

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique
Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des sciences



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
كلية العلوم

Département de Physique

Polycopie de cours

Mécanique des Fluides 2

Option : *Physique Energétique*

Par :

Dr. BOURAS Abdelkarim

2018

Contenu de la matière

CHAPITRE1 : Rappels sur la mécanique des fluides

- 1.1 Fluide parfait
- 1.2 Fluide réel
- 1.3 L'état fluide
- 1.4 Expérience de Reynolds
- 1.5 Ecoulement stationnaire
- 1.6 Fluide incompressible et compressible

CHAPITRE 2 : statique et Dynamique des fluides

- 2.1 Objectifs spécifiques
- 2.2 Pression atmosphérique, pression absolue et pression effective
- 2.3 Equation générale de l'hydrostatique
- 2.4 Applications
- 2.5 Principe de Pascal
- 2.6 Force de pression sur une surface

CHAPITRE 3 Eléments de calcul tensoriel

- 3.1 Scalaire: ou tenseur d'ordre 0
- 3.2 Vecteurs
- 3.3 Représentant d'un vecteur
- 3.4-tenseur de range 2
- 3.5 Produit tensoriel
- 3.6 Calcul

CHAPITRE 4 : Cinématique des milieux continus

- 4.1 Définitions
- 4.2 : Description d'Euler et de Lagrange
- 4.3: ligne d'émission
- 4.4 L'équation de continuité

CHAPITRE 5 : Déformation

- 5.1- Translation
- 5.2- Rotation
- 5.3- Dilatation
- 5.4- Déformation angulaire.

CHAPITRE 6 : Equations fondamentales de la dynamique des fluides

- 6.1. Introduction
- 6.2 Conservation de la masse
- 6.3 Autre démonstration, bilan de masse sur un volume élémentaire
- 6.4 Une forme spéciale du théorème de transport Le théorème de Reynolds
- 6.5 Equation de conservation de la quantité de mouvement
- 6.6 Résultats principaux de l'analyse de l'état des contraintes dans un milieu fluide
- 6.7 Première forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement
- 6.8 Ecoulements non visqueux: équations d'Euler

CHAPITRE 7. Solutions exactes des équations de Navier-Stokes

- 7.1 Equations de Navier-Stokes
- 7.2 Equation de bilan pour l'énergie cinétique
- 7.3 Equation de conservation de l'énergie
- 7.4 Autres formes pour l'équation de conservation de l'énergie
- 7.5 La fonction de dissipation visqueuse
- 7.6 L'écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique

CHAPITRE 8. Couche limite laminaire

- 8.1-Notion de couche limite
- 8.2- Grandeurs caractéristiques de la couche limite
- 8.3 Etude dimensionnelle de la couche limite

Chapitre 01

INTRODUCTION

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides[1]. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes sous branches:

- la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.
- la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Comme autres branches de la mécanique des fluides.

On distingue également d'autres branches liées à la mécanique des fluides :

L'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, ... Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies: la mécanique des fluides numérique (CFD ou Computational Fluid Dynamics en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs très puissants : les supercalculateurs.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, mais aussi la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie[2].

DEFINITIONS :

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles[3], très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entre particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple: les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes. On insiste sur le fait qu'un fluide est supposé être un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue. Par exemple, une gouttelette de brouillard, aussi petite soit-elle à notre échelle, est toujours immense à l'échelle moléculaire. Elle sera toujours considérée comme un milieu continu. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz. Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement par leur viscosité. La viscosité est une de leur caractéristique physico-chimique qui sera définie dans la suite du cours et qui définit le frottement interne des fluides. Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles[2] : La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (tout le reste... le sang, les gels, les pâtes,

...). Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée par les fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. Ce cours est limité uniquement à des fluides newtoniens qui seront classés comme suit.

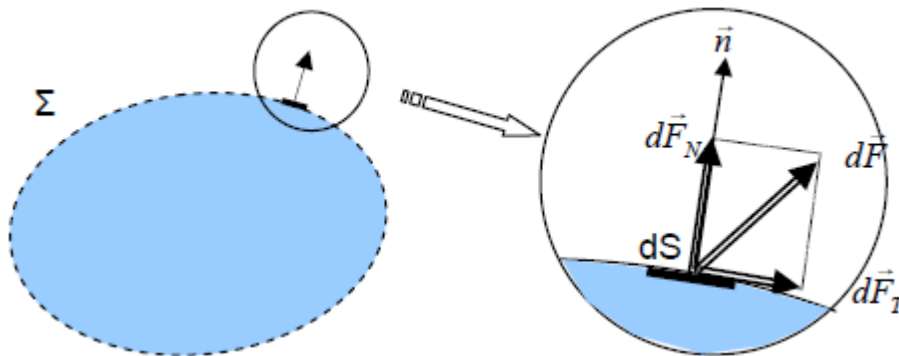
1.1 Fluide parfait

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée Σ fictive ou non

Considérons $d\vec{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS de normale \vec{n} entre le fluide et le milieu extérieur.

On peut toujours décomposer $d\vec{F}$ en deux composantes:

- une composante T $d\vec{F}_T$ tangentielle à dS .
- une composante N $d\vec{F}_N$ normale à dS .



En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante $d\vec{F}_T$ est nulle. Autrement dit, la force $d\vec{F}$ est normale à l'élément de surface dS .

1.2 Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide. C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait, et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. La statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits[1].

1.3 L'état fluide

Le physicien distingue classiquement 3 états de la matière, solide, liquide et gazeux, en regroupant sous le vocable fluide les gaz et la plupart des liquides. À l'échelle microscopique, ce qui caractérise les fluides, c'est que les molécules ne sont pas bloquées dans leurs orientations relatives; elles ont ce degré de liberté (de désordre) que n'ont pas les molécules dans les solides.

Leurs propriétés communes sont qu'ils n'ont pas de forme propre, c'est-à-dire qu'ils sont dépourvus de rigidité; les forces nécessaires pour engendrer des déformations par glissement et assez lentes sont extrêmement petites. Cette distinction entre solides et fluides n'est pas parfaitement nette, puisqu'on trouve des corps comme les gelées, les peintures, les pâtes, certaines solutions concentrées de polymères, qui manifestent à la fois des comportements de solides (pendant des temps courts) et des comportements de liquides (pendant des temps longs).

Les liquides: Les molécules sont liées en distance ce qui en limite le désordre. Ils occupent un volume défini et sont susceptibles de s'organiser en gouttes. Leur densité est telle qu'on définit d'ordinaire (assez mal) les liquides par le fait qu'en situation de repos, ils présentent une surface libre discernable et perpendiculaire au champ de gravité local.

Les gaz: Les molécules ne sont pas liées en distance et les gaz occupent tout le volume disponible. Les forces permettant d'engendrer des déformations volumiques (contraction ou dilatation) sont faibles.

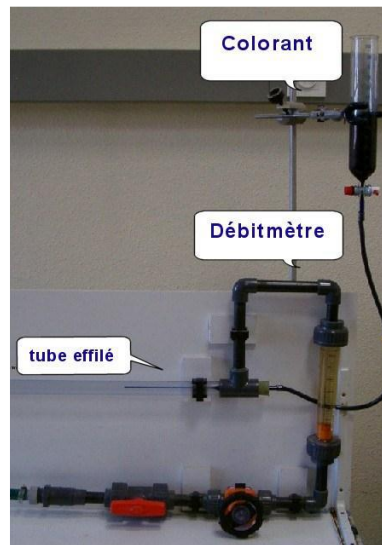
Régimes d'Écoulement

Un régime d'écoulement peut être défini comme étant le mode de mouvement des particules fluides entre elles dans un écoulement [4].

1.4 Expérience de Reynolds :

Les hydrauliciens ont remarqués depuis longtemps l'existence des régimes d'écoulement mais c'est Osborne Reynolds qui démontra leur existence expérimentalement et développa des critères permettant de les différencier.

L'expérience de Reynolds schématisée ci-après consiste à envoyer à l'aide d'un dispositif un liquide coloré au sein d'une masse liquide en mouvement dans un tube en verre.



En ouvrant plus ou moins le robinet de vidange on fait varier la vitesse de l'écoulement dans le tube, quand la vitesse de l'écoulement est suffisamment faible le liquide coloré forme un filet droit parfaitement net qui ne se mélange pas aux autres filets. Ce régime est appelé **Régime Laminaire**, dans ce cas les filets liquides sont tous droit et parallèles entre eux.

Puis si on augmente encore la vitesse d'écoulement le filet coloré devient instable ; c'est le **Régime Transitoire**.

Et si on augmente encore plus la vitesse d'écoulement, le filet se rompt et se mélange avec l'écoulement ; c'est le **Régime Turbulent**. [4]

Pour différencier les régimes d'écoulement entre eux, Reynolds a développé un nombre adimensionnel qui est le **Nombre de Reynolds**.

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

avec :

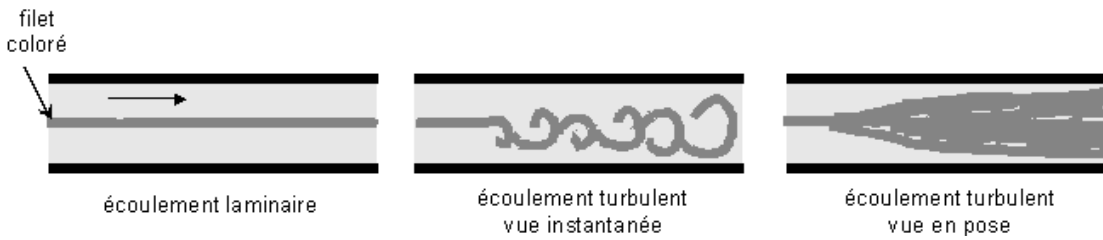
ρ = masse volumique du fluide, v = vitesse moyenne, D = diamètre de la conduite, μ = viscosité dynamique du fluide, ν = viscosité cinématique

L'expérience montre que :

si $Re < 2000$ le régime est LAMINAIRE

si $2000 < Re < 3000$ le régime est intermédiaire

si $Re > 3000$ le régime est TURBULENT.



1.5 Ecoulement stationnaire

1.5.1 Définition :

Un régime d'écoulement est dit permanent ou stationnaire quand les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ...), ont une valeur constante au cours du temps. L'écoulement d'un fluide est dit non permanent si la vitesse et la pression en un point donné de ce fluide en mouvement varie en fonction du temps.

1.6 Fluide incompressible et compressible

1.6.1 Fluide incompressible et compressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

1.6.2 Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles.

Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles. [5]

Chapitre 02 : statique et Dynamique des fluides

2.1 Objectifs spécifiques

Au terme de ce chapitre, l'étudiant doit être capable :

- d'appliquer l'équation générale de l'hydrostatique
- de déterminer la force de pression exercée sur une paroi plane
- de déterminer la force de pression exercée sur une paroi gauche
- de déterminer la poussée d'Archimède appliquée sur les solides immergés dans un fluide.

2.2 Pression atmosphérique, pression absolue et pression effective :

2.2.1 **La pression atmosphérique** : est la pression de l'air en un lieu donné. Au niveau de la mer : $P_{atm} = 1 \text{ atm} \approx 1,013 \text{ bar} = 760 \text{ mmHg}$

La pression d'un fluide peut être donnée en absolue ou en effective. La référence pour la pression absolue est le zéro et pour l'effective c'est la pression atmosphérique.

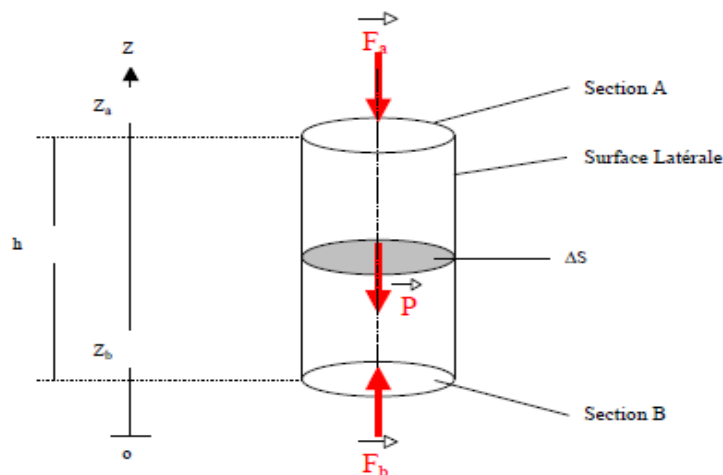
2.2.2 **La pression absolue** est toujours positive. Elle est nulle dans le cas du vide (pas de matière)

2.2.3 **La pression effective (manométrique)** peut être positive, négative ou nulle. La pression effective minimale correspond au cas du vide ($P_{atm} = 0$)

$$P_{eff} = P_{ab} - P_{atm}$$

2.3 Equation générale de l'hydrostatique :

Etudiant l'équilibre d'une partie de fluide en forme de cylindre vertical de section droite très petite ΔS et d'une hauteur h .



Le cylindre est soumis à l'action de son poids et à l'action des forces de pression du milieu liquide extérieur.

- Poids: $P = m.g$ or $m = \rho.V$ donc $P = \rho.V.g$ (avec $V = h . \Delta S$)

- Forces de pression:

-section A : $F_a = P_a . \Delta S$

-section B : $F_b = P_b . \Delta S$

-surface latérale : $F_L = 0$ (les forces de pression \perp à l'axe du cylindre s'opposent et s'annulent)

A l'équilibre :

$$P + F_a + F_b = 0 \quad \text{on a : } P = F/S$$

L'équation sur l'axe OZ :

$$-P - F_a + F_b = 0$$

$$-\rho.V.g - P_a . \Delta S + P_b . \Delta S = 0$$

$$-\rho.h.\Delta S.g - P_a . \Delta S + P_b . \Delta S = 0$$

$$-\rho.h.g - P_a + P_b = 0$$

$$\text{or } h = Z_a - Z_b$$

$$P_a + \rho.g . Z_a = P_b + \rho.g . Z_b$$

Pour tout point i quelconque, dans un liquide au repos, défini par son altitude Z_i par rapport à un plan de référence, on a : $P_i + \rho.g . Z_i = \text{cte}$

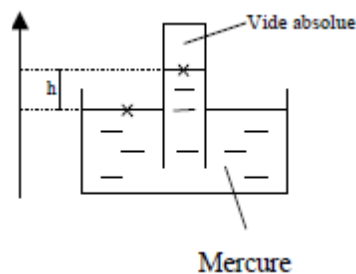
C'est l'équation générale de l'hydrostatique (**Principe de la statique**).

2.4 APPLICATIONS :

BAROMETRE DE TORICELLI : Déterminons la pression atmosphérique ?

$h = 76\text{cm}$ Principe de la statique entre A et B :

$$P_A + \rho_m g z_A = P_B + \rho_m g z_B$$



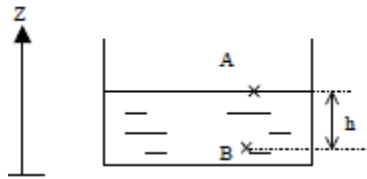
$$P_{\text{atm}} = P_{\text{vide}} + \rho_m g (z_A - z_B) = P_{\text{vide}} + \rho_m g h$$

$$= 0 + 13600 * 9.8 * 0.76$$

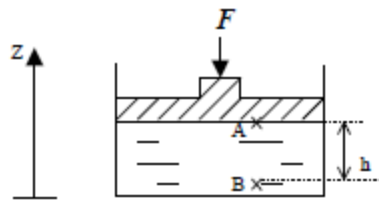
2.5 Principe de Pascal :

Soit un liquide incompressible de masse volumique (ρ) :

Principe de la statique entre A et B : $P_B = P_A + \rho \cdot g \cdot h$



Si on exerce une force sur la surface, on provoque une surpression ΔP :



$$P_A' = P_A + \Delta P$$

Principe de la statique :

$$P_B' = P_A' + \rho \cdot g \cdot h$$

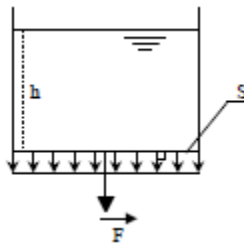
$$P_B' = P_A + \Delta P + \rho \cdot g \cdot h$$

$$P_B' = P_B + \Delta P$$

2.6 Force de pression sur une surface:

2.6 .1 Force de pression sur une surface horizontale:

On considère un réservoir ouvert à l'air libre de surface de base S contenant une hauteur h de liquide de masse volumique ρ .



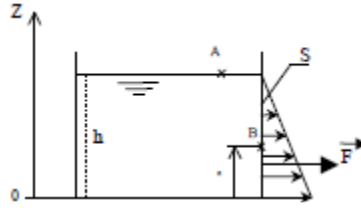
$$P_{\text{eff}} = \rho \cdot g \cdot h \quad \text{et} \quad F = + P_{\text{eff}} \cdot ds$$

$$F = \int \rho \cdot g \cdot h \cdot ds$$

$$F = \rho \cdot g \cdot h \cdot \int ds$$

$$F = \rho \cdot g \cdot h \cdot S$$

2.6.2 Force de pression sur une surface verticale:



La pression en un point (B) quelconque de la surface est :

$$P_{B \text{ eff}} = P_{A \text{ eff}} + \rho \cdot g \cdot (h-z) = P_{\text{atm eff}} + \rho \cdot g \cdot (h-z) \quad \text{D'où } P_{B \text{ eff}} = \rho \cdot g \cdot (h-z)$$

$$F = \int P_{B \text{ eff}} \cdot ds = \int \rho \cdot g \cdot (h-z) \cdot ds$$

$$= \int \int \rho \cdot g \cdot (h-z) \cdot dy \cdot dz$$

$$= \int_0^L dy \cdot \int_0^h \rho \cdot g \cdot (h-z) \cdot dz$$

$$F = \rho \cdot g \cdot L \cdot \frac{h^2}{2} \quad \text{et} \quad S = h \cdot L$$

$$F = \rho \cdot g \cdot S \cdot \frac{h}{2}$$

Cas général :

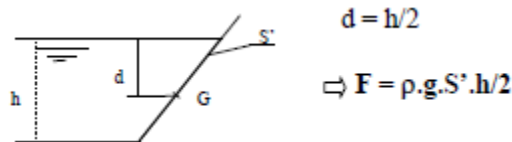
$$F = \rho \cdot g \cdot S \cdot d \quad (\text{N})$$

Avec : S : surface mouillée considérée en (m) .

d : distance verticale entre le centre de gravité et la surface libre en (m).

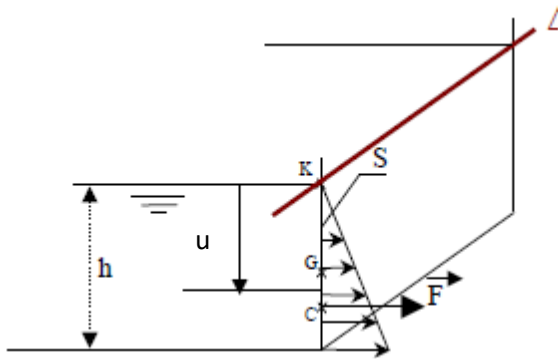
Pour une paroi verticale : d = h/2

Pour une paroi *Inclinée* :



2.7 Centre de poussée :

C'est le point d'application de la résultante de la force de poussée sur la surface de contact. Le centre de poussée CP est déterminé en utilisant le principe des moments : la somme des moments des forces exercées par rapport à un axe est égale au moment de la résultante de ces forces par rapport au même axe.



D'une façon générale : $dM / \Delta = dF.u = P_{eff} .u. ds = \rho.g. u^2.ds$

$$M / \Delta = \int dM / \Delta = \int \rho.g. u^2.ds = \rho.g. \int u^2.ds$$

D'autre part: $M / \Delta = F. KC = \rho .g.S. KG. KC$, $KC = \frac{\int U^2.ds}{S.KG}$

$I_{\Delta} = \int u^2.ds$: moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe Δ

D'où $KC = I_{\Delta} / S.KG$ avec : $KC = y_c$ et $KG = y_G$, On utilise le théorème de

Huygens : $I_{\Delta} = I_{\Delta G} + S. KG^2$

$I_{\Delta G}$: Moment d'inertie de la surface AB par rapport à un axe passant par son centre de gravité G.

On aura finalement : $y_c = I_{\Delta G} / (S.y_G) + y_G$

On a : $S = L.h$ et $y_G = h/2$ et $I_{\Delta G} = Lh^3 / 12$, D'où : $y_c = 2/3 h$

Δ : c'est l'intersection de la surface libre et la surface mouillée ou son prolongement.

2.8 Conclusion :

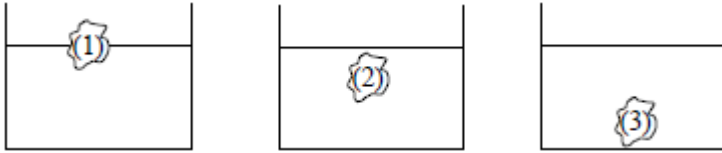
Le point d'application de la résultante F se trouve toujours plus bas que le centre de gravité d'une distance égale à : $I_{\Delta G} / (S.y_G)$

Le tableau suivant résume les moments d'inertie de quelques surfaces particulières:

Type	Surface	Moment d'Inertie I_{CC}
Rectangle 	bh	$\frac{bh^3}{12}$
Triangle 	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$
Cercle 	πR^2	$\frac{\pi R^4}{4}$

2.9 Poussée d'Archimède :

Un solide placé dans un liquide au repos peut prendre l'une des positions suivantes :



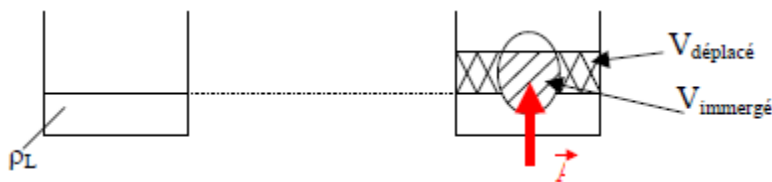
1) Une partie seulement du solide est immergé (à l'intérieur du liquide)

On dit que « le solide flotte »

2) Le solide est complètement immergé et reste entre 2 couches liquides

3) Le solide est complètement immergé mais touche le fond (il coule)

Dans les différents cas, le solide subit de la part du liquide qui l'entoure une poussée (poussée d'Archimède) verticale, dirigée de bas en haut et égale au poids du volume du liquide déplacé. Cette force est appliquée au centre de gravité du liquide déplacé



La poussée d'Archimède est : $A = \rho_L V_{\text{dép.}} \cdot g$

Le liquide étant incompressible $V_{\text{dép.}} = V_{\text{im}}$

D'où : $A = \rho_L \cdot g \cdot V_{\text{im}}$ A en (N), ρ_L (Kg/m^3) , g (m/s^2) et V_{im} (m^3)

a- Condition de flottaison :

À l'équilibre statique $\Sigma F = 0$

ρ_s : masse volumique du solide. , V_s : volume de solide

$P = A$, or on a $P = \rho_s \cdot V_s \cdot g$, Et $A = \rho_L \cdot g \cdot V_{\text{im}}$

Conclusion : Pour que le solide Flotte, il faut que $\rho_s < \rho_L$

b- condition d'immersion :

À l'équilibre statique $\Sigma F = 0$

Conclusion : pour que le solide soit immergé et reste entre deux couches liquides, il faut que : $\rho_s = \rho_L$

c- Solide complètement immergé et touche le fond :

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot Z_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = P_2 + \rho \cdot g \cdot Z_2 + \rho \frac{V_2^2}{2}$$

Les termes de cette équation sont des énergies par unité de volume (J/m^3), ce sont aussi des termes de pression (Pa).

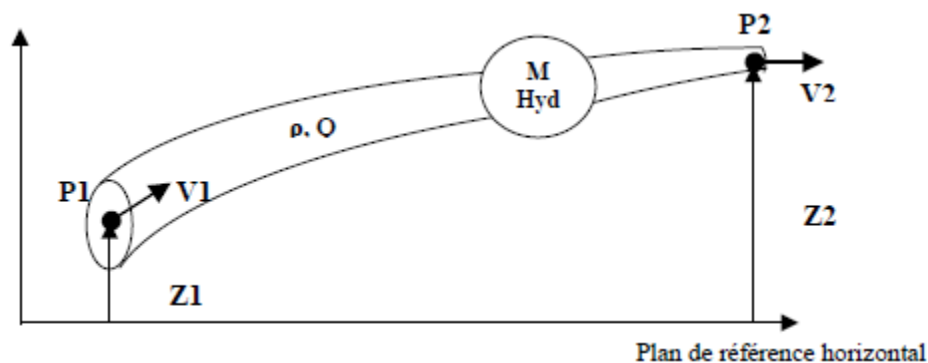
En effet, $1J/ m^3 = 1N \cdot m/m^3 = 1N/m^2 = 1Pa$

Donc le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie par unité de volume.

- **P** : Pression statique : C'est la grandeur que l'on mesure par exemple par un manomètre ou l'énergie potentielle de pression/ unité de volume.
- $\rho g z$: Energie potentielle de position par unité de volume
- $(1/2)\rho V^2$: Energie cinétique par unité de volume ou pression dynamique

2.10.3 Fluide parfait traversant une machine hydraulique :

Conservation de l'énergie



Machine hydraulique : * Réceptrice : turbine

* Génératrice : pompe

La turbine transforme l'énergie hydraulique du liquide en énergie mécanique [3].

La pompe transforme l'énergie mécanique fournie par un moteur en énergie hydraulique.

Considérons une machine hydraulique parcourue par un débit Q d'un fluide de masse volumique ρ .

La conservation de l'énergie s'écrit :

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot Z_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = P_2 + \rho \cdot g \cdot Z_2 + \rho \frac{V_2^2}{2} \pm E$$

E : Quantité positive (unité : Pascal), c'est l'énergie par unité de volume fournie par une pompe au liquide ou absorbée par une turbine.

On écrira : + E pour une M. réceptrice - E pour une M. Génératrice

CHAPITRE 3 : Eléments de calcul tensoriel

Tenseur

3.1 scalaire: ou tenseur d'ordre 0:

Un scalaire est défini par un seul nombre et indépendant des axes de référence [donc indépendant de toute notion d'orientation). Citons parmi les grandeurs scalaires : masse, densité, température, volume.

3.2 Vecteurs :

Par opposition aux scalaires, il existe des grandeurs physiques très différentes, les vecteurs, est défini par deux ou trois nombre, c'est le cas par exemple d'une force ou de l'intensité du champ électrique, le gradient de température en un point.

Nous pouvons désigner un vecteur par \vec{E}

E représentant l'intensité du vecteur. Nous choisirons cette convention.

3.3 Représentant d'un vecteur:

Choisissons un trièdre trirectangle Ox_1, Ox_2, Ox_3 . Les composantes du vecteur sur les axes (c'est-à-dire les projections du vecteur sur les axes) représentent le vecteur en intensité et directions.

$$\vec{E} \begin{cases} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = E_1, E_2, E_3$$

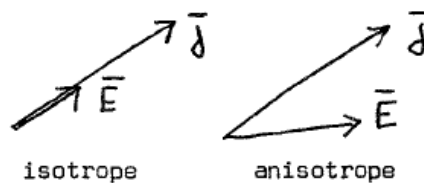
Un vecteur est un tenseur d'ordre 1 .

3.4-tenseur de range 2 (ou d'ordre 2)

Nous pouvons généraliser la notion de vecteur. Appliquons un champ électrique Représenté par le vecteur \vec{E} , sur un conducteur. Il se produit un courant électrique.

La densité de courant (intensité par unité de surface perpendiculaire au courant: est représentée par le vecteur \vec{j}) Si le conducteur est isotrope et d'après la loi d'Ohm, on a

$$\vec{j} = \delta \cdot \vec{E} \quad (1)$$



$\delta =$ Conductivité.

Si dans le système d'axes Ox_1, Ox_2, Ox_3

$$\vec{j} = [j_1, j_2, j_3] \quad \text{et} \quad \vec{E} = [E_1, E_2, E_3]$$

$$\text{On a } j_1 = \sigma E_1 \qquad j_2 = \sigma E_2 \qquad j_3 = \sigma E_3 \qquad (2)$$

Chaque composante de \vec{j} est proportionnelle à la composante correspondante de \vec{E} .

Par contre, si le conducteur est anisotrope [cas d'un cristal) la relation entre les composantes de \vec{j} et de \vec{E} n'a plus la forme simple de l'équation (2).

Remarque: Les cristaux du système cubique forment un groupe particulier dont la conductivité est isotrope.

L'équation (2) est remplacée, pour les cristaux, par les relations (3)

$$\left. \begin{aligned} j_1 &= \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 \\ j_2 &= \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3 \\ j_3 &= \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

σ_{ij} , étant des constantes.

Il y a donc des composantes de \vec{j} non seulement sur l'axe 1 mais aussi sur les autres axes : la composante dans la direction du champ est donnée par σ_{11} et les deux composantes transversales par σ_{21} et σ_{31} . De façon semblable, σ_{23} mesure la composante de \vec{j} parallèle à x_2 quand le champ est parallèle à x_3 .

Ainsi la conductivité d'un cristal est une propriété qui est décrite par neuf coefficients, que l'on peut écrire sous la forme d'un tableau carré, entre deux crochets, qui symbolise un tenseur de rang 2:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \rightarrow [\sigma_{ij}] \\ \downarrow \\ \text{ligne colonne} \end{array}$$

σ_{ij} : sont les composantes du tenseur.

On dit σ_{ij} tenseur d'ordre deux.

La notation introduite traduit bien ces distinctions : scalaire s'écrit sans indice, les composantes d'un vecteur avec 1 indice, celles d'un tenseur de rang 2 avec deux indices. Le nombre des indices donne le rang du tenseur

D'une façon générale, si une propriété T lie deux vecteurs $\vec{P} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ de telle sorte que:

$$\begin{aligned} P_1 &= T_{11} q_1 + T_{12} q_2 + T_{13} q_3 \\ P_2 &= T_{21} q_1 + T_{22} q_2 + T_{23} q_3 \\ P_3 &= T_{31} q_1 + T_{32} q_2 + T_{33} q_3 \end{aligned} \quad (6)$$

T_{ij} Étant des constantes, on dit que T_{ij} représente un tenseur de rang deux.

