الجسم الصلب ضمن هذا السائل (الغاز) وتكون قوة الاحتكاك متناسبة طرديا مع سرعة الحركة ومعاكسة لها في الاتجاه عند التقريب الأول.

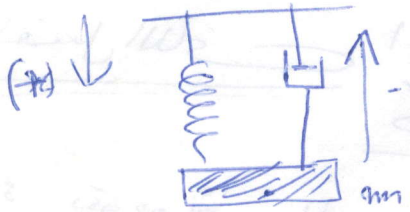
$$\vec{f}_f = -\alpha \vec{v}$$

α معامل الاحتكاك وهو مقدار موجب يتعلق بخواص الوسط بشكل وأبعاد الجسم المتحرك.

الدراسة التحليلية:

نأخذ نظام فيزيائي يتكون من كتلة m وناضض ثابت مرونته k ومخمد (مكبس + سائل) بمعامل α كما هو في الشكل.

نزيح الجملة عن وضع التوازن المستقر بإزاحة صغيرة x ثم نترك الجملة في حالتها الحرة.



القوة المطبقة على الجملة هي:

1. القوة المرونية الناتجة عن الناضض $(-kx)$
2. قوة الاحتكاك الناتجة عن المخمد $(-\alpha \dot{x})$
3. قوى العطالة الناتجة عن حركة الكتلة m $(m\ddot{x})$

تطبيق المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

بالإسقاط على المحور (ناضض + كتلة + مخمد)

من أجل مسألة صغيرة:

$$-kx - \alpha \dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0$$

بالقسمة على m

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

2δ ω_0^2

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \longrightarrow (1)$$

δ معامل التخامد اللحظي: