REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de La recherche scientifique

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Faculté de technologie

Département de GENIE CIVIL

Polycopie du cours

Mécanique des fluides

Licence Génie Civil

Réalisé par : Dr. Zitouni salim

Table des matières

Avant propos

Ce polycopié de cours, intitulé : Mécanique des fluides, est destiné pour les étudiants de 3eme année Génie Civil, de l'université de Mohamed BOUDIAF –M'sila. Le contenu de ce polycopié est compatible avec le programme de formation de la licence Génie Civil, donné au niveau du département de Génie Civil de l'Université de M' sila. Des connaissances de base en mécanique des fluides sont présentées dans ce cours, afin de mieux comprendre et d'assimiler le contenu de ce polycopié pédagogique.

La mécanique des fluides (l'hydraulique) est constituée par la branche de la mécanique appliquée qui traite le comportement des fluides au repos et en mouvement. En hydrostatique c »est le poids spécifique qui est la propriété la plus importante, en hydrodynamique, la densité, la viscosité sont les propriétés dominantes.

Le but de ce polycopié pédagogique est d'initier l'étudiant aux techniques permettant la résolution des équations aux dérivées partielles, en relation avec l'équation générale de mouvement en utilisant les variables d'Euler, Les équations d'Euler sont utilisées dans ce cours pour établir l'équation général du mouvement et l'équation général d'équilibre dans le cas des fluides au repos.

Ce document pédagogique est divisé en quatre chapitres, le premier chapitre est consacré à l'hydrostatique, le deuxième à la dynamique des fluides parfaits, le troisième chapitre est consacré à la dynamique des fluides réelles, le quatrième au calcul de réseaux de distribution d'eau.

à la fin du polycopié on présente une bibliographie, incluant les références des documents utilisées pour la rédaction de ce polycopié de cours.

CHAPITRE I : Statique des fluides (Hydrostatique)

I.1. Généralités.

La mécanique des fluides (l'hydrostatique) est constituée par la branche de la mécanique appliquée qui traite le comportement des fluides au repos et en mouvement.

Certaines propriétés des fluides jouent un rôle important dans l'établissement des principes de la mécanique des fluides :

- En hydrostatique : c'est le poids spécifique qui est la propriété la plus importante.
- En hydrodynamique : la densité et la viscosité sont les propriétés dominantes.

I.2. Définitions

Les fluides sont des substances susceptibles de s'écouler, ils prennent la forme du récipient qui les contient. On réparti les fluides en liquides et en gaz :

- Les liquides sont pratiquement incompressibles, les gazes sont compressibles.
- Les liquides occupent des volumes bien définis et présentent des surfaces libres, le gaz occupe toutes les parties du récipient qui le contient (expansible).

Pour appliquer à l'étude des fluides, les principes fondamentaux de la mécanique, nous considérons le fluide comme un milieu homogène et continu, pouvant être décomposé en éléments de volume infiniment petits, chacun de ces éléments est soumis aux forces suivantes :

- Forces de volume : Due au poids de l'élément et aux forces d'inertie (chaque élément influe sur les autres par son poids et son inertie).
- Force de contact : transmise à la surface de l'élément par les éléments environnants.

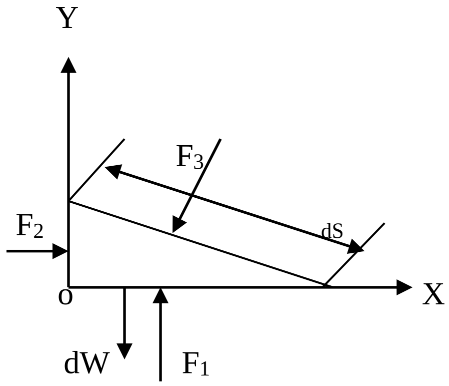
I.3. Fluide parfait

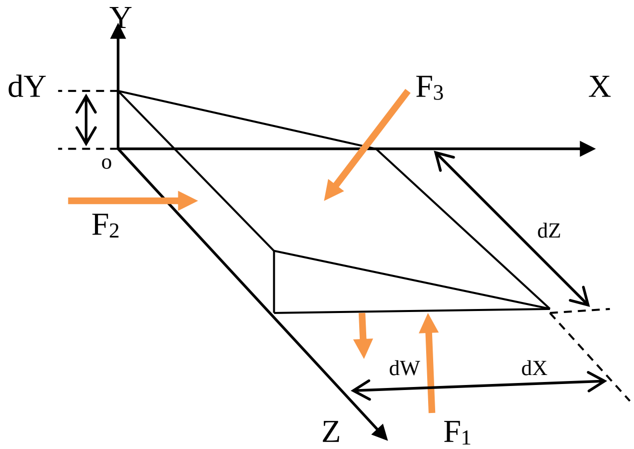
On appelle fluide parfait, un fluide pour lequel les forces de contacte sont toujours normales aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent, (cad : le fluide ne subit des parois que des forces normales et n'exercent que des pressions normales).

I.3.1. Pression en un point d'un fluide parfait.

Considérons un petit prisme triangulaire de liquide au repos, soumis à l'action du fluide qui l'entour. Les valeurs moyennes de pression sur les trois surfaces sont P_1, P_2, P_3, les forces de pression correspondantes sont F_1, F_2, F_3.

Dans la direction (oz), les forces sont égales et opposées, elles s'annulent.





Exprimons que ce prisme est en équilibre sous l'action des forces extérieures, ces forces sont :

a/ Les forces de volume :

$dW = \hat{W}\ dv = \hat{W}\ (½\ dx\ dy\ dz)$

Avec $\hat{W}$: poids de l'unité de volume (poids volumique)

dv = volume de l'élément considéré = ½ dx dy dz

b/ Les forces de contact : (normal aux surface)

soit F_1, F_2, F_3 avec $F_1 = P_1 dx\ dy$; $F_2 = P_2\ dy\ dz$; $F_3 = P_3\ ds\ dz$

Projetons l'équation d'équilibre sur les axes OX et OY

$\sum F_x = 0 \ \rightarrow F_2 - F_3 \cos(\pi/2 - \theta) = 0 \ \rightarrow \ F_2 - F_3 \sin\theta$

$P_2\ dy\ dz - P_3\ ds\ dz \sin\theta = 0$ ....(1)

$\sum F_y = 0 \ \rightarrow F_1 - F_3 \sin(\pi/2 - \theta) - dW = 0$

$P_1 dxdy - P_3\ ds\ dz \cos\theta - \hat{W}\ (½\ dx\ dy\ dz) = 0$ ....(2)

On a $dy = ds \sin\theta$ et $dx = ds \cos\theta$

Equation 1 $\rightarrow$ $P_2\ dy\ dz - P_3\ dy\ dz = 0$ donc $P_2 = P_3$

Equation 2 $\rightarrow$ $P_1\ dx\ dz - P_3\ dx\ dz - \hat{W}\ (½\ dx\ dy\ dz) = 0$

On divise par dx dz on trouve : $P_1 - P_3 - \hat{W}\ (½ dy) = 0$

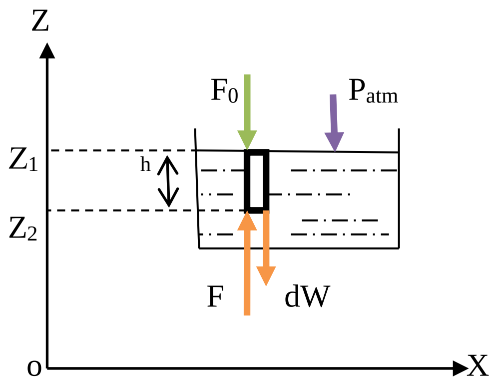
Si le prisme triangulaire tend vers un point dy = 0 et les pressions moyennes deviennent des pressions ponctuelles. $dy \rightarrow 0$ donc $P_1 = P_2$ et $P_2 = P_3$ donc $P_1 = P_2 = P_3$

Donc la pression en un point est la même dans toutes les directions.

Remarque :

Le quotient **P = dF / dS** de la force par la surface sur laquelle elle s'exerce est appelé pression du fluide au point considéré, c'est une grandeur scalaire, **dF** est appelée force de pression.

I.3.2. Répartition des pressions à l'intérieur d'un fluide incompressible au repos.



Projection sur OZ, $\sum F_{exterieur} = 0$

F_0 = Force due à la Pression atmosphérique

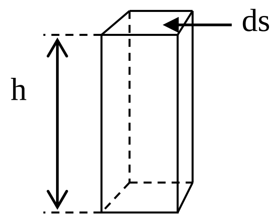
W = Force massique (poids de l'élément choisi)

F = Force de poussée hydrostatique de l'élément

$\sum F/z = 0 \Longrightarrow F - W - F_0 = 0$

Avec W = m g et F = P ds donc

$P ds - W - P_0 ds = 0$ (1)



Le poids de l'élément $W = m\,g = \rho\,.V\,.g = \rho\,.h\,ds\,.g$

Equat (1) $\rightarrow P\,ds - P_0\,ds - \rho\,h\,ds\,.g = 0$

Donc : $P - P_0 - \rho\,h\,.g = 0$

D'où $\mathbf{P = P_0 + \rho\,h.\,g = P_0 + \rho\,.g\,(Z_1 - Z_2) = P0 + \hat{W}\,h;}$ **(2)**

Avec : $\hat{W} = \rho\,.g$ et $h = Z_1 - Z_2$

La formule (2) nous permet de calculer la pression en n'importe quel point d'un fluide au repos.

La grandeur (P_0) est la même pour toutes les surfaces libres, c'est pourquoi on peut dire que la pression agissante sur la surface libre d'un liquide est transmise sans changement à tous les point de ce liquide (c'est le principe de pascal).

$$\mathbf{P = P_0 + \rho\,.g\,(Z_1 - Z_2) \Longleftrightarrow \frac{P}{\rho\,.g} + Z_1 = \frac{P}{\rho\,.g} + Z_2 = H_Z}$$ **(hauteur piézométrique)**

Comme il est possible de recommencer la même démonstration pour tous les points, nous pouvons écrire que la hauteur piézométrique reste constante $\frac{P}{\rho\,.g} + Z_1 = C^{te}$

I.3.3. Unité de pression.

Dans le système international (SI), l'unité de calcul de pression est le pascal (Pa) ou newton / m^2 (N/ m^2) , on utilise aussi le Bar.

1 bar = 10^5 Pa = 10^5 N/ m^2 = 1 kg f / cm^2 = 760 mm hg

En industries, la majorité des manomètres à colonne de liquide sont gradués directement en hauteur de liquide manométrique.

1 mm d'eau = 9.81 Pa et 1 mm Hg = 13.6 mm d'eau 133.3 Pa   (Hg : mercure)

I.3.4. Définitions : surface de niveau, surface libre, pression relative, pression absolue.

1/ Surface de niveau :

On appelle surface de niveau, le lieu des points de fluide soumise à la même pression,

$$\frac{P}{\rho\,.g} + Z_1 = C^{te}$$

Si P = C^{te} $\rightarrow$ **Z = C^{te} ,** les surfaces de niveau sont donc des plans horizontaux.

2/ Surface libre :

A la surface de séparation du liquide et de l'air ambiant, la pression est constante et égale à la pression atmosphérique, cette surface est dite libre.

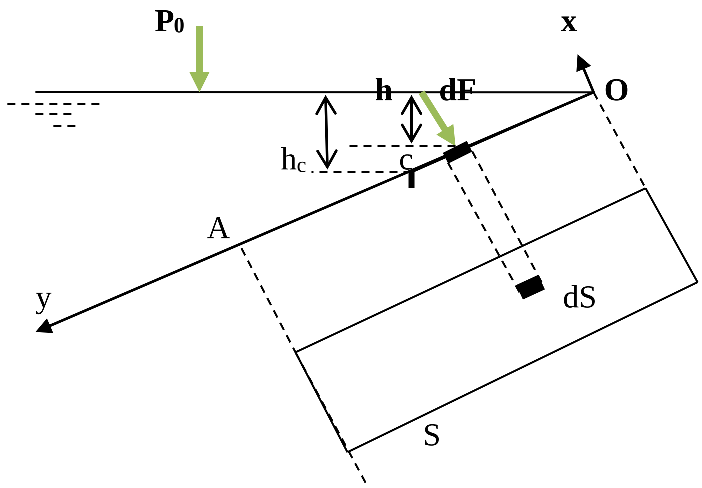
3/ Pression relative (effective), Pression absolue :

On effectue les mesures de pression à l'aide de différents types de manomètre, les manomètres nous indiquent la pression relative (effective) C.à.d. les valeurs au-dessus de la pression atmosphérique.

$P_{abs} = P_{relative} + P_{atm}$ avec $P_{atm} = 10^5$ Pa = 1 atmosphère.

I.4. Calcul des forces de pression.

I.4.1. Cas d'une paroi plane.



plan OA projeté sur xoy

Utilisons l'équation fondamentale

De l'hydrostatique pour déterminer

La force de pression totale d'un fluide

Sur une paroi plane de section S, faisant

Un angle α avec l'horizontal.

Sur une section infiniment petite dS

Agit une force élémentaire dF, on a :

$dF = P\,dS = \rho\,.g\;h\,dS$

Avec h : profondeur de la section dS, intégrant suivant toute la surface S

$F_p = \int dF = \rho\,.g \int h\,dS$ avec $h = y \sin\alpha$

$F_p = \rho\,.g \sin\alpha \int y\,dS$,   y : coordonnée du centre de l'air dS.

$\int y\,dS = S.\,y_c$, ou y_c : coordonnée du CDG au point C

$F_p = \rho \cdot g\, y_c \sin\alpha \cdot S$, avec $y_c \sin\alpha = h_c$, alors $\mathbf{F_p = \rho \cdot g\, h_c \cdot S}$

Avec : h_c : profondeur du centre de gravité.

S : surface de la paroi.

ρ : Masse volumique du liquide.

C.à.d. : la force de pression sur une paroi plane est égale au produit de l'air par la pression au centre de gravité de cette paroi.

I.4.2. Position du centre de la force de pression agissant sur une paroi plane.

Même schéma on ajoute le point D sur le plan de position h_D, on utilise l'équation des moments pour le point D, par définition on a : le moment de la résultante par rapport à 1 axe quelconque, est égale à la somme des moments des forces composantes.

$F_p * Y_D = \int_s y dF_p$ .... (1)

$F_p = \rho \cdot g\, h_c \cdot S$ .... (2)

Et on a $dF_p = \rho \cdot g\, h_c \cdot dS$ et $F_p = \rho \cdot g\, y_c \sin\alpha \cdot S$

Avec $h_c = y_c \sin\alpha$ et $h = y \sin\alpha$

Donc $F_p = \rho \cdot g\, y_c \sin\alpha \cdot S$ et $d F_p = \rho \cdot g\, y \sin\alpha \cdot d S$

En remplaçant dans l'équation (1) on trouve :

$F_p * Y_D = \int_s y dF_p = \int_s y \; \rho \cdot g\, y \sin\alpha \cdot d S = \rho \cdot g\, y \sin\alpha \int_s y^2 \, ds$

Par définition on a : $\int_s y^2 \, ds = I_x$ moment d'inertie de la surface S par rapport a l'axe OX

$Y_D = \frac{1}{Y_c}\int_s Y^2 \, dS$ d'où $Y_D = \frac{I_x}{S.Y_C}$ .... (3)

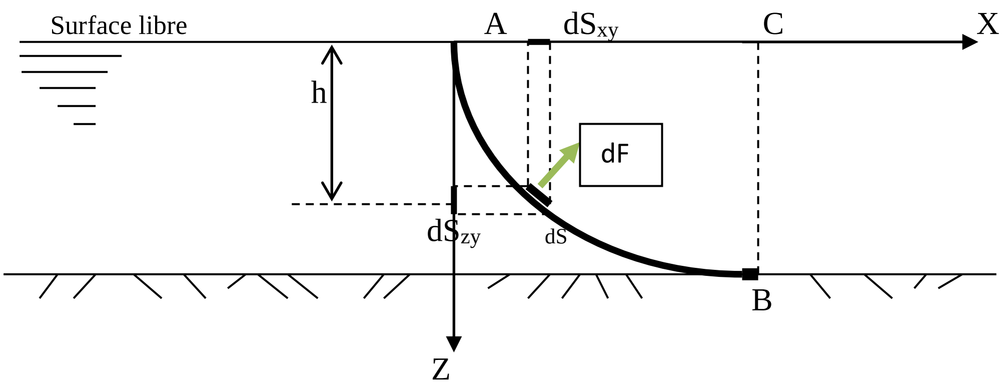
Le théorème de Huygens nous permet de calculer le moment d'inertie de la surface S par rapport à l'axe OX passant par le centre de gravité CDG (I_{XG}).

On a $I_X = I_{XG} + Y_C^2 * S$

En remplaçant dans l'équation (3) on trouve: $\mathbf{Y_D = Y_C + \frac{I_{xG}}{S\, Y_C} = Y_C + \Delta Y}$

Cad : le point d'application de la force totale $\mathbf{F_p}$ qui est $\mathbf{Y_D}$ se trouve plus bas que le centre de gravité de la surface, la distance entre ces deux points est égale a $\mathbf{\Delta Y}$.

I.4.3. Cas d'une paroi courbé (surface gauche).



Le Principe reste le même : sur chaque élément de surface s'exerce une force **dF = P dS ;** normale a cet élément.Considérons la paroi cylindrique (AB) à plan vertical (Cad : ¼ de cercle), soit AB une paroi cylindrique perpendiculaire au plan du dessin.

Pour déterminer la force de pression totale $\mathbf{F_p}$ qui s'exerce sur la paroi AB on décompose en général la force élémentaire dF en projection horizontal $\mathbf{dF_x}$ et vertical $\mathbf{dF_y}$.

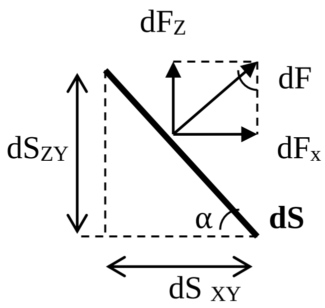
$dF = \rho \cdot g\, h \cdot dS$

$dF_x = dF \sin\alpha = \rho \cdot g\, h \cdot dS \sin\alpha$

$dF_z = dF \cos\alpha = \rho \cdot g\, h \cdot dS \cos\alpha$

On a $dS_{XY} = dS \cos\alpha$ (projection sur le plan xoy)

Et $dS_{ZY} = dS \sin\alpha$ (projection sur le plan yoz)



$$\mathbf{F_X = \rho \cdot g \int_s h\,ds_{yz} = \rho \cdot g\, S_{oy} = \rho \cdot g\, h_c\, S_{zy}}$$

Avec $\mathbf{S_{oy}}$: moment statique de la surface S_{zy} par rapport a l'axe oy

h_c : profondeur du CDG de la projection vertical S_{zy} de la paroi AB

$$\mathbf{F_X = \rho \cdot g\, h_c\, S_{zy}} \qquad \text{................ (1)}$$

F_Z : composante vertical

$d F_Z = \rho \cdot g\, h\, d S \cos\alpha\,) = \rho \cdot g\, h\, dS_{XY}$

$$\mathbf{F_Z = \rho \cdot g \int_s h\,dS_{XY} = \rho \cdot g \int_W dW_{AB} = W_{AB}} \qquad \textbf{(volume AB)}$$

Cad : la force de pression verticale est égale au poids du volume W_{AB}

$$\mathbf{F_Z = \; . g . W_{AB}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Résumé

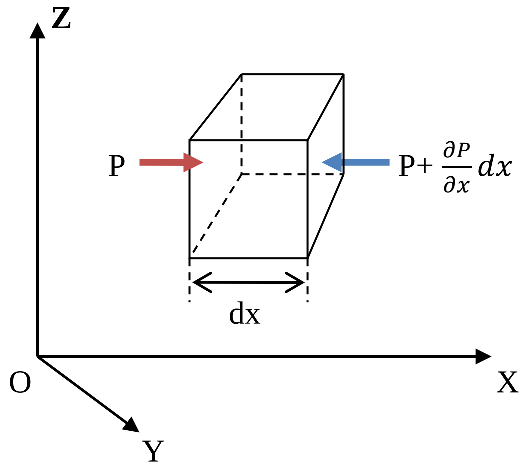
1/ soit un fluide au repos dans un réservoir de forme quelconque, la poussée F_X sur une paroi S dans une direction horizontal quelconque, est identique à la poussée s'exerçant sur la projection S_X de cette paroi sur un plan vertical YZ perpendiculaire à la direction horizontal considérée. (Résultante et centre de poussée).

2/ la poussée Fz sur une paroi S, dans la direction vertical est égale au poids de la colonne fluide vertical s'appuyant sur le contour de la paroi limité vers le bas par la paroi et vers le haut par la surface libre, (poids réel ou imaginaire) F_z passe par le CDG de cette colonne .

Equations 1 et 2 $\longrightarrow$ $$\mathbf{F} = \sqrt{\boldsymbol{F_X^2 + F_Z^2}}$$

I.5. Equation fondamentale de la statique des fluides.

I.5.1. Equilibre dans le cas général.