Un grand nombre de propriétés, en physique, font appel à des tenseurs de rang deux: exemple la conductivité électrique, thermique, perméabilité etc...

Notation des indices muets

Il faut simplifier les notations. Les équations (6) peuvent s'écrire :

$$P_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} q_j \quad i = (1, 2, 3) \quad (7)$$

On supprime le signe \sum :

$$P_i = T_{ij} q_j \quad (ij = 1, 2, 3) \quad (8)$$

En adoptant la convention d'Einstein ; quand un indice intervient 2 fois dans un terme monôme, la sommation par rapport à cet indice est sous-entendue.

Ainsi (6), (7) et (8) sont équivalentes. Dans l'équation (8), j est dit indice muet et i indice libre.

P_i : désigne vecteur $\vec{P} [p_1, p_2, p_3]$

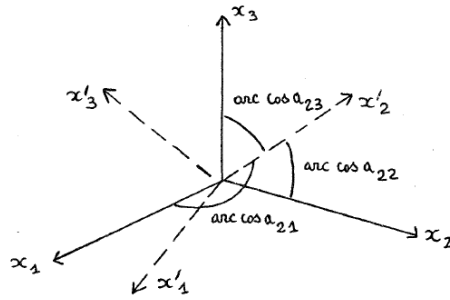
q_i : désigne vecteur \vec{q}

T_{ij} : désigne tenseur $[T_{ij}]$

Transformation des axes:

Considérons un changement d'axes c'est-à-dire le passage d'un système d'axes trirectangles à un autre trirectangles avant la même origine. Sur chaque axe, l'unité de longueur reste la même. Le premier système est x_1, x_2, x_3 , le second x'_1, x'_2, x'_3 .

Matrice de passage



Les relations angulaires liant les axes sont données par le tableau suivant (tableau des cos. directeurs).

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Par exemple :

les cos directeurs de x'_2 par rapport à x_1, x_2, x_3 sont a_{21}, a_{22} et a_{23} et les cos directeurs de x_3, x'_1, x'_2 et x'_3 sont a_{13}, a_{23} et a_{33} - Ainsi:

$$a_{ij} = \cos \text{ angle } (x'_i, x_j)$$

\swarrow \searrow
 nouveaux anciens
 axes

Anciens axes

	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Nouveaux x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Le tableau des a_{ij} est une matrice : désigné symboliquement par (a_{ij}) . Les 9 composantes ne sont pas indépendantes les unes des autres. Vous pourrez d'ailleurs en exercice établir les relations qui existent entre les cos directeurs a_{ij}

Les 9 coefficients a_{ij} ne sont pas indépendants. Considérons le nombre de degrés de liberté de la transformation: si les axes Ox_1 , Ox_2 et Ox_3 sont donnés, il faut 2 angles pour préciser la direction de Ox_1 (latitude et longitude). Les nouveaux axes peuvent encore tourner autour de Ox_1 et un autre angle, l'angle de rotation autour de Ox_1 est nécessaire pour les fixer complètement. Ainsi trois quantités indépendantes suffisent pour définir la transformation : nous devons donc trouver 6 relations indépendantes entre les 9 coefficients a_{ij} .

Chaque ligne du tableau [1] représente les 3 cos directeurs d'une droite par rapport à 3 axes orthogonaux Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 . On a donc:

$$\begin{array}{ll} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 & a_{1k}a_{1k} = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 & a_{2k}a_{2k} = 1 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 & a_{3k}a_{3k} = 1 \end{array}$$

Ou $a_{ik}a_{jk} = 1$ si $i = j$

De plus, 2 lignes successives du tableau CD représentent les cos directeurs de 2 axes rectangulaires.

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 \\ a_{31}a_{31} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_{1k}a_{2k} = 0 \\ a_{2k}a_{3k} = 0 \\ a_{3k}a_{1k} = 0 \end{array}$$

Ou $a_{ik}a_{jk} = 0$ si $i \neq j$

Les équations (2) et (3) sont appelées relations d'orthogonalité (6)

On peut les exprimer en une seule équation :

$$a_{ik}a_{jk} = \sigma_{ij}$$

σ_{ij} = symbole de KRONECKER = $\begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ = matrice unité (σ_{ij})

Le même raisonnement peut être fait pour les colonnes mais les relations n'apportent pas de renseignements nouveaux.

3.5 Produit tensoriel:

on définit le produit tensoriel du vecteur \vec{u} par le vecteur \vec{V} noté $\vec{u}(\times)\vec{V}$, comme le tenseur d'ordre deux.

$$\vec{u}(\times)\vec{V} = \begin{bmatrix} u_1V_1 & u_1V_2 & u_1V_3 \\ u_2V_1 & u_2V_2 & u_2V_3 \\ u_3V_1 & u_3V_2 & u_3V_3 \end{bmatrix}$$

Le résultat d'un produit tensoriel est simple, n l'ordre du 1^{er} tenseur et m l'ordre du second ($m=1$ pour un vecteur, 2 pour un tenseur d'ordre 2)

Le résultat du produit tensoriel $A = b(\times)c$ est un tenseur d'ordre $(n+m)$.

3.6 Calcul:

3.6.1 Matrice: définition

Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de K

$$A = \begin{bmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \dots & a_{1.p} \\ a_{n.1} & a_{n.2} & \dots & a_{n.p} \end{bmatrix}$$

* A est dit de taille n x p si elle a n lignes et p colonnes

* les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A

* $a_{j,i}$: est les coefficients en i-ème ligne et j-ème colonne

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, matrice 2x3.

* Deux matrices sont égales si elles ont mêmes coefficients.

n = p matrice carrée, on note $M_n(K) = M_{n,n}(K)$.

$$\begin{pmatrix} a_{1.1} & a_{1.2} & \dots & a_{1.n} \\ \vdots & a_{2.2} & & \\ a_{n.1} & \dots & \dots & a_{n.n} \end{pmatrix}$$

$a_{1.1}, a_{1.2}, a_{1.3}, \dots, a_{n.n}$ forment la diagonale principale.

3.6.2 Somme de deux Matrices:

La somme $C=A+B$ est la Matrice n x p définie par

$$C_{ij} = a_{ji} + b_{ij}$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Par contre si $B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, alors $A+B'$ n'est pas définie.

* **définition:** Produit d'une matrice par un scalaire.

$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$ Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition:

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$A + 0 = A$, la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$$

***Définition:** produit de deux matrices:

$A = (a_{ij})$ Une matrice n x p et $B = (b_{ij})$ une matrice p x q alors le produit A.B est une matrice n x q définie par $C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$C = A.B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq B.A$$

$AB = 0$ N'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Ab = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

* $A(BC) = (AB).C$

* $A(BC) = AB + AC$

$(B + C)A = BA + C.A$

3.6.3 Matrice Identité:

La matrice carrée suivante s'appelle la matrice identité notée I_n ou I .

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit le symbole de Kronecker S_{ij}

$$S_{ij} = \begin{cases} 0. & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{Alors } I_n = (S_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Proposition: si A est une matrice $n \times p$, alors

$$I_n.A = A$$

$$A^0 = I_n, A^2 = A.A, A^3 = A.A.A$$

3.6.4 Inverse de matrice:

Exemple: soit la matrice $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Calcul des cofacteurs

$$\text{ligne 1: } B_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, B_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1, B_{13} = + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{ligne 2: } B_{21} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, B_{22} = + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2, B_{23} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{ligne 3: } B_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3, B_{32} = - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, B_{33} = + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$N = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$${}^tN = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & +2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

L'inverse de B est $B^{-1} = \frac{1}{D_B}. {}^tN$

$$D_B = |B| = -2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -6 - 1 + 4 = -3$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & +1 & -3 \end{bmatrix}$$

Un système linéaire a n lignes et p un connues:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_{21} \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Ecrit aussi:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$$

cas au le nombre d'équation égal le nombre d'inconnues:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$$

La solution du système $Ax = B$ est uniquement est: $X = A^{-1} \cdot B$

A matrice carrée de taille n x n.

* A est: triangulaire inférieure si ses éléments au dessus de la diagonale sont nuls $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

* A est triangulaire supérieure si ses éléments en dessous de la matrice diagonale sont nuls $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

triangulaire inférieure triangulaire supérieure

3.6.5 Motrice transposée:

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille n x p.

La matrice transposée de A, notée A^T est la matrice de taille p x n définie par:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(AB)^T = A^T + B^T$$

3.6.6 Matrice symétrique:

Une matrice carré A de taille $n \times n$ est symétrique si elle est égale à sa transpose, c'est à dire si $A = A^T$.

Donc $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$

Exemple: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est symétrique

matrice antisymétrique si $A^T = -A$ alors, $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$

Exemple: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique

les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls (car en prenant $i = j$ on a $a_{ij} = -a_{ij}$).

Chapitre 4 Cinématique:

Il s'agit de l'étude des fluides en mouvement: on s'attachera à faire une description des écoulements sans avoir recours au calcul des forces mises en jeu:

4.1 Définitions:

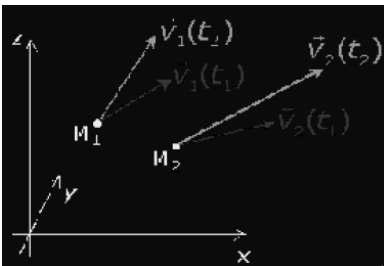
4.1.1 : la particule fluide:

- la particule fluide est choisie comme entité élémentaire permettant une description complète des écoulements:
- il s'agit d'un "paquet" des molécules entourant un point M donné; celles-ci sont alors supposées avoir toutes la même vitesse au même instant.

4.2 : Description d'Euler et de Lagrange:

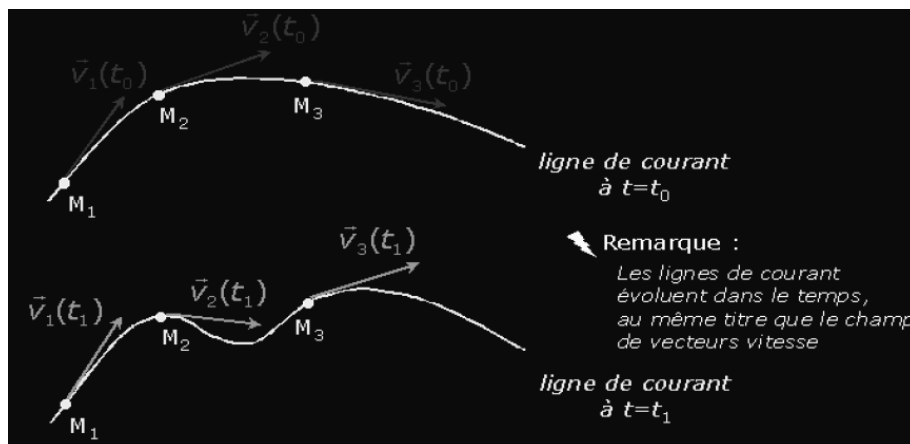
4.2.1- Description d'Euler:

Cette description de l'écoulement consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide [7]:



- la vitesse $\vec{v}_m(t)$ associée au point m évolue au cours du temps.
- A chaque instant t , l'écoulement du fluide est décrit au moyen d'un champ de vecteurs vitesse.

Dans cette description d'Euler, on appelle "**ligne de courant**" la courbe qui, en chaque de ses points, est tangente aux vecteurs vitesse.

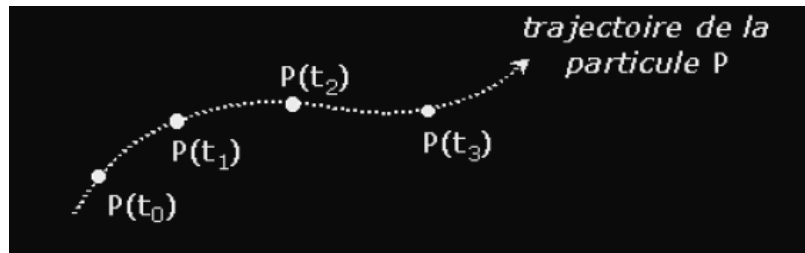


4.2.2 Description des Lagrange:

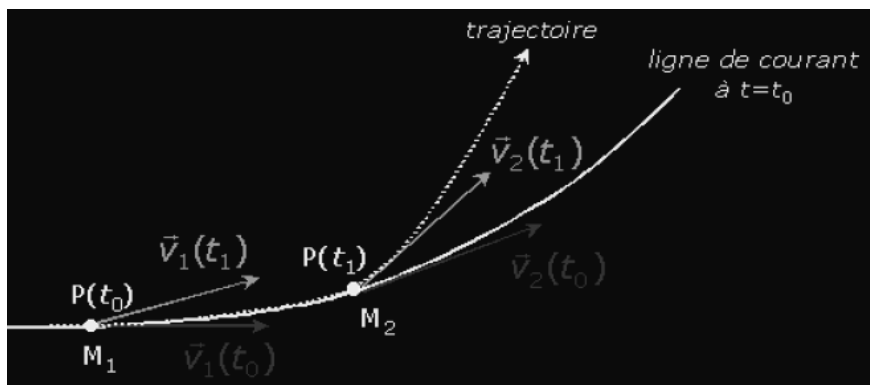
Cette Description de l'écoulement consiste à suivre une particule donnée au cours de son mouvement au sein du fluide.

Ici, c'est l'évaluation de la position des particules qui permet la description de l'écoulement.

Ainsi, le lieu géométrique des positions successives occupées par une particule constitue ce qu'on appelle la "**trajectoire**" de cette particule.



-il ne faut pas confondre ligne de courant et trajectoire. Ce sont deux notions bien différentes.

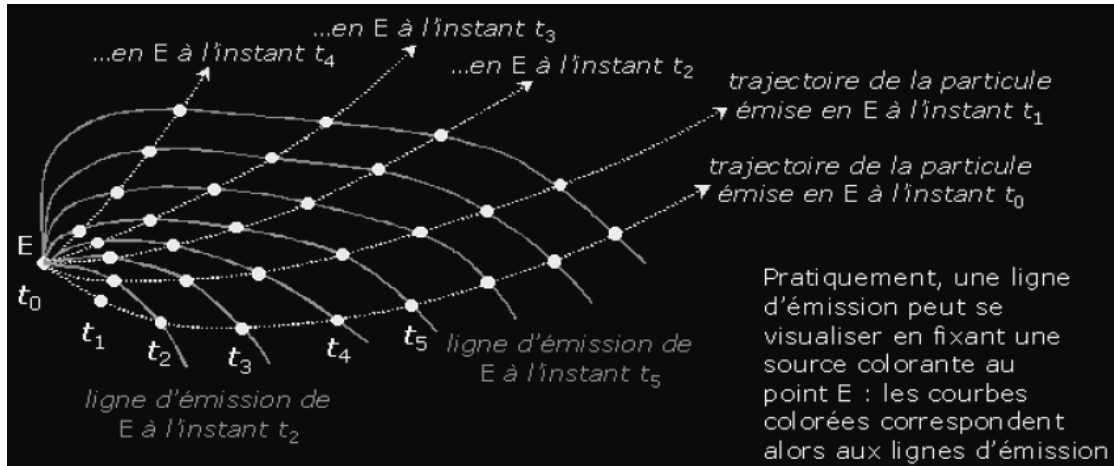


Remarque:

Si l'écoulement est stationnaire, le champ de vecteurs vitesse est constant dans le temps: il y a coïncidence entre lignes de courant et trajectoires.

