1 Les Séries Némuriques des termes réelles

Definition 1 *On donne une suite réelle* u_n *où* $n \geq k$, $n, k \in \mathbb{N}$ *.La série de terme générale* u_n *est le couple* (u_n, S_n) *où* S_n *est la suite donnée par*

$$S_n = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + ... + u_n = \sum_{p=k}^{p=n} u_p.$$

qu;on la note par (u_n, S_n) *où* $\sum\limits_{n \geq k} u_n$*. La suite* S_n *est dite la somme partielle de la série de terme générale* u_n*.*

Remark 2 *les suites* $u_k, u_{k+1}, ...u_{k+i}$ *sont apellés les termes de la séries* $\sum\limits_{n \geq k} u_n$*.*
1) la suite S_k *est le premier terme de la série* $\sum\limits_{n \geq k} u_n$*.*
2) la suite $S_{k+1} = u_k + u_{k+1}$ *est le deuxième terme de la série* $\sum\limits_{n \geq k} u_n$*.*
3) la suite $S_{k+i} = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + ... + u_{k+i}$ *est le* $(i+1)^{eme}$ *terme de la série* $\sum\limits_{n \geq k} u_n$*.*

Example 3 $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ *est la série de terme générale* $\frac{1}{n}$ *dont le premier teme est* $S_1 = \frac{1}{1}, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, ..., S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...\frac{1}{n}$
$\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{n^2+1}$ *est la série de terme générale* $\frac{1}{n^2+1}$ *dont le premier teme est* $S_0 = \frac{1}{0^2+1}, S_1 = \frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1}, ..., S_n = \frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + ...\frac{1}{n^2+1},$
$\sum\limits_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ *est la série de terme générale* $\frac{1}{n \ln n}$ *dont le premier teme est* $S_2 = \frac{1}{2 \ln 2}, S_3 = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3}, ..., S_n = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + ...\frac{1}{n \ln n},$

2 La convergence d'une série

Definition 4 *On dit que la série de terme générale* u_n *est une série convergente vers une limite* $S \in \mathbb{R}$ *si*

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

On écrit

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{p \to \infty} \sum_{p=k}^{p=n} u_p = \sum_{p=k}^{p=\infty} u_p = S.$$

Remark 5 *La limite si elle exite est unique.*

Definition 6 *Si la limite de la suite* S_n *n'existe pas, on dit que la série* $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ *est une série divergente.*

Example 7 *Etudier la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$*.il s'agit d'etudier la limite de la suite* S_n*.*
On a $S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4+1}\right)......+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, *càd*
$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)......+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$
on passe à la limite $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, *alors la limite existe donc la série en question converge et sa limite égale à* 1*.on écrit*

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Remark 8 ***Example 9*** *Etudier la nature de la série* $\sum\limits_{n\geq 3}\frac{1}{n^2+2n-3}$.
on a $U_n=\frac{1}{n^2-n-2}=\frac{1}{(n-2)(n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)$ *donc* $S_n=u_2=u_3+u_4+......+u_n$*. alors*

$$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3-2}-\frac{1}{3+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4-2}-\frac{1}{4+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5-2}-\frac{1}{5+1}\right)+........+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3-2}-\frac{1}{3+1}+\frac{1}{4-2}-\frac{1}{4+1}+\frac{1}{5-2}-\frac{1}{5+1}+........+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$\frac{1}{3}\left(\sum_{k=3}^{k=n}\frac{1}{k-2}-\sum_{k=3}^{k=n}\frac{1}{k+1}\right),$$

Remark 10 $\sum_{k=3}^{k=n}\frac{1}{k-2}\overset{m=k-2}{=}\sum\limits_{m=1}^{m=n-2}\frac{1}{m}$
$\sum_{k=3}^{k=n}\frac{1}{k+1}\overset{m=k+1}{=}\sum\limits_{m=4}^{m=n+1}\frac{1}{m}$, *donc*

$$\begin{aligned}S_n=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=3}^{k=n}\frac{1}{k-2}-\sum_{k=3}^{k=n}\frac{1}{k+1}\right)&=\frac{1}{3}\left(\sum_{m=1}^{m=n-2}\frac{1}{m}-\sum_{m=4}^{m=n+1}\frac{1}{m}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

on passe à la limite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}.\end{aligned}$$

donc la série coverge vers $\frac{77}{180}$*.on écrit*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2+2n-3} = \frac{11}{18}.$$

Exercise 11 *Etudier la nature des séries suivantes*
1) $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{1}{n^2-1}$, *2)* $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{1}{n^2-2n+3}$, *3)* $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{1}{n^2-25}$.