Supposant un volume infiniment petit

Sous forme de parallélépipède élémentaire

de coté dx ;dy,dz. Avec dW = dxdydz

Sur ce volume considéré agissent les forces

Massiques et les force de contact

- La force massique est proportionnelle

  A la masse du fluide considéré $dF_m = \gamma m = \gamma \rho\, dW = \gamma\, \rho\, dxdydz$

  Avec **m** : masse du volume considéré m = dW . ρ

  $\boldsymbol{\gamma}$: Accélération du volume dW dans l'espace $\boldsymbol{\gamma}\ (\boldsymbol{X, Y, Z})$.

1/ Les projections des forces massique, qui agissent sur le parallélépipède considéré dans les directions des axes du système de coordonné sont égale à :

$dF_{mx} = X . \rho .\, dxdydz$

$dF_{my} = Y . \rho\, .dxdydz$

$dF_{mz} = Z .\, \rho .\, dxdydz$

2/ Soit (p) la pression au point (M) (au centre de la facette 1.2.3.4) en passant au point (N) au centre de la facette (5.6.7.8) la coordonnée X varie d'une variation dx, et l'augmentation correspondante de la pression sera : $\frac{\partial P}{\partial x}dx$

Soit $P_N = P_M + \frac{\partial P}{\partial x}dx$

Du point M au point N, la pression augmente d'une valeur $\frac{\partial P}{\partial x}dx$.

Les forces superficielles (force de contacte) qui agissent sur les faces (1.2.3.4) et (5.6.7.8) sont :

$\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dydz.$

$dF_{1.2.3.4}$ = Pdydz , la force élémentaire au point N, facette (5.6.7.8) devient :

$dF_{5.6.7.8} = (P + \frac{\partial P}{\partial x}dx)\, dydz$

L'équation d'équilibre du parallélépipède en projection sur l'axe des x sera

$$dF_{1.2.3.4} - dF_{5.6.7.8} + dF_{mx} = 0$$

$$Pdydz - (P + \frac{\partial P}{\partial x}dx)\, dydz + X.\rho.\, dxdydz = 0$$

$dydz\,[P - P - \frac{\partial P}{\partial x}dx + X\,\rho.\mathrm{dx}] = 0$; dydz $\neq 0$ $\longrightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial x}dx = X\,\rho.\mathrm{dx}$

$X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$ donc $\boldsymbol{X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0}$

De même si en fait la projection sur les axes Y et Z nous obtenons les équations d'Euler:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0} \\ &\boldsymbol{Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0} \\ &\boldsymbol{Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0} \end{aligned}\right] \text{(équations d'Euler)}$$

C'est l'équation fondamental d'équilibre (équation d'Euler).

Pour établir l'équation fondamentale de l'hydrostatique, en utilise l'équation d'Euler en multiplions chacune de ces équations respectivement par dx , dy, dz et en faisons la somme.

$$\left.\begin{aligned} &X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad * \,dx \\ &Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad * \,dy \\ &Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad * \,dz \end{aligned}\right]$$

Xdx + Y dy + Z dz = $\boldsymbol{\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right]}$; équation générale d'équilibre.

I.5.2. application de l'équation générale d'équilibre en hydrostatique

Xdx + Y dy + Z dz = $\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right]$

En équilibre ou en hydrostatique, les composantes de l'accélération de la force massique sont :

X = 0, Y = 0, Z = -g l'équation générale d'équilibre devient :

$$-gdz = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}dz \longrightarrow -\rho g = \frac{\partial P}{\partial z} \longrightarrow dp = -\rho g\,dz$$

En intégrant on trouve : $P = \int_{z_2}^{z_1} -\rho g\,dz = -\rho g z + c$

On calculant la constante à partir des conditions initiales, on trouve

$$\mathbf{P = P_0 + \rho g h}$$

Avec P_0 : pression au niveau de la surface libre (N/ m^2)

H : profondeur du point considéré (m)

ρ : Masse volumique du liquide (kg/ m^3)

I.5.3. application de l'équation générale d'équilibre à un vase tournant uniformément

Soit un vase cylindrique verticale de rayon **R**

Contenant initialement un liquide dont la surface

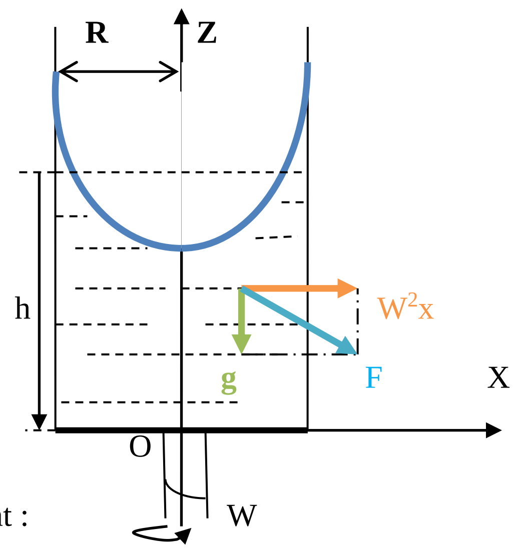
Libre est à la hauteur **h.**

Faisant tourner ce vase autour de son axe (oz)

A une vitesse angulaire (W), on choisi le plan zox

Comme plan de symétrie.

Soit une particule fluide à la distance (x) de l'axe oz



Les composantes de la force active par unité de masse sont :

X = W^2 x, Y = 0, Z = -g

L'équation d'équilibre devient : dP = ρ(X dx + Y dy + Z dz)

$$dp = \rho(W^2\,x\,dx - g\,dz) \longrightarrow P = \rho\left(\frac{W^2x^2}{2} - gz\right) + c^{te}$$

Les surfaces d'égale pression ont pour tracé dans le plan (ZoX), des courbes d'équation dP = 0

($P = C^{te}$ à la surface libre donc $dP = 0$)

$P = C^{te} \longrightarrow \frac{W^2x^2}{2} - gz = C^{te} \quad , \rho \neq 0$

Ces surfaces sont donc des paraboloïdes d'axe oz

$Z = \frac{W^2x^2}{2g} - \frac{C^{te}}{g}$ pour $z = 0$, $x = 0$ on a $C^{te} = 0$

La valeur de la constante, s'obtient en écrivons qu'il ya conservation du volume initial : $\pi R^2 h$

$dV = 2\pi\, x\, dx * z = 2\pi\, x\, dx \left(\frac{W^2x^2}{2g} - \frac{C^{te}}{g}\right)$

$V = \int dv = \int 2\,\pi\, x\, dx = \frac{\pi}{g}\left[\frac{W^2R^2}{4} - CR^2\right] = \pi R^2 h$

$h = \frac{W^2R^2}{4g} - \frac{C}{g} \longrightarrow C = \frac{W^2R^2}{4} - gh$

L'équation de la surface libre sera :

$W^2x^2 - 2gz = \frac{W^2R^2}{4} - 2gh$ .... (1)

Equation (1) devient :

Pour $x = 0 \longrightarrow z = h - \frac{W^2R^2}{4}$

Pour $x = R \longrightarrow z = h + \frac{W^2R^2}{4}$

L'abaissement du milieu de la surface libre est égale au relèvement sur les cotés.