4.3: ligne d'émission:

Toutes les particules qui sont passées par un même point E sont situées, à l'instant t, sur une courbe appelée "ligne d'émission"



Écoulement permanent:

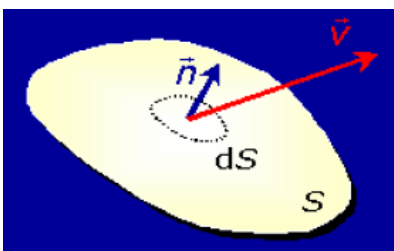
Un écoulement est dit permanent (ou stationnaire) lorsque le champ de vecteurs vitesse est statique: il ne varie pas dans le temps [8].

Dans ce cas:

- les lignes de courant sont fixes dans l'espace.
- les trajectoires coïncident avec les lignes du courant.
- les lignes d'émission coïncident également avec les lignes de courant.

Lignes de courant \equiv trajectoire \equiv ligne d'émission

Débit:

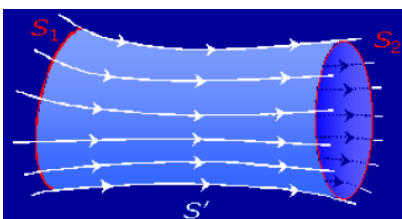


- A travers la surface S, le débit massique de fluide est donné par:

$$q_m = \int_S \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

- A travers la surface S, le débit volumique de fluide est donné par:

$$q_v = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS$$



Toutes les lignes de courant s'appuyant sur une même courbe fermée constituent une surface (S') appelée "tube de courant"

* si l'écoulement est permanent (le tube n'évolue pas dans le temps), alors le débit massique est conservé: $q_m(s_1) = q_m(s_2)$

* si le fluide est incompressible, alors le débit volumique est conservé:

$$q_v = q_{v1} = q_{v2} = V_1 S_1 = V_2 S_2$$

4.4 L'équation de continuité:

- cas général:

L'équation de continuité doit traduire le principe de conservation de la masse. [9]

- la variation de masse pendant un temps dt d'un élément de volume fluide. Doit être égale à la somme des masses de fluide entrante diminuée de celle de fluide sortant.

- on considère alors un élément de volume fluide: $dV = dx dy dz$ sa masse peut s'exprimer comme: $m = \rho dx dy dz$ pendant le temps dt , la variation de cette masse s'écrit:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

Cette variation doit alors être égale à:

I- la somme des masses de fluide qui entre et sort par les 6 faces de l'élément de volume dV .

II- la somme des masses fluides spontanément détruites (puits). Au créées (source) à l'intérieur de dV .

On a: la vitesse : $\vec{V} = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_y + w \cdot \vec{e}_z$

Suivant l'axe y , le fluide entre avec la vitesse v_y et sort avec la vitesse v_{y+dy} , par conséquent, la masse entrant pendant le temps dt s'exprime.

Entrant $[\rho v dx dz dt]$ puisque $q_m = \frac{m}{t}$

Et $q_m = \rho Q_v = \rho v dx dz$

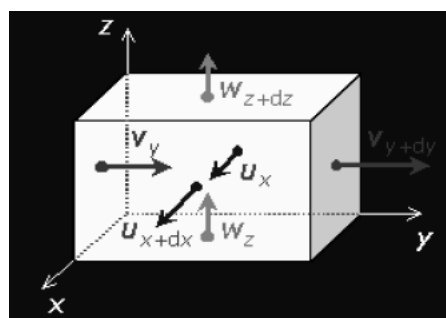
On a, par ailleurs, pour la masse sortant:

$$[\rho v dx dz]_{y+dy}$$

Le bilan sur l'axe y donne alors: $([\rho v]_y - [\rho v]_{y+dy}) dx dz dt$

Un développement au 1^{ère} ordre permet d'écrire : $[\rho v]_{y+dy} = [\rho v]_y + \frac{\partial[\rho v]}{\partial y} dy$

Donc il reste: $-\frac{\partial[\rho v]}{\partial y} dy dx dz dt$ suivant l'axe y .



Et par analogie sur les 2 autres axes, on trouve:

$$-\frac{\partial[\rho v]}{\partial x} \underbrace{dx dy dz}_{dv} dt \text{ suivant l'axe } x,$$

$$-\frac{\partial[\rho w]}{\partial z} \underbrace{dx dy dz}_{dv} dt \text{ suivant l'axe } z.$$

Au totale, à travers les 6 faces on a: $-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dv dt$

Donc: $dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt = -\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dv dt + \text{(II)}$

(II): la somme des masses de fluide spontanément détruites (puits) ou créées (sources) à l'intérieur de dV .

$$\text{(II)} = \sum_i \rho q_{vi} dV dt$$

bilan global: $dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} \underbrace{dx dy dz}_{dv} dt = -\frac{\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]}{\vec{\nabla}(\rho \vec{V})} dv dt + \sum_i \rho q_{vi} dV dt$

alors: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}(\rho \vec{V}) + \sum_i \rho q_{vi}$

C'est l'équation de continuité (équation qui traduit le principe de conservation de la masse).

Cas particuliers:

* écoulement **permanent** (ou stationnaires):

dans ce cas, il n'y a pas de variation explicite avec le temps:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \text{ d'où } \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) + \sum_i \rho q_{vi}$$

* écoulement de fluide **incompressible**: $\rho = C^{te} \quad \forall \vec{r}, \forall t \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = \rho \vec{\nabla} \vec{V} \end{cases}$

d'où $\vec{\nabla} \vec{V} = \sum_i q_{vi}$

* écoulement **conservatif**: il n'y a ni puits ni source: $\Rightarrow \sum_i q_{vi} = 0$

Et s'il s'agit en outre d'un fluide incompressible: $\vec{\nabla}$

Chapitre 5 Déformation

Déformation et rotation

La déformation d'un milieu continu est caractérisée par le déplacement relatif des divers points matériels qui constituent ce milieu. Nous présentons, dans ce chapitre, l'aspect géométrique des déformations par la description des mouvements simples: translation, rotation, dilatation, déformation angulaire. Il s'agit d'un simple rappel des notions présentées dans le cours de Mécanique des Milieux Continus.

En Mécanique des Fluides, le paramètre important n'est pas tant la déformation que la vitesse à laquelle la déformation intervient, et nous introduisons ici la notion de taux de déformation et de taux de rotation.

5.1 Translation

- Définition: Une translation pure est un mouvement dans lequel toutes les particules subissent le même déplacement[10].

En notant \vec{x} la position d'une particule fluide un instant donné, \vec{x}' sa position à un instant ultérieur et \vec{a} le déplacement:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}(t)$$

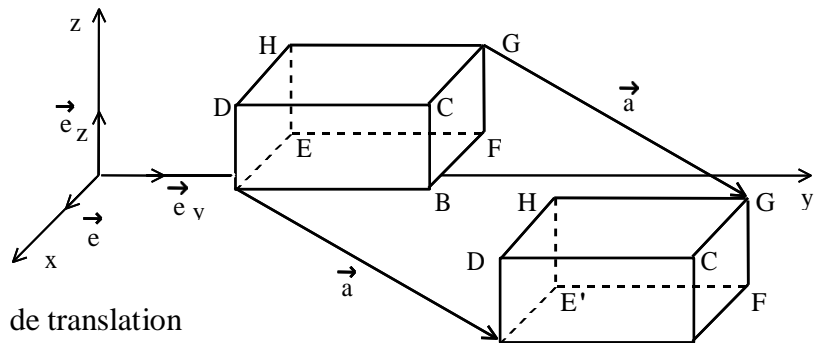
La figure représente la translation

d'un élément fluide de forme géométrique simple.

Le volume matériel initial

conserve sa forme. Le mouvement de translation

s'effectue sans déformation.



Le vecteur de vitesse, défini par (3.5): $\vec{V}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{a}(t)}{\partial t} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{V}(t)$ est le même pour toutes les particules.

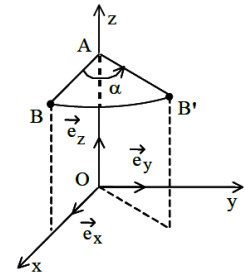
5.2 Rotation

a) Définition: Une rotation pure est mouvement dans lequel toutes les particules tournent d'un même angle autour d'un axe donné.

b) Illustration: Soit par exemple la rotation d'un angle $\alpha(t)$ autour de l'axe Oz; une particule initialement en B se déplace au point B' tel que $AB' = AB$ et $\alpha = \widehat{BAB}'$.

On peut donc écrire:
$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

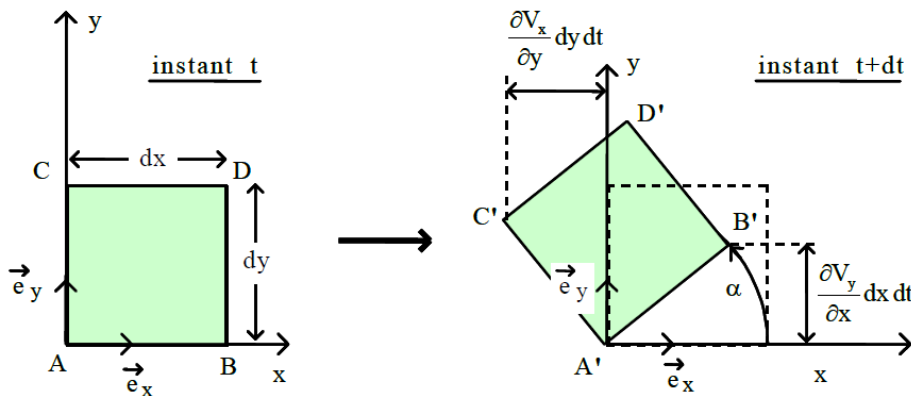
ou encore sous forme matricielle: $\vec{x}' = R \vec{x}$ où R est la matrice antisymétrique de la rotation



$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Taux de rotation:

Considérons le déplacement de la ligne fluide AB. Si V_y est la vitesse du point A dans la direction \vec{e}_y , la vitesse du point B est $V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx$. Le déplacement du point B pendant l'intervalle de temps dt est $V_y dt + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx dt$ et le segment fluide AB subit donc une rotation d'angle $\alpha = \frac{\partial V_y}{\partial x} dx dt / dx = \frac{\partial V_y}{\partial x} dt$. On peut donc exprimer le taux de rotation instantané du segment fluide AB: $\frac{\partial V_y}{\partial x} dt / dt = \frac{\partial V_y}{\partial x}$



De même le taux de rotation instantané du segment fluide AC est $\frac{\partial V_x}{\partial y} dy dt / dy dt = -\frac{\partial V_x}{\partial y}$ et

le rotation moyen autour de l'axe Oz est donc:

On peut aisément généraliser ce résultat au cas d'une rotation tridimensionnelle:

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

On peut aisément généraliser ce résultat au cas d'une rotation tridimensionnelle:

$$\begin{cases} \Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \\ \Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \end{cases}$$

d) Vecteur tourbillon:

Le vecteur $\varepsilon_{ijk} V_{k,j} \vec{e}_i = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$ est souvent appelé vorticité de l'écoulement. On appelle vecteur tourbillon le vecteur $\vec{\Omega}$ défini par (4.2) comme la moitié de la vorticité

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$$

et qui s'interprète comme une vitesse angulaire locale.

Un écoulement est dit irrotationnel si $\vec{\Omega} = \vec{0}$. Le rotationnel du champ de vitesse étant nul celui-ci dérive d'un potentiel:

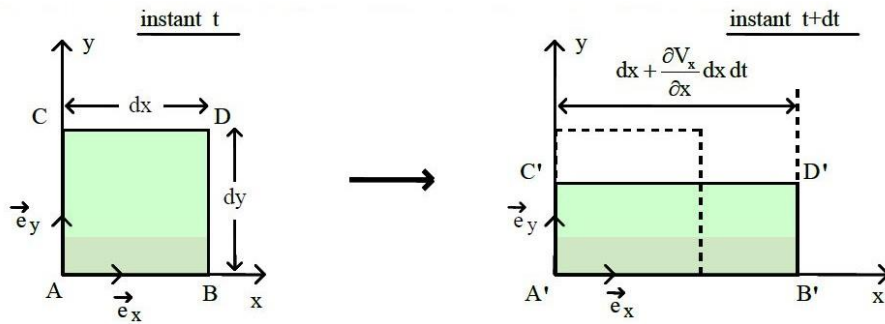
$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$$

et l'analyse de l'écoulement peut être faite à l'aide de cette fonction potentiel Φ .

5.3 Dilatation

a) Définition: On appelle dilatation la déformation unitaire associée à une variation de la vitesse dans la direction du mouvement. [10]

b) Illustration: On observe une dilatation pure dans la direction x sur le schéma ci-dessous.



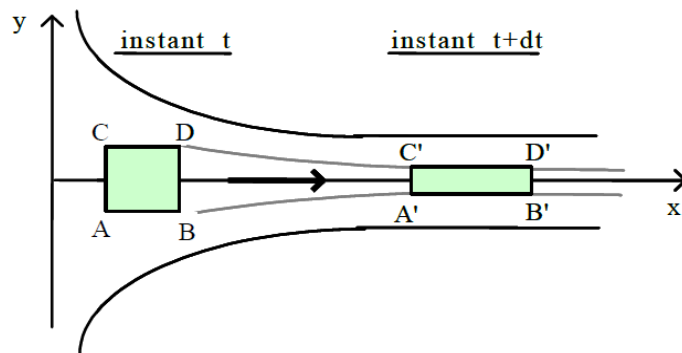
Si V^x désigne la vitesse au point A, on peut exprimer la vitesse en B par: $V_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}$ et la longueur du segment A'B' par $dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dt$. La variation relative de longueur du segment AB sera donc:

$$\left[\left(dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dt \right) - dx \right] / dx + \frac{\partial V_x}{\partial x} dt$$

On définit donc le taux de dilatation linéaire dans la direction x par

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}$$

On observe, par exemple, une dilatation (dans la direction de l'écoulement) des particules fluides dans une section convergente d'une conduite. Au taux de dilatation contraction $\partial V_x / \partial x$ dans la direction x correspond un taux de $\partial V_y / \partial y$ dans la direction y.



