Example 1 *Sur les séries divergentes*
On donne la série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n$, *on a* $S_n = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 .... + (-1)^n$.
Alors $S_0 = 1$, $S_1 = (-1)^0 + (-1)^1 = 0$, $S_2 = S_1 + (-1)^2 = 1, ...,\left\{\begin{array}{c} S_{2n} = 1 \\ S_{2n+1} = 0 \end{array}\right.$, *alors la suite* S_n *n'a pas de limite donc la série en questiuon est une série dévergente.*

Remark 2 *on remarque que* $S_{n+1} - S_n = u_n$ *alors ona le*

Theorem 3 *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente alors* $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$ *c'ést la condition nécéssaire de la convergence.*

Theorem 4 *Si* $\lim\limits_{n\infty} u_n \neq 0$ *alors la série* $\sum u_n$ *diverge*

Example 5 *la série* $\sum \frac{n+1}{\sqrt{n}}$ *est une série divergente car* $\lim\limits_{n\infty} u_n = \lim\limits_{n\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty \neq 0$.

Example 6 *la série* $\sum \frac{n+1}{2n}$ *est une série divergente car* $\lim\limits_{n\infty} u_n = \lim\limits_{n\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Remark 7 *SI le terme général de la série tend vers* 0 *l'orsque* $n \to \infty$ *, on peur rien dire sur la nature de la série.*

Theorem 8 *L'espace des série convergentent est un espace vectoriel.c.à.d*

1) si la série $\sum u_n$ converge vers S, alors $\sum cu_n$ converge vers cS.

2) si la série $\sum u_n$ converge vers S et $\sum v_n$ conerge vers S' alors $\sum u_n + v_n$ coverge vers $S + S'$.

Definition 9 *la séries de terme générale* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *est dite série de Riemann où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Example 10 *1)* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge car* $\alpha = 1$
2) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge car* $\alpha = \frac{1}{2}$
3) $\sum \frac{1}{n^3}$ *converge car* $\alpha = 3$.

Theorem 11 *la série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si est seulement si* $\alpha > 1$.

Corollary 12 *si* $\alpha \leq 1$ *la série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *diverge*

1 Critères de comparison

1.1 Compariasons des séries a termes positifs

Theorem 13 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.*

on suppose que $u_n \leq v_n$ alors
1) si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
2) si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

Example 14 *$\sum \frac{1}{n^n}$, on remarque que pour $n \geq 2$ on a $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n} = v_n$, la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge car sa somme partielle est une somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$ donc converge, alors la série $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.*

1.2 Critère de l'intégrale

Theorem 15 *Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, décroissant telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$;Alors la série $\sum\limits_{n \geq k} f(n)$ est $\int_k^{+\infty} f(x)dx$ ont méme nature.*

Example 16 *$\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{n^2+1}$ on consédère la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ elle est décroissante <claire>de plus $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$*
comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}$ càd l'intégral existe donc la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{n^2+1}$ converge.

Example 17 *$s\sum \dfrac{1}{n \ln n}$. on consédère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ elle est décroissante <claire>de plus $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$*
comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = +\infty$ càd l'intégral n'existe pas donc la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{n^2+1}$ diverge.

1.3 Critére d'équivalence

Definition 18 *on dit que la suite u_n est équivalente à la suite v_n si $\lim\limits_{n\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.on écrit $u_n \overset{n\infty}{\simeq} v_n$.*

Theorem 19 *Si $u_n \overset{n\infty}{\simeq} v_n$ alors les séries $\sum u_n$et $\sum v_n$ ont mème nature.*

Example 20 *$\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{n^2+1}$, on a $u_n = \frac{1}{n^2+1} \overset{n\infty}{\simeq} v_n = \frac{1}{n^2}$ comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est de Riemann $< \alpha = 2 > 1 >$ alors converge par conséquent la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{n^2+1}$ converge.*

Example 21 $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n-\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}+1}$ *on* $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}+1} \overset{n\infty}{\simeq} v_n = \frac{1}{n}$, *comme la série* $\sum \frac{1}{n}$ *est de Riemann* $<\alpha = 1 = 1>$ *alors diverge par conséquent la série* $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n-\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}+1}$ *diverge.*

Exercise 22 *Etudier la nature des série suivantes*
1) $\sum \dfrac{n^2+1+\sqrt{n}}{n-1}$, *2)* $\sum \dfrac{2}{n!-1}$,*3)* $\sum \dfrac{1}{n^n+2}$, *4)* $\sum \left(\frac{1}{1-\cos\frac{1}{n}}\right)^{\beta}$.