I.6. Exercices d’application (Hydrostatique)

Exercice N°1 :

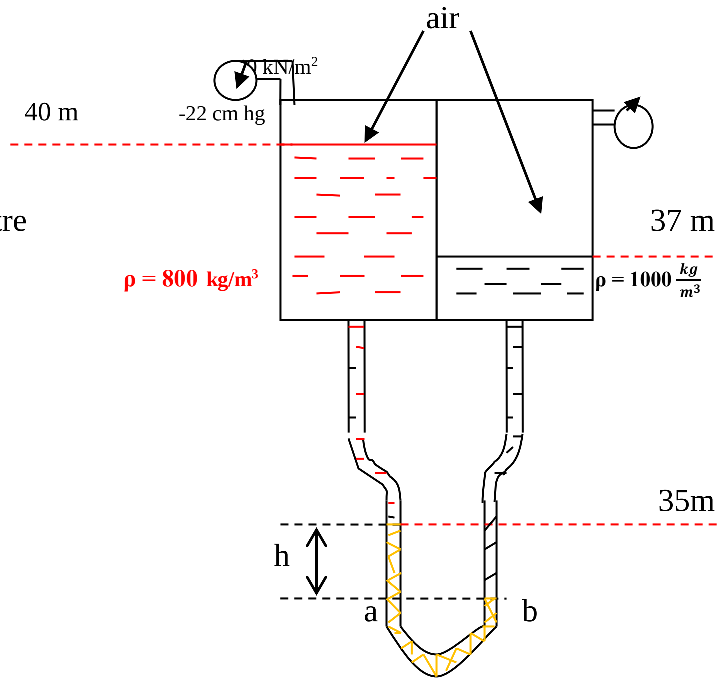
Pour le système ci-contre :

Calculer la dénivellation (h) du manomètre

A mercure en forme de U

les cotes des surfaces libres sont

Indiquées sur le schéma .



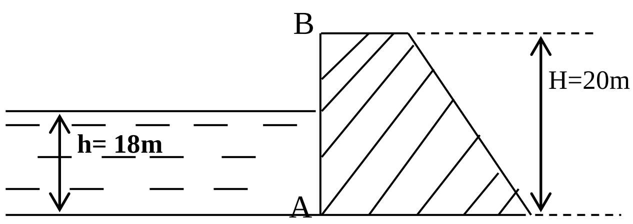
Exercice N°2 :

Calculer la force de pression P exercée

<u>Par mètre</u> de longueur du barrage

(Trapèze rectangulaire).

Données : ρ = 1000 $\frac{kg}{m^3}$, g = 10 m/s^2



Exercice N°3 :

On considère le système ci-contre,

Déterminer l’intensité de la force

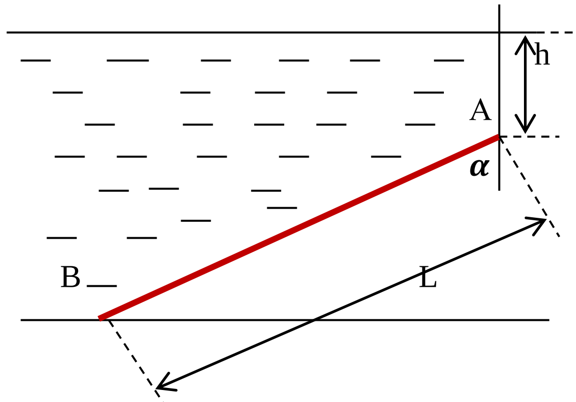
Hydrostatique résultante appliquée

Sur la plaque AB, calculer le point

d’application.

Données : h = 2m, L = 4m, ρ = 1000 $\frac{kg}{m^3}$

g= 10 m/s^2, l = 1 ml (largeur de la paroi)

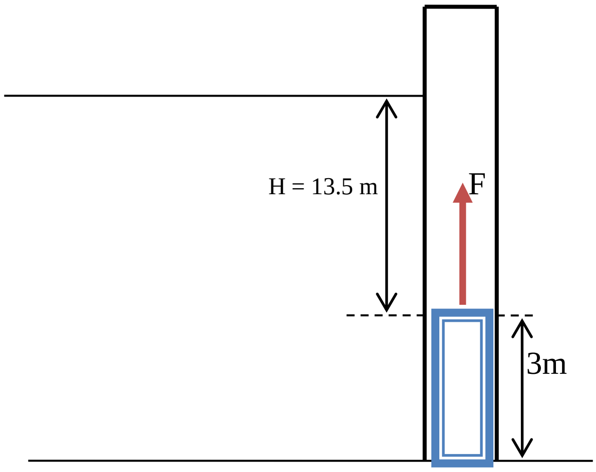


Exercice N°4 :

Dans un barrage en béton, la sortie de l'eau

est contrôlé par un portail glissant, que l'on

peut ouvrir ou fermer verticalement, le portail



Est de 1m de large et 3m de hauteur.

Si le centre de gravité du portail est à 15 m de profondeur et la masse du portail M = 250 kg,

Déterminer la force (F) nécessaire pour ouvrir le portail, en supposant que le coefficient de frottement f = 0.25.

On donne : $\rho = 1000\ \frac{kg}{m^3}$, $g = 9.81\ m/s^2$

Exercice N°5 :

Déterminer la composante horizontale des forces

de pression agissant sur la vanne secteur AB

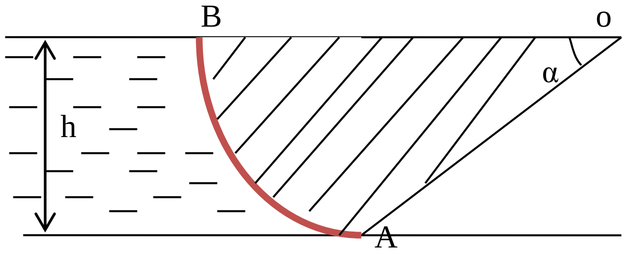
de forme circulaire.

Déterminer la composante verticale.

Déterminer la force résultante et son inclinaison.

Données : α = 45°, la largeur l = 1 ml (mètre linéaire)

h = 10 m.



PARTIE II : dynamiques des fluides parfaits incompressible (Théorème de Bernoulli)

II.1. Equation générale du mouvement (équation d'EULER)

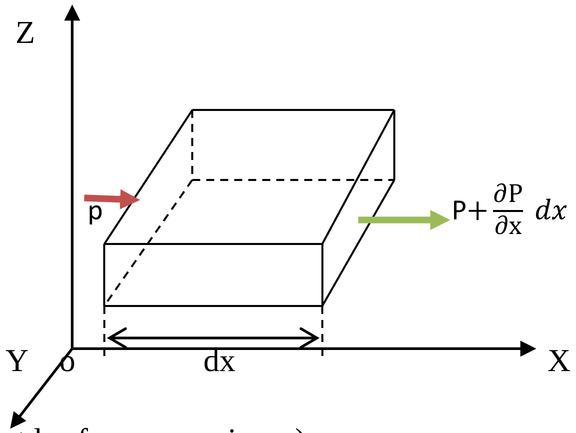
Dans un courant permanent d'un fluide parfait, prenons un point M (x, y , z)

Et construisons un parallélépipède droit

Infiniment petit avec les arrêtes dx, dy, dz

L'équation d'Euler s'écrit pour un fluide au

Repos (statique):



$$X - \frac{1}{\rho} . \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$Y - \frac{1}{\rho} . \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$Z - \frac{1}{\rho} . \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

(les forces de contacts équilibrent les forces massiques)

En dynamique des fluides pour un fluide parfait incompressible en mouvement, l'équation d'Euler (équation de mouvement) devient :

$$X - \frac{1}{\rho} . \frac{\partial P}{\partial x} = \gamma_x = \frac{dV_x}{dt}$$

$$Y - \frac{1}{\rho} . \frac{\partial P}{\partial y} = \gamma_y = \frac{dV_x}{dt}$$

$$Z - \frac{1}{\rho} . \frac{\partial P}{\partial z} = \gamma_z = \frac{dV_x}{dt}$$

X, Y, Z : Composantes de la force massique.