De façon générale, on appelle taux de dilatation volumique (ou cubique) la somme

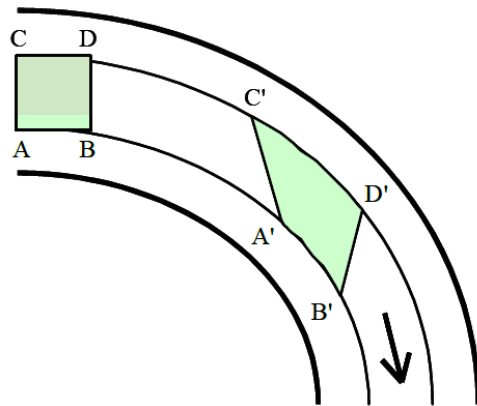
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \text{div } \vec{V}$$

5.4 Cisaillement

a) Définition: On appelle cisaillement la déformation angulaire associée à une variation de la vitesse dans la direction normale au mouvement. [11]

b) Illustration: Un cisaillement a lieu par exemple dans une conduite coudée puisque l'écoulement est alors plus rapide dans la partie intérieure du coude que dans sa partie extérieure.

Le segment fluide CD se déplace plus rapidement que le segment fluide AB. La déformation angulaire est proportionnelle à la différence de vitesse.



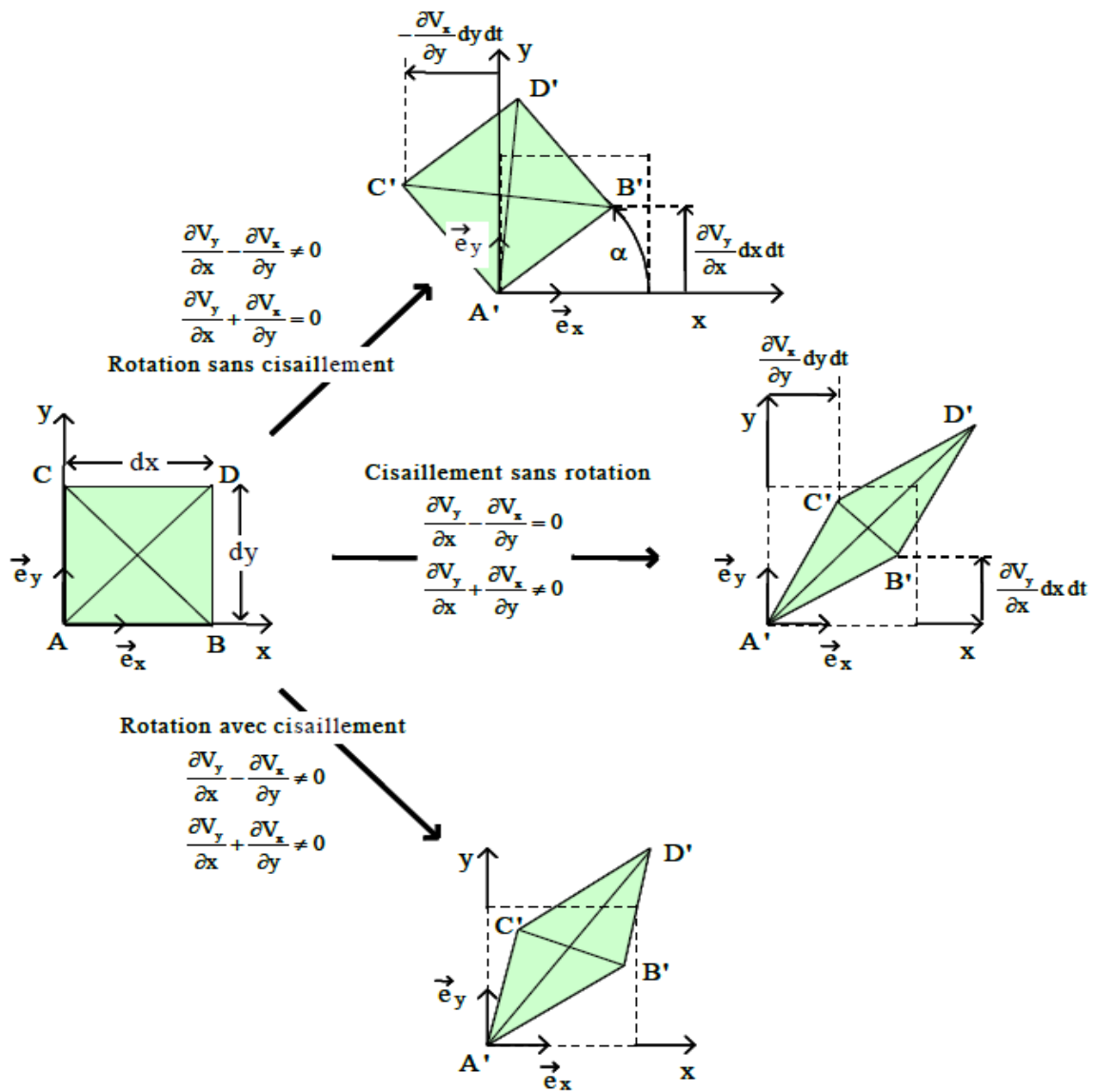
Considérons par exemple la déformation représentée sur le schéma de droite de la figure de la page suivante. Si V_x est la vitesse du point A, $V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy$ représente celle du point C. Pendant l'intervalle de temps dt le point A

Parcourt la distance $V_x dt$. Alors que le point C parcourt la distance $V_x dt + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy dt$. Dans ces conditions le segment AC pivote autour de A d'un angle $\frac{\partial V_x}{\partial y} dy dt / dy \frac{\partial V_x}{\partial y} dt$ à la vitesse angulaire $\frac{\partial V_x}{\partial y} dt / dt \frac{\partial V_x}{\partial y}$.

De la même manière si la vitesse du point B diffère de celle du point A, le segment AB pivote autour de A avec une vitesse $\frac{\partial V_x}{\partial y}$. La vitesse de déformation de l'angle \widehat{CAB} est la somme de ces deux vitesses angulaires:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

Sur le schéma considéré nous avons pris $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ et $\frac{\partial V_x}{\partial y}$ égaux. Dans ce cas particulier la direction de la bissectrice principale est conservée et la rotation moyenne est nulle. On dit que la particule fluide subit un cisaillement pur.



• Si les deux taux de déformation $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ et $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ ne sont pas égaux la particule subit à la fois une rotation et une déformation (schéma du bas sur la figure).

• Dans le cas où les taux de déformation sont égaux et opposés.

5.5 Décomposition du mouvement général d'une particule

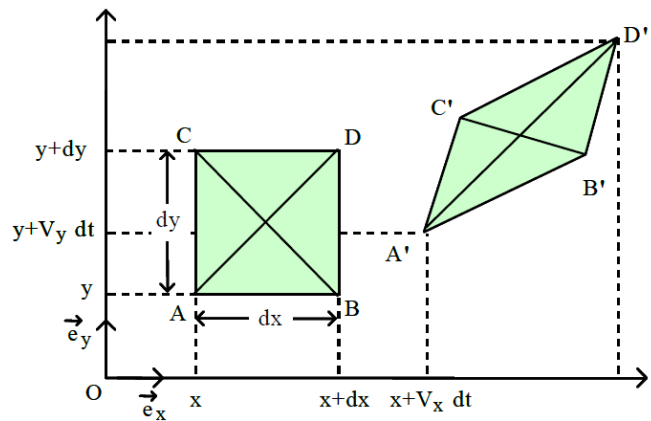
5.5.1 Cas 2D

Nous allons voir que dans le cas général un mouvement quelconque peut être décomposé en mouvements simples purs: translation, dilatation, déformation angulaire (cisaillement) et rotation. Considérons, pour simplifier l'exposé, un mouvement bidimensionnel quelconque (figure). La généralisation au cas tridimensionnel ne présentera aucune difficulté. [12]

Vitesse au point A(x,y): $V_a \begin{cases} V_x \\ V_y \end{cases}$

Vitesse au point D(x+dx, y+dy):

$$\vec{V}_D \begin{cases} V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} + dx \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \\ V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} + dx \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \end{cases}$$



À l'instant $t+dt$ le point A est passé en A' de coordonnées: $\begin{cases} x + V_x dt \\ x + V_y dt \end{cases}$ et le point D en D' de coordonnées:

$$\begin{cases} x + dx + \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} + dx \frac{\partial V_x}{\partial y} dy \right) dt \\ y + dy + \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} + dx \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \right) dt \end{cases}$$

On peut réécrire (4.6) en faisant apparaître l'expression des mouvements simples de translation, dilatation, déformation angulaire et rotation; il suffit d'ajouter et retrancher $1/2(\partial V_y / \partial x) dy dt$ à la première coordonnée et $1/2(\partial V_x / \partial y) dy dt$ à la seconde:

$$\begin{cases} \underbrace{x + dx}_{\text{Position init.}} + \underbrace{V_x dt}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial x} + dx dt}_{\text{Dilatation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy dt}_{\text{Déformation angulaire}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy dt}_{\text{Rotation}} \\ \underbrace{y + dy}_{\text{Position init.}} + \underbrace{V_y dt}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial y} + dx dt}_{\text{Dilatation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy dt}_{\text{Déformation angulaire}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dy dt}_{\text{Rotation}} \end{cases}$$

5.5.2 Cas 3D

Il est aisé de généraliser l'expression (4.7) au mouvement général d'une particule fluide dans un écoulement tridimensionnel. On obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x + dx + V_x dt + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx dt + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz \right] dt \\
 x + dy + V_y dt + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy dt + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) dy dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx \right] dt \\
 \begin{array}{l} x + dz \\ \text{Position} \\ \text{initiale} \end{array} + \begin{array}{l} V_z dt \\ \text{Translation} \\ \text{Dilatation} \end{array} + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz dt + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) dy dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy \right] dt
 \end{array} \right.$$

Déformation angulaire (Cisaillement)

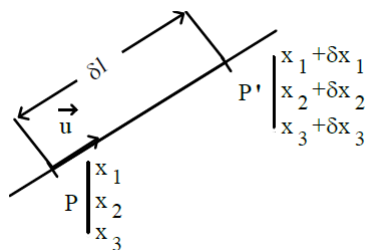
$$\left. \begin{array}{l}
 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dy dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz \right] dt \\
 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) dy dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx \right] dt \\
 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) dy dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy \right] dt
 \end{array} \right\}$$

Rotation

5.6 Taux de d'allongement d'un segment fluide

Nous allons maintenant déterminer le taux de d'allongement d d'un segment fluide, c'est-à-dire sa **variation de longueur par unité de longueur et de temps**. [11]

Soit δl la longueur initiale d'un segment fluide PP' orienté selon le vecteur unitaire \vec{u} . Conformément aux notations indiquées sur la figure on a:



$$(\delta l)^2 = \delta x_i \delta x_i$$

$$\text{et } u_i = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \frac{\delta x_i}{\delta l}$$

Le taux d'allongement du segment est défini par:

$$d = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta l} \frac{d(\delta l)}{dt} \right]$$

qu'on peut encore écrire:

$$\mathbf{d} = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(\delta l)^2} \frac{d(\delta l)^2}{dt} \right] = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(\delta l)^2} \frac{d(\delta x_i + \delta x_i)}{dt} \right] = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \left[\frac{\delta x_i}{(\delta l)^2} \frac{d(\delta x_i)}{dt} \right]$$

Or, puisque $\delta x_i = x_i(P') - x_i(P)$, on a:

$$\frac{d(\delta x_i)}{dt} = \frac{d[x_i(P')]}{dt} - \frac{d[x_i(P)]}{dt} = V_i(P') - V_i(P) + \delta V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta x_j + O((\delta x_j)^2)$$

Où les V_i sont les composantes du vecteur vitesse qu'on a développé en série de Taylor autour du point P. En substituant cette dernière expression dans la relation (4.10) on obtient:

$$\mathbf{d} = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \left[\frac{\delta x_j}{\delta l} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \frac{\delta x_i}{\delta l} \right]$$

Soit encore, en exprimant les composantes de \mathbf{u} d'après (4.9):

$$\mathbf{d} = u_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} u_j$$

Ainsi, le taux d'allongement dans la direction est déterminé par le tenseur gradient de la vitesse locale.

En notant $\overline{\overline{\mathbf{G}}} = \overline{\overline{\text{grad} \mathbf{V}}}$ le tenseur gradient des vitesses, on écrira: $\mathbf{d} = \vec{u} \cdot \overline{\overline{\mathbf{G}}} \cdot \vec{u}$

Avec

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} & V_{1,3} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & V_{2,3} \\ V_{3,1} & V_{3,2} & V_{3,3} \end{pmatrix}$$

5.7 Tenseur des taux de déformation et tenseur des taux de rotation

On décompose classiquement le tenseur gradient des vitesses $\overline{\overline{\mathbf{G}}}$ en la somme de sa partie symétrique $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ et de sa partie antisymétrique $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$ (voir les définitions §1.2.3-c): [9]

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$$

Avec

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad D_{ij} = D_{ji}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega_{ij} = \Omega_{ji}$$

Le tenseur $\bar{\bar{D}}$ est justement nommé tenseur des taux de déformation (stretching tensor); il est symétrique.

$$D_{ij} = \begin{pmatrix} V_{1,1} & \frac{1}{2}(V_{1,2} + V_{2,1}) & \frac{1}{2}(V_{1,3} + V_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(V_{1,2} + V_{2,1}) & V_{2,2} & \frac{1}{2}(V_{2,3} + V_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(V_{1,3} + V_{3,1}) & \frac{1}{2}(V_{2,3} + V_{3,2}) & V_{3,3} \end{pmatrix}$$

Le tenseur $\bar{\bar{\Omega}}$ est appelé tenseur des taux de rotation (spin tensor); il est antisymétrique.

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(V_{1,2} - V_{2,1}) & \frac{1}{2}(V_{1,3} - V_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(V_{1,2} - V_{2,1}) & 0 & \frac{1}{2}(V_{2,3} - V_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(V_{1,3} - V_{3,1}) & \frac{1}{2}(V_{2,3} - V_{3,2}) & 0 \end{pmatrix}$$

Les composantes cartésiennes de ces tenseurs sont données en coordonnées rectangulaires, cylindriques et sphériques en Annexes.