$\boldsymbol{\gamma_x, \gamma , \gamma_z}$: Composantes de l'accélération du mouvement du parallélépipède.

II.2. Ecoulement permanent d'un fluide incompressible non visqueux (Th de Bernoulli) :

Pour un filet élémentaire d'un fluide parfait, utilisons les équations de mouvement (Euler)

$$X - \frac{1}{\rho} . \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dV_x}{dt} \quad * \, dx$$

$$Y - \frac{1}{\rho} . \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dV_y}{dt} \quad * \, dy$$

$$Z - \frac{1}{\rho} . \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dV_z}{dt} \quad * \, dz$$

et on fait la somme des trois équations.

$$\frac{dV_x}{dt} dx + \frac{dV_y}{dt} dy + \frac{dV_z}{dt} dz = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} . \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = dP$$

(différentiel totale exacte de la pression)

on a : Xdx+Ydy+Zdz = dU ; (dU : différentiel totale exacte d'une fonction massique U(x,y,z)).

Par définition on a : $dx = V_x \, dt$, $dy = V_y \, dt$, $dz = V_z \, dt$

Donc :

$$\frac{dV_x}{dt}\,dx + \frac{dV_y}{dt}\,dy + \frac{dV_z}{dt}\,dz = \frac{dV_x}{dt}\,V_x\,dt + \frac{dV_y}{dt}\,Vy\,dt + \frac{dV_z}{dt}\,Vz\,dt = d(\frac{V_x^2}{2}) + d(\frac{V_y^2}{2}) + d(\frac{V_z^2}{2})$$

On a les dérivées : $d(\frac{V_x^2}{2}) = V_x dV_x$

$d(\frac{V_y^2}{2}) = V_y\, dV_y$

$d(\frac{V_z^2}{2}) = V_z dV_z$

L'équation d'Euler devient : $\mathbf{d\,(\frac{V^2}{2}) = dU - \frac{1}{\rho}\,dP}$ .... (1)

Avec V : vitesse d'écoulement, U : La force massique, et P la pression dans le liquide.

Considérant le cas du mouvement d'un fluide parfait incompressible :

- Les forces massiques agissant sur ce fluide se réduisent à la force de pesanteur
  X = 0 , Y = 0 et Z = - g donc dU = - g dz

  L'équation (1) devient :

  $$\mathbf{-g\,dz - \frac{1}{\rho}\,dP - d\,(\frac{V^2}{2}) = 0 \longrightarrow dz + \frac{1}{\rho g}\,dP + d\,(\frac{V^2}{2g}) = 0}$$

  $$\mathbf{d(z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}) = 0} \quad \text{......................... (2)}$$

Le groupe des trois termes est une grandeur constante le long d'une ligne de courant, l'équation obtenue s'appelle « **Equation de BERNOULLI** » d'un fluide parfait pour une ligne de courant donnée.

$$\mathbf{Z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = C^{te}}$$

Chaque membre de cette équation à une dimension linéaire (m):

Z : hauteur de position (cote du point considéré)

$\mathbf{\frac{P}{\rho g}}$: Hauteur due à la pression (hauteur d'une colonne du fluide considéré qui mesure

La pression P à la section considérée.

$\mathbf{\frac{V^2}{2g}}$: Hauteur cinétique (hauteur due à la vitesse)

$\mathbf{Z + \frac{P}{\rho g}}$ **:** Hauteur piézométrique.

II. 3. Définitions ligne de charge, ligne piézométrique :

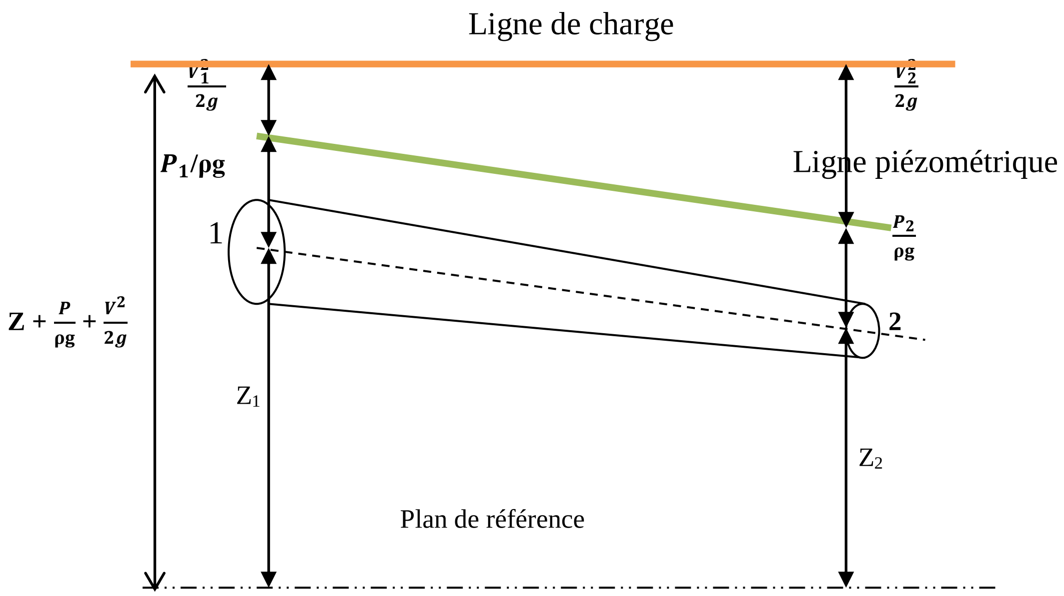
1/ La ligne de charge :

La ligne de charge est une représentation graphique de l'énergie en chaque section par rapport à un plan de référence, on peut reporter l'énergie totale ($Z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}$) comme valeur linéaire en mètre de fluide pour chaque section représentative.

2/ **La ligne piézométrique** :

C'est une ligne située en dessous de la ligne de charge à une distance égale à la hauteur de vitesse ($\frac{V^2}{2g}$) en mètre à la section considéré.

Remarque 1 : Les deux lignes restent parallèles pour toutes les sections dont l'air est égale.



Remarque 2 :

Dans l'étude des fluides réels à cause des pertes d'énergie due aux frottements, le tracé du plan de charge ne sera plus un plan horizontal mais une courbe décroissante, on dira qu'il ya perte de charge.

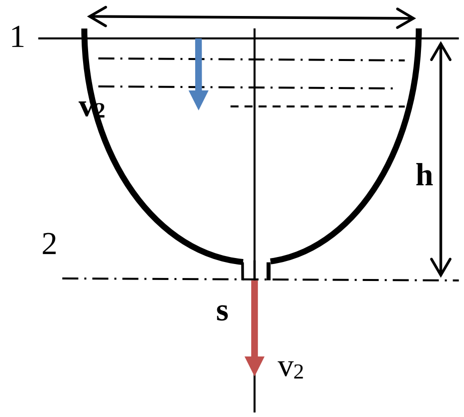
II.4. Application du théorème de Bernoulli.

Le théorème de Bernoulli est utilisé dans le résolution de la majorité des problèmes de la dynamique des fluides, nous présentons ici quelques application de ce théorème.

II.4.1 Vidange d'un réservoir

Soit un réservoir S de grande dimension ouvert à l'air libre et comportant un orifice **S.**

De section (s) a la partie inférieure (s <<< S)



A/ calcul de la vitesse théorique d'écoulement :

appliquons l'équation de Bernoulli entre les sections 1 et 2 :

$$Z_1 + P_1/\rho g + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + P_2/\rho g + \frac{V_2^2}{2g}$$

$P_1 = P_2 = P_{\text{atmosphérique}}$

$Z_1 = h$ et $Z_2 = 0$

s << S donc $V_1 << V_2$ (on considère que $\frac{V_1^2}{2g}$ *et négligeable devant* $\frac{V_2^2}{2g}$)

L'équation de Bernoulli devient :

$h = \frac{V_2^2}{2g}$ $\leftrightarrow$ $\mathbf{V_{2\ \text{théorique}} = \sqrt{2gh}}$ **Formule de torecelli**

Le débit théorique qui correspond à la vitesse V_2 est : $\mathbf{Q_{V\ \text{théorique}} = s\sqrt{2gh}}$

B/ Calcul du débit réel :

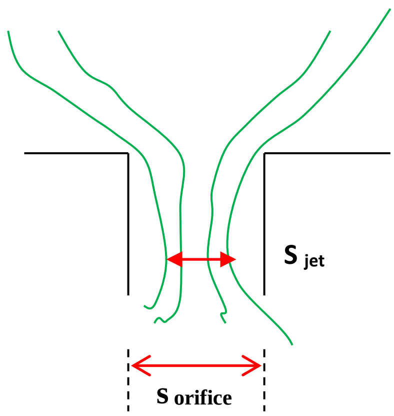
- En réalité a cause des frottements (due aux parois), la vitesse réelle est plus petite que la vitesse théorique

$$V_{\text{Réele}} = \varphi_1\sqrt{2gh} \quad ; \quad \varphi_1 < 1 \text{ appelé coefficient de vitesse.}$$

- La forme des lignes de courant indiquée sur la figure est tel que le liquide ne pouvant tourner brusquement, la section réelle du jet est inférieure à la section de l'orifice

$S_{\text{réelle du jet}} = \varphi_2\, S_{\text{orifice}}$

Avec $\varphi_2 < 1$ appelé coefficient de contraction.



Le débit réel sera :

$Q_{V\text{réel}} = s_{\text{réel}}.\ V_{\text{réele}} = \varphi_1\ \varphi_2.\ s.\ \sqrt{2gh}$

$\mathbf{Q_{V\text{réel}} = \alpha\ s.\ \sqrt{2gh}}$

Avec : s : section de l'orifice

h : hauteur du liquide

$\boldsymbol{\alpha} = \varphi_1\ \varphi_2$ coefficient du débit.

Le coefficient $\boldsymbol{\alpha}$ dépend de la forme de l'orifice

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.60}$ pour un simple trou aux bords amincis (ajutage en paroi mince)

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.98}$ ajutage en forme de tuyère moulée.

C/ calcul du temps de vidange :

A un instant donnée on a :

$$\mathbf{Q_V} = \frac{-dV}{dt} = \boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{s.}\ \sqrt{\mathbf{2gZ}} \quad \text{..} \ (1)$$

Le signe (-) indique une diminution de volume

Z : cote de la surface libre par rapport à l'orifice

V : volume de fluide contenu dans le réservoir à l'instant (t).

Pendant un temps (dt), Z varie de dZ, le volume perdu sera : dV = S dZ

On supposant la section du réservoir constante S = C^{te}

L'équation (1) implique : $- S\,\frac{dZ}{dt} = \boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{s.}\ \sqrt{\mathbf{2gZ}} \quad \leftrightarrow \quad dt = \frac{-S}{\alpha\, s\sqrt{2g}} * \frac{dZ}{\sqrt{Z}}$

$$t = \int_h^0 \frac{-S}{\alpha\, s\sqrt{2g}} \cdot \frac{dZ}{\sqrt{Z}} = \frac{S}{\alpha\, s\sqrt{2g}} \cdot (2)\sqrt{Z}\,\Big|_0^h$$

$$\mathbf{t} = \frac{2Sh}{\alpha\, s\sqrt{2gh}} \qquad \text{ou encore} \qquad \mathbf{t} = \frac{2V_0}{Q_{V_0}}$$

Avec (S) : section du réservoir ; s : section de l'orifice ; h : section de l'orifice.

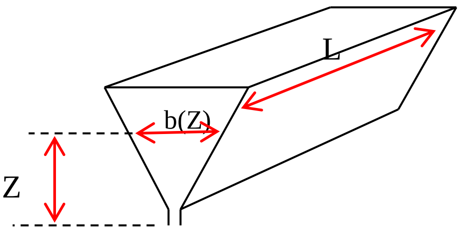
Remarque : Si la section (S) n'est pas constante :

Exemple :

S (z) = b(z) . L

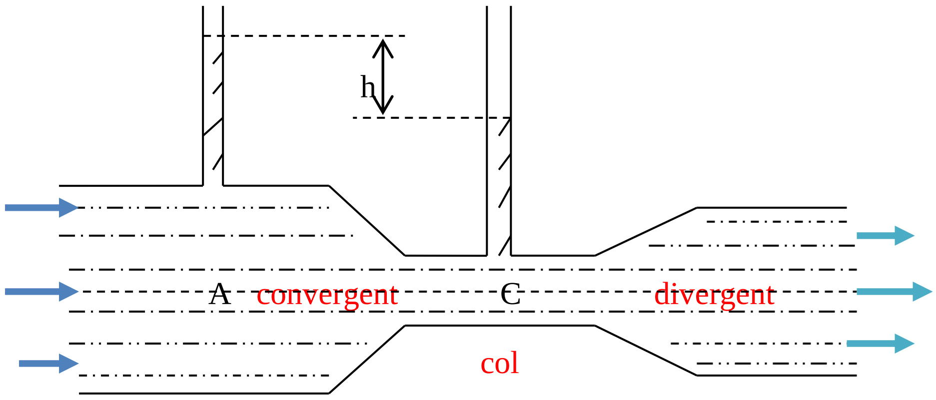
dv = b(z). L.dz

(b(z) : calculée par les triangles semblables).



II.4.2. Tube de Venturi :

Le tube de Venturi est une conduite circulaire horizontale comportant un convergent, un col et un divergent, il sert à calculer la vitesse en différentes sections d'une conduite.



Pour calculer la différence de pression entre le convergent et le col en applique l'équation de Bernoulli pour une ligne de courant entre les points A et C :

$$Z_A + P_A/\rho g + \frac{V_A^2}{2g} = Z_C + P_C/\rho g + \frac{V_C^2}{2g} \quad \text{.......................} \quad (1)$$

Soit S_A : la section d'un tuyau à l'entrée (section du convergent)

S_C : la section du col.