• Nous allons maintenant montrer que seul D_{ij} intervient dans la détermination du taux d'allongement \mathbf{d} . On peut en effet décomposer l'égalité (4.11):

$$\mathbf{d} = u_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} u_j = u_i D_{ij} u_j + u_i \Omega_{ij} u_j$$

Le dernier terme de cette expression peut être écrit sous la forme:

$$u_i \Omega_{ij} u_j = \frac{1}{2} u_i \Omega_{ij} u_j + u_j \Omega_{ij} u_i$$

ou encore, en permutant les indices muets du dernier terme:

$$u_i \Omega_{ij} u_j = \frac{1}{2} u_i \Omega_{ij} u_j + u_j \Omega_{ij} u_i = \frac{1}{2} u_i (\Omega_{ij} + \Omega_{ji}) u_j$$

Comme $\bar{\bar{\Omega}}$ est antisymétrique $\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0$ et l'on voit que $u_i \Omega_{ij} u_j = 0$

En définitive, le taux d'allongement dans la direction \vec{u} est déterminé uniquement par le tenseur des taux de déformation $\bar{\bar{D}}$ (et par les composantes u_i de la direction considérée): [9]

$$\mathbf{d} = u_i D_{ij} u_j$$

Soit, sous forme intrinsèque:

$$\mathbf{d} = \vec{u} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \vec{u}$$

Chapitre 6

EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES

6.1. Introduction

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour obtenir les équations fondamentales de la mécanique des fluides. Nous suivrons ici deux approches. Dans la première, on considère un volume de contrôle matériel et on analyse la variation dans le temps de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie contenues dans ce volume. L'écriture d'équations locales à partir des bilans globaux correspondant à un volume matériel quelconque nécessite la transformation de tous les termes en intégrales de volume. Cette opération est facilement effectuée à l'aide des théorèmes de transport et de la relation de Green-Ostrogradsky. Dans la deuxième approche on considère un volume de contrôle élémentaire fixe. On utilise en pratique un pavé élémentaire dont les côtés sont Δx , Δy , Δz et dont l'un des sommets se trouve au point (z, y, z) . On exprime pour cet élément les flux entrant et sortant par les facettes ainsi que la variation instationnaire dans le pavé de la propriété dont on souhaite établir le bilan. Cette méthode élémentaire est facilement appliquée dans un système de coordonnées cartésiennes mais on peut aussi utiliser des volumes élémentaires adaptés à des géométries particulières (par exemple une couronne si l'on s'intéresse à un écoulement axisymétrique). Les équations obtenues dans un système de coordonnées particulières peuvent être écrites sous forme intrinsèque à l'aide des opérateurs vectoriels classiques. On retrouve ainsi les équations de conservation déduites de façon plus générale par l'analyse des bilans sur un volume matériel quelconque.

6.2 Conservation de la masse

6.2.1 Forme locale

Considérons un volume matériel $V_m(t)$. La masse contenue dans ce volume est

$$m = \int_{V_m(t)} \rho dV \quad (6.1)$$

Ou ρ désigne la densité locale. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, la masse qui se trouve dans $V_m(t)$ est constante et on peut écrire:

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0 \quad (6.2)$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de transport au volume $V_m(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho v \cdot n dA \quad (6.3)$$

Et d'après (6,2) on peut écrire :

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho v \cdot n dA = 0 \quad (6.4)$$

Si le volume $V_m(t)$ ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur la surface A peut être remplacée par une intégrale de volume et le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire :

$$\int_{V_m(t)} \rho v \cdot n dA = \int_{V_m(t)} \nabla \cdot \rho v dV \quad (6.5)$$

Dans ces conditions, (6,4) devient :

$$\int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v \right] dV = 0 \quad (6.6)$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrale doit être identiquement nul :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v = 0} \quad (6.7)$$

Cette équation locale exprime la conservation de la masse. Elle est applicable en tout point d'un fluide continu ne contenant pas de sources ou de puits.

L'équation (6,7) est souvent désignée sous le nom d'équation de continuité. On peut l'écrire sous une forme légèrement différente en développant $\nabla \cdot \rho v$.

D'après une identité vectorielle classique:

$$\nabla \cdot \rho v = \rho \nabla \cdot v + v \cdot \nabla \rho \quad (6.8)$$

En substituant cette relation dans (6,7), on obtient:

$$\frac{d\rho}{dt} = v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad (6.9)$$

Cette expression fait apparaître la dérivée matérielle:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho \quad (6.10)$$

Et on peut écrire (6,7) sous la forme:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot v \quad (6.11)$$

6.3 Autre démonstration, bilan de masse sur un volume élémentaire:

Nous allons donner ici une autre démonstration de l'équation de continuité qui ne s'appuie pas sur le théorème de transport. Les calculs sont plus lourds et cette deuxième méthode de démonstration n'a pas notre préférence. [10]

Nous considérons maintenant comme volume de contrôle un cube élémentaire fixe. De système de coordonnées cartésiennes utilisé Oxyz a ses axes parallèles aux côtés du cube. Le volume du cube est $\nabla x \nabla y \nabla z$. On va maintenant écrire le principe de conservation de la masse sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux de variation de} \\ \text{la masse contenue dans} \\ \text{le volume } \nabla x \nabla y \nabla z \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Débit massique pénétrant la} \\ \text{dans le volume} \\ \nabla x \nabla y \nabla z \end{array} \right\} \\ - \left\{ \begin{array}{l} \text{Débit massique sortant} \\ \text{du volume} \\ \nabla x \nabla y \nabla z \end{array} \right\}$$

6.4 Une forme spéciale du théorème de transport Le théorème de Reynolds

Considérons le théorème de transport pour un volume matériel écrit sous la forme:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot f v \right) dV \quad (6.12)$$

Spécialisons cette expression à une fonction $f = \rho \Phi$.

On a :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \Phi dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \Phi + \nabla \cdot \rho \Phi v \right) dV \quad (6.13)$$

Que l'on peut écrire en développant le second membre :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \Phi dV = \int_{V_m(t)} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v \right) + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v \cdot \nabla \Phi \right) \right\} dV \quad (6.14)$$

Le premier terme entre croches est nul et le second fait apparaître la dérivée matérielle de Φ :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v \cdot \nabla \Phi \quad (6.15)$$

Ainsi:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \Phi dV = \int_{V_m(t)} \rho \frac{d\Phi}{dt} dV \quad (6.16)$$

Cette expression est souvent désignée dans la littérature (par le nom whitaker 1986) sous le nom de théorème de Reynolds.

6.5 Equation de conservation de la quantité de mouvement

6.5.1 Introduction

Considérons à nouveau un volume de contrôle matériel $V_m(t)$. La quantité de mouvement contenue dans ce volume est :

$$\int_{V_m(t)} \rho v dV \quad (6.17)$$

Le principe fondamental de la dynamique indique que la variation de quantité de mouvement ment de ce système matériel est égale à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v dV = \mathbf{F} \quad (6.18)$$

Dans la plupart des situations (classiques), deux types de forces agissent sur le fluide contenu dans V_m .

(1) les forces de volume que l'on peut exprimer sous la forme

$$\int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} dV \quad (6.19)$$

(2) les forces de surface qui agissent par l'intermédiaire de la surface A_m . Nous écrivons ce type de forces sous la forme :

$$\int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \quad (6.20)$$

Dans cette expression, \mathbf{n} désigne la normale extérieure et :

$$\partial f = \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \quad (6.21)$$

représente la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de surface dA de normale \mathbf{n} et $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ est le vecteur contrainte agissant sur dA .

L'expression (6.18) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v dV = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \quad (6.22)$$

Pour simplifier cette première présentation des équations de la mécanique d'équations de fluides. Nous allons projeter l'équation précédente sur les axes d'un système cartésien fixe:

La projection sur l'axe i ($i=1, 2, 3$) a pour expression :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV + \int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA \quad (6.23)$$

Dans cette expression, $t_i(\mathbf{n})$ désigne la projection sur l'axe i du vecteur contrainte. Pour continuer, il faut écrire $t_i(\mathbf{n})$ de façon plus explicite. On a besoin pour cela de résultats fondamentaux de la mécanique des milieux continus.

6.6 Résultats principaux de l'analyse de l'état des contraintes dans un milieu fluide

Une analyse détaillée de l'état des contraintes est effectuée à l'annexe A. cette analyse conduit aux résultats suivants : [11]

$$t_i(\mathbf{n}) = T_{ij} n_j \quad \text{la notion d'Einstein}$$

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (i=1, 2, 3 \text{ et } j=1, 2, 3) \quad (6.24)$$

La première expression indique que la composante i du vecteur contrainte est donnée par le produit scalaire du tenseur des contraintes T dont les composants sont t_{ij} et du vecteur normal \mathbf{n} de composantes n_j . La seconde expression indique que le tenseur T_{ij} est symétrique.

Pour fixer les idées, nous donnons ci-dessous l'expression de trois composants du vecteur contrainte sous forme totalement explicite :

$$\begin{aligned} t_1(\mathbf{n}) &= T_{11}n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 \\ t_2(\mathbf{n}) &= T_{21}n_1 + T_{22}n_2 + T_{23}n_3 \\ t_3(\mathbf{n}) &= T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + T_{33}n_3 \end{aligned} \quad (6.25)$$

D'un point de vue physique, il est intéressant de décomposer la contrainte \mathbf{t} en deux parties:

- la contrainte associée à la pression,
- la contrainte associée aux forces visqueuses.

La pression agit de façon isotrope et sa valeur ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide. Les contraintes visqueuses sont au contraire essentiellement liées à l'état de déformation du fluide. On peut écrire dans ces conditions:

$$t_{ij} = -\rho\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (6.26)$$

Tenseur des contraintes Tenseur des contraintes associées à la pression Tenseur des contraintes visqueuse

La projection du vecteur contrainte sur l'axe i est alors donnée par:

$$t_i(\mathbf{n}) = (-p\delta_{ij} + \tau_{ij})n_j \quad (6.27)$$

Soit encore :

$$t_i(\mathbf{n}) = -pn_i + \tau_{ij}n_j \quad (6.28)$$

En clair cette expression s'écrit :

$$\begin{aligned} t_1(\mathbf{n}) &= -pn_1 + \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ t_2(\mathbf{n}) &= -pn_2 + \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ t_3(\mathbf{n}) &= -pn_3 + \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{aligned} \quad (6.29)$$

6.7 Première forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

Muni de ces résultats, on peut maintenant reprendre l'analyse de l'équation (6, 23) reproduite ci-dessous pour la commodité:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV + \int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA \quad (6.30)$$

Considérons d'abord le troisième terme :

$$\int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA = \int_{A_m(t)} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij})n_j dA \quad (6.31)$$

Au second membre de cette expression, nous voyons apparaître les flux d'un vecteur dont les composantes sont: $-p\delta_{i1} + \tau_{i1}, -p\delta_{i2} + \tau_{i2}, -p\delta_{i3} + \tau_{i3}$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, écrit sous la forme:

$$\int_{A_m(t)} p_j n_j dA = \int_V \frac{\partial b_j}{\partial x_j} dV \quad (6.32)$$

L'expression (6,31) peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA = \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) dV \quad (6.33)$$

Soit encore :

$$\int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA = \int_{V_m(t)} \frac{\partial p}{\partial x_j} dV + \int_{V_m(t)} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (6.34)$$

Considérons à présent le premier terme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV \quad (6.35)$$

D'après le théorème de Reynolds, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV \quad (6.36)$$

En rassemblant les résultats (6.34) et (6.36), on obtient finalement:

$$\int_{V_m(t)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_{V_m(t)} \left[\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] dV \quad (6.37)$$

Le volume de contrôle $V_m(t)$ est arbitraire et les intégrales apparaissant dans les deux membres doivent être identiques :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (6.38)$$

La signification physique de cette équation apparaît clairement:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Quantité} \\ \text{d'accélération} \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{force associées} \\ \text{à la pression par} \\ \text{unité de} \\ \text{volume} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{force} \\ \text{de volume} \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Contraintes} \\ \text{visqueuses} \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} \quad (6.39)$$

Pour fixer les idées, nous allons maintenant écrire l'équation (6.38) sous forme explicite et pour les trois composantes:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_1}{dt} &= - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g_1 + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{dv_2}{dt} &= - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g_2 + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{dv_3}{dt} &= - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g_3 + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (6.40)$$

On peut aussi écrire l'équation (6.38) sous forme vectoriel compacte :

$$\boxed{\rho \frac{dv}{dt} - \nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}} \quad (6.41)$$

Cette notation fait apparaître la divergence du tenseur τ , $\nabla \cdot \tau$ et un vecteur dont la composante suivant l'axe i est: $(\nabla \cdot \tau)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij}$

6.8 Écoulements non visqueux: équations d'Euler

Les équations de conservation de la quantité de mouvement et simplifient notablement lorsque l'on considère des écoulements de fluides idéaux.

Le fluide idéal est par définition dénué de viscosité et le tenseur des contraintes visqueuses disparaît des équations (6.38) ou (6.41). On a dans ce cas :

$$\rho \frac{dv}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (6.42) \quad \text{ou:} \quad \rho \frac{dv}{dt} - \nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (6.43)$$

Ces expressions sont désignées sous le nom **d'équations d'Euler**

Nous verrons dans la suite que les effets de viscosité et de conduction de chaleur sont importants au voisinage immédiat des surfaces solides qui se trouvent dans l'écoulement ou à ces frontières.

La région dans laquelle viscosité et conduction doivent être prises en compte est appelée couche limite. Les couches limites sont caractères par une épaisseur faible. A l'extérieur des couches limites, l'écoulement peut être généralement considéré comme celui d'un fluide idéal et les équations du mouvement sont celles que nous venons de présenter (équations d'Euler).

Dans les couches limites, les forces associées à la viscosité jouent un rôle important et le terme $\nabla \cdot \tau$ doit être conservé.

Chapitre 7

EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES

7.1 Equations de Navier-Stokes

Lorsque le fluide en écoulement est newtonien les équations de conservation de la quantité de mouvement prennent la forme particulièrement simple des équations de **Navier-Stokes**. Nous allons maintenant établir ces équations en supposant, pour simplifier, que la viscosité dynamique μ reste constante dans tout l'écoulement. Si cette viscosité n'est pas constante, des termes supplémentaires apparaissent dans les équations du mouvement. L'écriture de ces termes ne présente pas de difficulté et elle est laissée en exercice pour le lecteur.

Nous partons ici de l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe i :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (7.1)$$

Cette équation exprime l'égalité entre la quantité d'accélération par unité de volume et les forces extérieures qui s'appliquent à l'unité de volume (pression, forces volumiques, contraintes visqueuses). Dans le cas d'un fluide newtonien, les contraintes visqueuses ont pour forme:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \delta_{ij} \quad (7.2)$$

Nous devons maintenant calculer $\partial \tau_{ij} / \partial x_j$. Comme μ est constant, on a :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot v) \delta_{ij} \quad (7.3)$$

Ou encore:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot v) \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot v) \quad (7.4)$$

On obtient finalement:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \nabla^2 v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot v) \quad (7.5)$$

Et l'équation (7, 1) devient:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \nabla^2 v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot v) \quad (7.6)$$

Sous forme explicite, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g_1 + \mu \nabla^2 v_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot v) \\ \rho \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g_2 + \mu \nabla^2 v_2 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla \cdot v) \\ \rho \frac{dv_3}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g_3 + \mu \nabla^2 v_3 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_3} (\nabla \cdot v) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Quantité d'accélération par unité de volume	Force de pression par unité de volume	Forces volumiques	Forces visqueuses par unité de volume
--	--	----------------------	---

On peut aussi représenter ces trois équations sous forme vectorielle compacte :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 v + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot v) \quad (7.8)$$

Les expressions précédentes sont appelées équations de Navier-Stokes.

Lorsque le fluide est incompressible, $(\nabla \cdot v) = 0$ et le dernier terme disparaît. On a alors :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 v \quad (7.9)$$

7.2 Equation de bilan pour l'énergie cinétique

L'équation de bilan pour l'énergie cinétique s'obtient en formant le produit scalaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et du vecteur vitesse v .

En notations indicielles, ce produit scolaire a pour forme :

$$\rho v_i \frac{dv_i}{dt} = -v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (7.1)$$

Ou encore:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (7.11)$$

Avec des notations vectorielles, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -v \cdot \nabla p + \rho g \cdot v + v \cdot (\nabla \cdot \tau) \quad (7.12)$$

Taux de variation de l'énergie cinétique par unité de volume	Travail des forces de pression par unité de volume et detemps.	Travail des forces volumiques par unité de volume et detemps.	Travail des forces visqueuses par unité de volume et de temps.
---	---	--	---

On peut aussi écrire le premier nombre de l'équation précédent sous la forme équivalent:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \right) \text{ On a alors.}$$

Nous verrons plus loin comment les expressions (7.12) ou (7.13) peuvent être utilisées pour établir des équations de bilan pour l'énergie interne ou l'enthalpie.

Ces équations sont aussi utilisées lorsqu'on souhaite faire le bilan d'énergie cinétique turbulente.

7.3 Equation de conservation de l'énergie

Pour établir une équation locale exprimant la conservation de l'énergie, nous partons de l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un volume matériel $V_m(t)$.

$$\text{L'énergie contenue dans le volume } V_m(t) \text{ a pour expression: } \int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV.$$

Le taux de variation de cette énergie est donné par:

$$\int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \dot{W} + \dot{Q} \quad (7.14)$$

Le travail par unité de temps \dot{W} qui apparaît au second membre est celui des forces de volume et des contraintes appliquées à la surface du volume :

$$\dot{W} = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA \quad (7.15)$$

Nous supposons ici qu'il n'y a pas de source de chaleur à l'intérieur du volume et nous désignons par \mathbf{q} le flux de chaleur par conduction. Ainsi, $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ représente la chaleur qui passe par unité de surface et de temps à travers la surface de contrôle $A_m(t)$:

$$\dot{Q} = - \int_{A_m(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad (7.16)$$

En substituant les expressions (7.15) et (7.16) dans l'équation (7.14) on obtient:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA - \int_{A_m(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad (7.17)$$

Pour déduire une équation locale de cette relation, il faut transformer les premier, troisième et quatrième termes.

Considérons d'abord le premier terme. Le théorème de transport nous permet d'écrire:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{V_m(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV \quad (7.18)$$

On peut aussi écrire:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV + \int_{A_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (7.19)$$

Ou encor:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] dV \quad (7.20)$$

Considérons à présent le troisième terme :

$$\int_{A_m(t)} t(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA = \int_{A_m(t)} t(\mathbf{n}) v_i dA \quad (7.21)$$

Remplaçons maintenant $t_i(\mathbf{n})$ par son expression en fonction de la pression et du tenseur des contraintes visqueuses :

$$t_i(\mathbf{n}) = -pn_i + \tau_{ij}n_j \quad (7.22)$$

On obtient ainsi :

$$\int_{A_m(t)} t(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA + \int_{A_m(t)} (-pn_i v_i + \tau_{ij} v_i n_j) dA \quad (7.23)$$

On peut maintenant transformer cette intégrale de surface en intégrale de volume à l'aide du théorème de Green-Ostrogradsky:

$$\int_{A_m(t)} t(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA + \int_{V_m(t)} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (pv_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) \right] dV \quad (7.24)$$

Il reste à transformer le quatrième terme de l'expression (7.17) en intégrale de volume.

On obtient :

$$\int_{A_m(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{V_m(t)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV \quad (7.25)$$

On peut maintenant écrire (VI,17) sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{V_m(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV &= \int_{V_m(t)} \rho g_i v_i dV + \int_{V_m(t)} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} v_i \right] dV \\ &\quad - \int_{V_m(t)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV \end{aligned} \quad (7.26)$$

Le volume $V_m(t)$ est arbitraire et par conséquent:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho g_i v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (7.27)$$

Sous forme vectorielle, on obtient:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (7.28)$$

Taux de variation de l'énergie totale par unité de volume et de temps	Puissance des forces volumiques	Puissance des forces de pression	Puissance des forces visqueuses	Flux de chaleur
---	---------------------------------------	--	---------------------------------------	--------------------

Le premier membre peut encore s'écrire sous la forme équivalente :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v}$$

Et l'équation de conservation de l'énergie prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \nabla p \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (7.29)$$

7.4 Autres formes pour l'équation de conservation de l'énergie:

Un grand nombre de formes différentes existent pour l'équation de conservation de l'énergie. Nous nous proposons de démontrer deux d'entre elles, toutes les autres étant laissées en exercice pour le lecteur. [13]

Variante 1.

Considérons à nouveau l'équation (7.29) et faisons passer le terme $-\nabla \cdot p \mathbf{v}$ au premier membre. On peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (7.30)$$

Comme $h = e + p/\rho$, on peut encore écrire:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (7.31)$$

Variante 2. Equation pour l'énergie interne

On va ici éliminer l'énergie cinétique de l'équation (7.28). Pour cela, retranchons de l'équation de conservation de l'énergie, l'équation de bilan pour l'énergie cinétique (7.12). On

obtient ainsi :

$$\rho \frac{d}{dt} e = \nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (7.32)$$

Les deux premiers termes du second membre s'associent pour donner :

$$-\nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (7.33)$$

Les deux termes suivants peuvent s'écrire :

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} v_j) - v_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} = \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \quad (7.34)$$

On voit ici apparaître le double produit scalaire du tenseur des contraintes visqueuses et du gradient de vitesse.

On peut écrire ce double produit scalaire sous la forme compacte: $\tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$

En définitive l'équation (7.32) prend la forme:

$$\rho \frac{d}{dt} e = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (7.35)$$

Taux de variation de l'énergie interne par unité de Volume	Puissance des forces de pression par unité de volume	Puissance des forces visqueuses par unité de volume	Flux de chaleur par unité de volume
---	--	---	---

7.5 La fonction de dissipation visqueuse

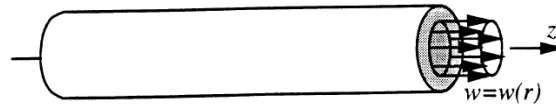
On désigne le double produit scalaire de l'expression (7.35) sous le nom de fonction de dissipation visqueuse:

$$\hat{\Phi} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$$

Cette expression est toujours positive ou nulle

7.6 L'écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique

Considérons maintenant l'écoulement parallèle d'un fluide visqueux dans un tube cylindrique de rayon R (figure 6) et supposons que l'écoulement soit axisymétrique et stationnaire. [12]



Dans ces conditions, la pression ne dépend plus que de la coordonnée axiale $p = p(z)$ et la composante de vitesse w ne dépend plus que de la coordonnée radiale $w = w(r)$.

L'équation devient ici:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{dp}{dz}$$

Les conditions aux limites pour ce problème sont $w(R) = 0$, qui traduit le non glissement sur la paroi du conduit, et $w(0) < \infty$ qui exprime que la vitesse reste finie sur l'axe. la solution générale de l'équation a pour forme:

$$w(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

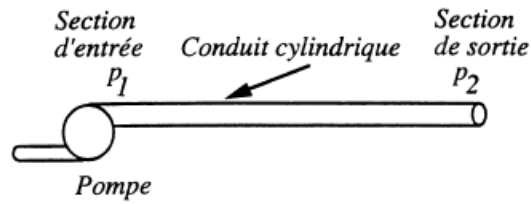
La constante c_1 , est nulle, car $w(0) < \infty$ et c_2 est donnée par l conduit:

$$0 = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2 + c_2$$

Le profil de vitesse a donc pour forme :

$$w(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2)$$

Il s'agit encore d'un profil parabolique. Dans l'expression précédente, le gradient de pression axial $-dp/dz = (p_1 - p_2)/l$ est imposé, de l'extérieur, au fluide qui s'écoule dans le conduit. Ce gradient est obtenu par exemple à l'aide d'un système de pompage comme celui schématisé sur la figure 6b.



La vitesse maximum sur l'axe a pour valeur :

$$w_M = -w(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2$$

et la vitesse moyenne est donnée par :

$$\int_0^R w(r) dr \quad \bar{w} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R w(r) r dr d\theta$$

$$\frac{w_M}{2} \bar{w} = \frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dz} R^2$$

Cette vitesse est égale à la moitié de la vitesse sur l'axe.

Le débit volume est immédiatement obtenu sous la forme:

$$Q = \pi R^2 \bar{w} = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dz}$$

Soit encore :

$$Q = \pi R^2 \bar{w} = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l}$$

ce débit est proportionnel au gradient de pression et au rayon à la puissance quatre.

L'analyse qui vient d'être effectuée est uniquement applicable à des écoulements laminaires.

Cette situation prévaut tant que le nombre de Reynolds ne dépasse pas une certaine valeur critique. Ce nombre a pour expression:

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D}{\mu}$$

Chapitre 8

Théorie de la couche limite

8. 1-Notion de couche limite:

Considérons l'écoulement d'un fluide autour d'un objet:

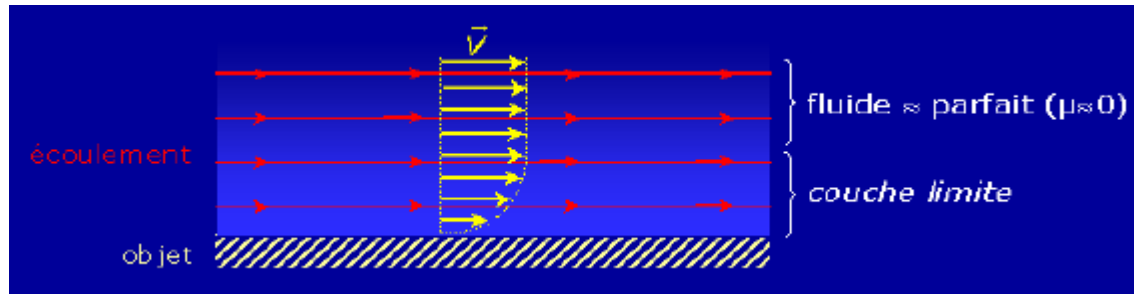
- Relativement **loin de l'objet**, on peut négliger les effets de la viscosité si le nombre de Reynolds est suffisamment grand.

⇒ Dans ces conditions, le fluide peut être considéré **parfait** et l'écoulement peut être décrit par la cinématique.

- MAIS: cette hypothèse n'a plus de sens lorsqu'on se rapproche de la paroi de l'objet : la vitesse du fluide devient progressivement nulle.

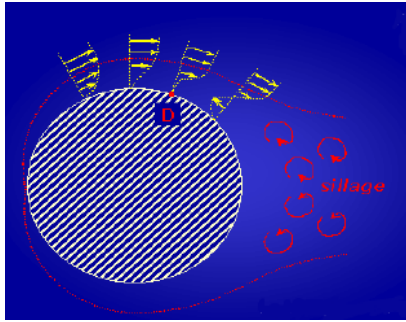
⇒ Proche de la paroi, la viscosité joue un rôle important : on doit y décrire l'écoulement au moyen de l'équation Navier-stokes.

Le domaine de transition où la vitesse devient progressivement nulle est appelée « couche limite».



Remarques:

- ✓ l'épaisseur de la couche limite dépend de Re .
- ✓ au sein de la couche limite, l'écoulement peut être soit laminaire soit turbulent (cela dépend également de Re).
- ✓ Au contact de la paroi, quand le profil de vitesse présente une **pente infinie**, on dit qu'il y a **décollement de la couche limite**.



Après le point de décollement D, la couche limite devient turbulente:
 Les forces de viscosité ne sont plus assez importantes pour assurer le contournement normal de l'objet \Rightarrow il se forme un «sillage».

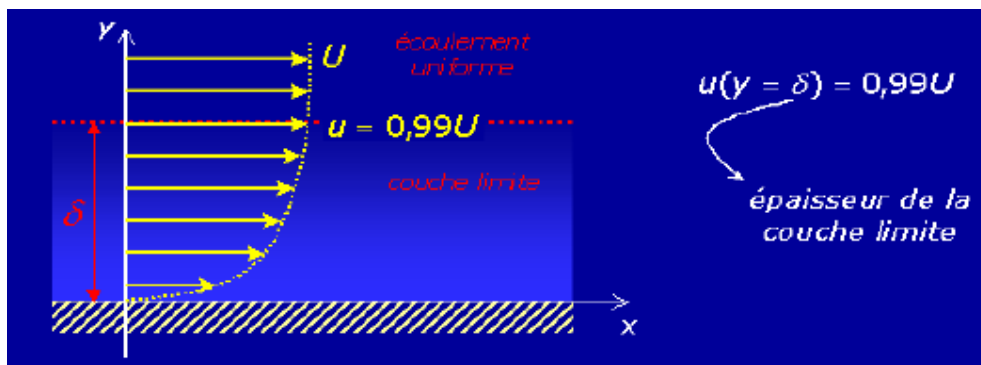
Le sillage est d'autant plus important que l'objet est mal profilé : en pratique, on cherche à optimiser le profil de façon à minimiser le sillage.

\rightarrow Le sillage est en effet responsable d'une dissipation d'énergie importante.

8.2- Grandeurs caractéristiques de la couche limite

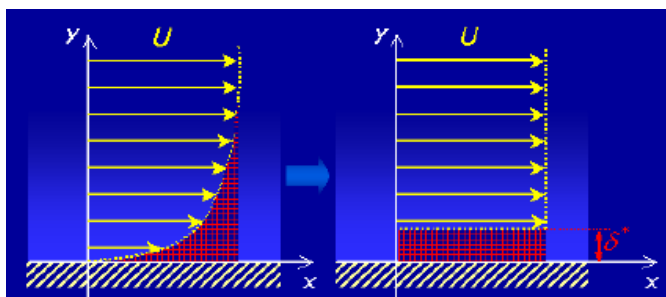
a) Epaisseur

Elle est définie comme la distance à la paroi à partir de laquelle la vitesse devient supérieure à 99% de la vitesse de l'écoulement uniforme (non perturbé par l'objet):



b) Epaisseur de déplacement

Pour définir l'épaisseur de déplacement, on évalue le flux manquant par rapport à celui qu'on aurait dans l'hypothèse d'un écoulement uniforme jusqu'à la paroi :



On a ainsi:

$$\int_0^{\infty} (U - u) dy = \int_0^{\delta} \frac{U dy}{u \delta^*}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Cette définition de l'épaisseur revient à poser le principe de conservation du débit volumique.

8.3 Etude dimensionnelle de la couche limite :

Au sein de la couche limite, l'écoulement doit être décrit au moyen de l'équation de Navier-Stokes. La résolution de cette équation s'avère difficile sans poser un certain nombre d'approximations :

Ces approximations doivent être validées sur les bases d'une analyse dimensionnelle.

Considérons alors, au sein de la couche limite, un écoulement:

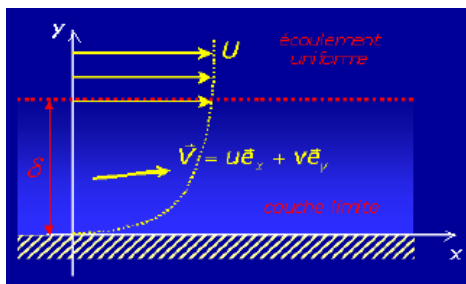
- ✓ Stationnaire ;
- ✓ où les effets de la pesanteur sont négligeables ;
- ✓ bidimensionnel (x,y).

Avec ces hypothèses, l'équation de Navier-Stokes se résume à :

$$\begin{cases} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

Et comme $\nu = \mu/\rho$, on peut écrire :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ (i)} \\ u \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \text{ (ii)} \end{cases}$$



On peut ainsi poser que :

$$v \ll u \text{ et } \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\text{(i)} \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\text{(ii)} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$$

8.4 Analysons les différents ordres de grandeurs caractéristiques :

$u \approx U$ ordre de grandeur de vitesse longitudinale (écoulement uniforme).

$v \approx \nu$ ordre de grandeur de vitesse transversale.

$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{x}$ ou x peut représenter la distance au front de la l'objet.

$\frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{\delta}$ ou δ peut représenter l'épaisseur de la couche limite.

On sait que l'équation de continuité doit être vérifiée : $\vec{v}\vec{V} + 0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ donc $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont nécessairement du même ordre de grandeur.

$$\Rightarrow \frac{U}{x} + \frac{V}{\delta} \Rightarrow V \approx U \frac{\delta}{x}$$

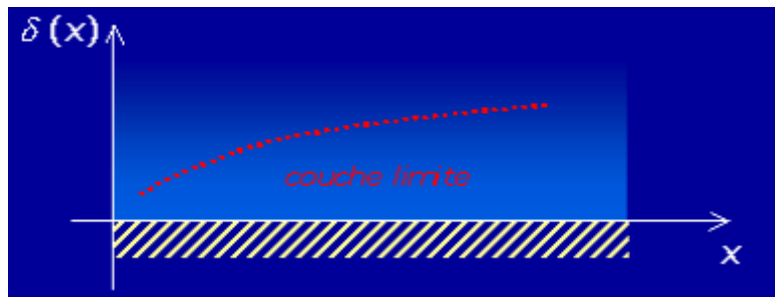
On peut alors en déduire que : $u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U^2}{x}$ et $v \frac{\partial u}{\partial y} \approx v \frac{U}{\delta} \approx \frac{U^2}{x}$

On sait alors que donc $u \frac{\partial u}{\partial x}$ et $V \frac{\partial v}{\partial y}$ sont du même ordre de grandeur $\frac{U^2}{x}$.

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ donc } v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U^2}{x} \\ \underbrace{\approx \frac{U^2}{x}} & \quad \underbrace{\approx \frac{U^2}{x}} & \underbrace{\approx \frac{U}{\delta^2}} \end{aligned} \right\} v \frac{U}{\delta^2} \approx \frac{U^2}{x}$$

On en déduit l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite : $\delta \approx \sqrt{\frac{\nu}{U}} \sqrt{X}$

\Rightarrow l'épaisseur de la couche limite croît en \sqrt{X}



Bilan: l'analyse dimensionnelle nous a permis de montrer que:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad \delta^2 = \frac{\nu x}{U} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

\Downarrow

Equation à résoudre comme conditions aux limites :

$$u(x, 0) = 0 \quad v(x, 0) = 0 \quad u(x, \infty) = U$$

8.4- Résolution –Equation de Blasius

$$\text{Equation de résoudre : } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

En dehors de la couche limite, on sait

$\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$ sur une ligne de Courant en dehors de la couche limite.

Or, on a vu que dans la couche limite, on a: $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$

Donc, comme il y a continuité des pressions à la frontière de la couche limite, on peut en déduire que :

$\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$ Dans la couche limite.

Par conséquent, il reste seulement à résoudre :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

On peut alors raisonner en termes de lignes de courant au sein même de la couche limite :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad \text{Ou} \quad d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad \text{ou} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Donc $d\psi = -Vdx + udy \approx udy$

On peut alors trouver $\psi(x, y)$ en intégrant : $\psi(x, y) = \int_0^y u(x, y') dy'$

Exprimons d'abord la vitesse u en fonction de U :

$u = Ug(n)$ Ou $n = \frac{y}{\delta(x)} \rightarrow$ nombre sans dimension.

Epaisseur de la couche limite en x .

$$\delta(x) \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\Rightarrow \psi = \int_0^n Ug(n') \delta dn'$$

$$\Rightarrow \psi = U\delta \underbrace{\int_0^n g(n') dn'}_{f(n)} \quad \text{Donc la fonction } f(n) \text{ est telle que :}$$

$$f(n) = \frac{df}{dn} = g(n)$$

On peut alors écrire: $\psi(x, y) = U\delta(x)f(n)$ car $n = \frac{y}{\delta(x)}$

Donc il faut répondre: $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sachant que:

$$u = Ug(n) = Uf'(n)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -Uf(n) \frac{d\delta}{dx} - U\delta \frac{\partial n}{\partial x} f'(n) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = U \frac{\partial n}{\partial x} f''(n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial n}{\partial x} f''(n) - \frac{U}{\delta} f''(n) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U}{\delta} \frac{\partial n}{\partial y} f'''(n) = \frac{U}{\delta^2} f'''(n)$$

On obtient ainsi: $Uf' \cdot U \frac{\partial n}{\partial x} f''' - U \left(f \frac{d\delta}{dy} + \delta \frac{\partial n}{\partial x} f' \right) \cdot \frac{U}{\delta} f'' = v \frac{U}{\delta^2} f'''$

Soit après simplification: $2f''' + ff'' = 0$ équation de Blasius

$u = Uf'(n)$ ← $f'(n)$ ← $f(n)$ résolution numérique.

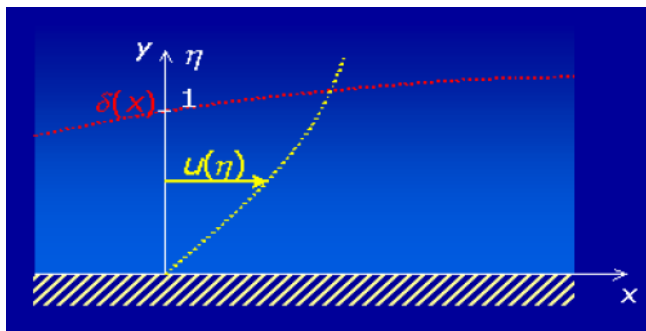
En considérant les conditions aux limites suivantes:

$$n = 0 \quad f(0) = f'(0) = 0 \quad n \rightarrow \infty \quad f'(n \rightarrow \infty) =$$

$$\begin{array}{ccc} \infty & & \\ \downarrow & \uparrow & \text{et} & \downarrow & \uparrow \\ y = 0 & \Rightarrow & u = v = 0 & & y \rightarrow \infty \Rightarrow & u = U \end{array}$$

...la solution numérique peut être

approximée, proche de la paroi, par: $f(n) = \frac{1}{2} 0.332n^2 + O(n^5)$
 $n \ll 1 \Leftrightarrow y \ll \delta$



$$u = Uf'$$

$$u(n) \approx 0.332Un$$

On en déduit ainsi:

$$v(n) \approx v(x) 0.860U \left(\frac{v}{xU} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{Re_x} \right)^{1/2}$$

On peut donc définir un nombre de Reynolds «local»:

$Re_x = \frac{xU}{\nu} \Rightarrow$ Caractérise la nature de l'écoulement à la distance x du front de l'objet, au sein de la couche limite.

Ainsi, toutes les grandeurs sans dimensions qui peuvent caractériser la couche limite peuvent être définies à partir de ce nombre de Reynolds local:

$$\frac{v(x)}{U} \approx \frac{0.860}{\sqrt{Re_x}} \quad \frac{\delta(x)}{x} \approx \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \quad \frac{\delta^*(x)}{x} \approx \frac{1.72}{\sqrt{Re_x}}$$

contrainte de frottement ($\tau = \tau_{xy}$)

$$\text{coefficient de trainée: } C_f(x) = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho u^2} \approx \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

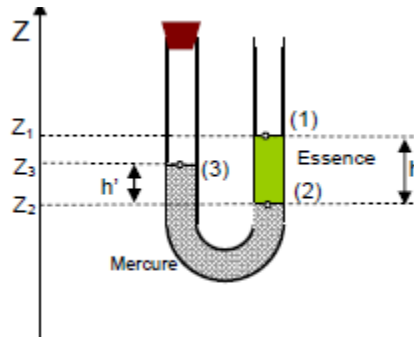
Remarque: pour obtenir le coefficient de trainée global, il suffit d'intégrer C_f sur toute la longueur de l'objet, soit:

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_f(x) dx = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \quad \text{ou} \quad Re = \frac{UL}{\nu} \text{ correspond au nombre de Reynolds global.}$$

Exercice

Exercice n:01

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.



Entre les surfaces :

- (1) et (2) il s'agit de l'essence de masse volumique $\rho_{essence}=700 \text{ kg/m}^3$.
- (2) et (3), il s'agit du mercure de masse volumique $\rho_{mercure}=13600 \text{ kg/m}^3$.

La pression au-dessus de la surface libre (1) est $P_1=P_{atm}=1 \text{ bar}$.

L'accélération de la pesanteur est $g=9,8 \text{ m/s}^2$.

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression P_3 qu'on cherche à calculer

- 1) En appliquant la RFH (Relation Fondamentale de l'Hydrostatique) pour l'essence, calculer la pression P_2 (en mbar) au niveau de la surface de séparation (2) sachant que $h=(Z_1-Z_2)=728 \text{ mm}$.
- 2) De même, pour le mercure, calculer la pression P_3 (en mbar) au niveau de la surface (3) sachant que $h'=(Z_3-Z_2)=15 \text{ mm}$.

Exercice n :02

Suite au naufrage d'un pétrolier, on envoie un sous-marin pour inspecter l'épave et repérer d'éventuelles fuites. L'épave repose à une profondeur $h=1981 \text{ m}$.

On donne :

- l'accélération de la pesanteur $g=9,8 \text{ m/s}^2$
- la pression atmosphérique $P_{atm}=1 \text{ bar}$,
- la masse volumique de l'eau de mer est $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$
- Le sous marin est équipé d'un hublot vitré de diamètre $d=310 \text{ mm}$., de centre de gravité G, et de normale ((G, X) est situé dans un plan vertical (G,Y,Z). L'axe (G,Z) est vertical.

Travail demandé :

- 1) Calculez la pression P_G de l'eau à cette profondeur au point G.

2) Quelle est l'intensité (R) de la résultante des actions de pression de l'eau sur le hublot ?

3) Calculer le moment quadratique (G, Z) I_r du hublot.

4) Quelle est l'intensité (M_G) du moment des actions de pression de l'eau sur le hublot ?

Exercice n :03

Donner l'équation de mouvement d'un écoulement permanent, irrotationnel, pour un fluide

incompressible pour :

- un fluide réel ?

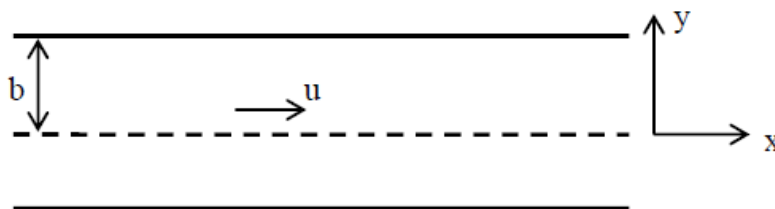
- un fluide parfait ?

Exercice n :04

Etablir l'équation de mouvement d'un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible

se produit entre deux plaques planes lisses parallèles ?

(Écoulement monodimensionnel suivant x)



Exercice n : 05

Soit un tube cylindrique de 3 km de long, de 10 cm de diamètre, parcouru par un liquide de

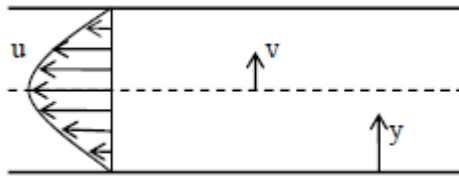
viscosité dynamique $\mu = 0,4$ Poise.

On suppose que la distribution des vitesses dans la section droite du tube est donnée

par

l'équation parabolique $u = 10.(y - y_2)$ en unité CGS.

u étant la vitesse à la distance y de la paroi ?



Calculer :

- la force de frottement visqueux par unité de surface contre la paroi ?
- la force de frottement visqueux par unité de surface à 2 cm de la paroi ?
- la force totale de frottement s'exerçant sur le tube ?

Exercice 01 : Dans l'espace rapporté au repère orthonormé (e_1, e_2, e_3) , un milieu continu occupe à l'instant $t = 0$ un domaine .

Le milieu subit une déformation entre les instants 0 et t telle que la représentation lagrangienne du mouvement est donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2/3 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

.Calculer le tenseur gradient de la transformation
, le tenseur des dilatations de Cauchy-Green.

Exercice n : 06 On considère un mouvement défini dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ représentation lagrangienne (ω est une constante positive)

$$\{x_1 = X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t) \quad ; \quad x_2 = X_1 \sin(\omega t) + X_2 \cos(\omega t) \quad ; \quad x_3 = X_3\}$$

- 1) Calculer le tenseur gradient, \bar{F} , le tenseur des dilatations \bar{C} , et le tenseur des déformations \bar{E} , " ,dans l'hypothèse des petites déformations.
- 2) Calculer le champ de vitesse, le champ d'accélération.

Exercice n :07

Dans l'écoulement laminaire d'un fluide sur une plaque mince et plate, on admet que la distribution des vitesses dans la couche limite répond à l'équation :

Avec :

$$\frac{u}{U} = \text{Sin} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{y}{\delta} \right)$$

U : vitesse du fluide libre (écoulement)

u : vitesse à la distance y de la paroi

δ : épaisseur de la couche limite.

1- calculer latéralement : δ_x , θ_x , H , τ_{local} .

2- on donne :

$$U = 15 \text{ m/s}$$

$$L = 4.10^{-2} \text{ m.}$$

$$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3.$$

Références bibliographiques :

1. *Mécanique des fluide Introduction a la mécanique des fluides* Mr Riadh Ben Hamouda
2. *NOTIONS DE MECANIQUE DES FLUIDES Cours et Exercices Corrigés* Riadh BEN HAMOUDA
3. *Mécanique des fluides et hydraulique ;Série Schaum (1975).*
4. *Mécanique expérimentale des fluides ;R.Comolet et J.Bonnin Tome 1,2,3 ;Masson (1992)*
5. *Mécanique des fluides, Candel S., Dunod, Paris, 1993*
6. *Mécanique des fluides, Landau L. & Lifchitz E., Mir , Moscou , 1989*
7. *Fluides en écoulement, Padet J., Masson, Paris, 1991*
8. *Mécanique des fluides appliquée ; R :Ouziaux & J :Perrier ; Dunod ; Paris ; 1978*
9. *Mécanique des fluides. Chassaing. Cépadues Editions, 1997*
10. *Mécanique des fluides. Jean-François SINI .Nantes.2008*
11. *Mécanique des fluides.Tome 1 sébastien CANDEL Edition Dunod Bordas . Paris 2003.*
12. *Mécanique des fluides.Tome 2 sébastien CANDEL Edition Dunod Bordas . Paris 2003.*
13. *Mécanique des fluides fondamentales R.K.Zeytounian Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1991.*