La conservation du débit entrant et sortant nous donne :

$$Q_V = V_A\, S_A = V_C\, S_C \longrightarrow V_C = V_A . \frac{S_A}{S_C}$$

L'équation (1) devient : $\frac{P_A - P_C}{\rho g} = h = \frac{V_C^2}{2g} - \frac{V_A^2}{2g} = \frac{V_A^2}{2g}\left[\left(\frac{S_A}{S_C}\right)^2 - 1\right]$

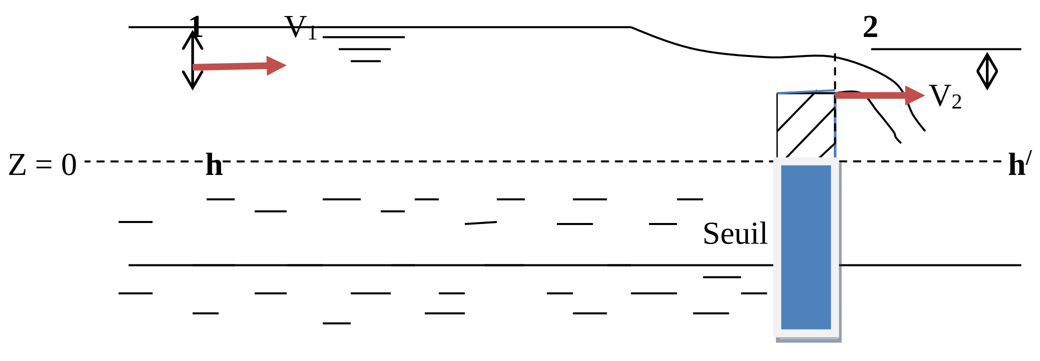
La dépression du col est donc égale à la hauteur dynamique ($\frac{V^2}{2g}$)

$\left[\left(\frac{S_A}{S_C}\right)^2 - 1\right]$: **Coefficient de Venturi**

La mesure expérimentale de la hauteur du liquide dans le piézomètre (h) permet de calculer la vitesse V et donc le débit Q_V dans la conduite.

II.4.3. Déversoir (théorie simplifiée)

Un déversoir est un barrage établi en travers d'un canal, il est utilisé comme moyen de mesure du débit Q_V, ou pour relever le niveau d'eau à l'amant du canal.



Pour une hauteur (h) donnée, le débit s'établi d'une manière stable, pour une valeur ($h^/$), tel que le débit soit maximal.

On admet que les filets au dessus du seuil sont horizontaux et on applique le théorème de Bernoulli entre les sections (1) et (2) pour un filet de courant supérieur on a : $P = P_{\text{Atmosphérique}}$

$$Z_1 + P_1/\rho g + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + P_2/\rho g + \frac{V_2^2}{2g}$$

V_1 est trop faible devant V_2 donc $\frac{V_1^2}{2g} \cong 0$; $\left(\frac{V_1^2}{2g}\ \textit{négligeable devant}\ \frac{V_2^2}{2g}\right)$

$h + 0 = h^{/} + \frac{V^2}{2g}$; $h = h^{/} + \frac{V^2}{2g}$; $\mathbf{V = \sqrt{2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}^{\wedge})}$

On admet aussi que tous les filets au dessus du seuil ont la même vitesse, alors :

$V = \sqrt{2g(h - h^{/})}$ .... (1)

Si (b) est la largeur du seuil, donc :

$Q_V = V.S = V.b.h^{/} = bh^{/}\sqrt{2g(h - h^{/})}$

Alors $Q_V = b\, h^{/}\sqrt{2g}\ \sqrt{h - h^{/}}$ .... (2)

Q_V = maximum, si $\boldsymbol{\frac{dQ_V}{dh^{/}} = 0}$

$$\boldsymbol{\frac{dQ_V}{dh^{/}} = b\sqrt{2g}\ \left[\sqrt{h - h^{/}} - \frac{h^{/}}{2\sqrt{h - h^{/}}}\right] = 0}$$

Après résolution de l'équation on trouve , Soit : $\mathbf{h^{/}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}h}$

On remplaçant ($h^{/}$) par ca valeur dans l'équation (2) on trouve :

$$\mathbf{Q_{V\,max} = 0.385\ bh\sqrt{2gh}}$$

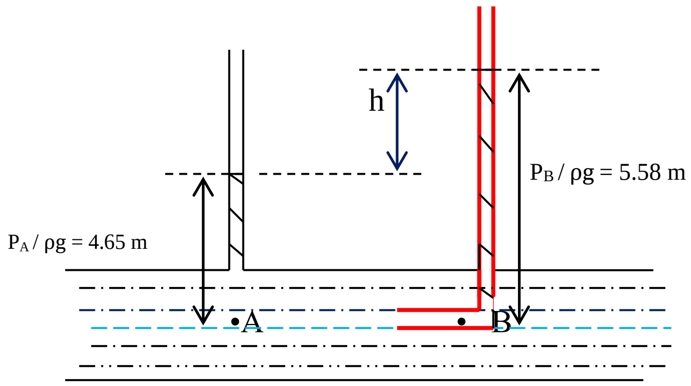
Avec b : largeur de seuil

h : hauteur du liquide par rapport au plan de référence à l'amant du déversoir.

II.4.4.Tube de Pitot :

On l'appelle aussi tube de pression total, si on dispose un tube recourbé à angle droit contre le courant dans une conduite et en relie se tube à un manomètre, celui-ci indiquera la pression :

$$H_t = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}$$



Exemple :

On cherche la vitesse d'écoulement

Dans la conduite :

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A{}^2}{2g} + 0 = \frac{P_B}{\rho g} + 0 + 0$$

$\frac{V_A{}^2}{2g} = \frac{P_B}{\rho g} - \frac{P_A}{\rho g}$ $\longrightarrow$ $V_A = \sqrt{2g(\frac{P_B}{\rho g} - \frac{P_A}{\rho g})}$

$V_A = \sqrt{2.10(5.58 - 4.64)} = 4.18$ m/s

Donc $5.58 = \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A{}^2}{2g} = \frac{P_B}{\rho g}$

II.5. Théorème de quantité de mouvement (théorème d'Euler)

Le théorème de quantité de mouvement permet de déterminer les forces agissantes sur un volume de fluide, quand on connait seulement les vitesses des éléments situées sur les surfaces limitant le volume du liquide.

Ce théorème n'applique pas la conservation de l'énergie mécanique (équation de Bernoulli), il est applicable aussi bien aux fluides parfaits qu'aux fluides réels.

Le théorème dit :

La variation de la quantité de mouvement linéaire = l'impulsion linéaire. Ou encore :

$$\sum \overrightarrow{M^{\bullet}_{Sortant}} - \sum \overrightarrow{M^{\bullet}_{Entrant}} = \sum \overrightarrow{F_{Exterieures}}$$

$\boldsymbol{M^{\bullet} = \rho.s.v^2}$; quantité de mouvement

ρ : Masse volumique du liquide.

v = vitesse d'écoulement du liquide.

s = section du jet

On a plusieurs types de forces extérieurs, comme la force de gravité, la force de pression, les forces exercées par des parois mobiles etc.

Remarque : les quantités de mouvements : $\overrightarrow{M^{\bullet}_{Sortant}}$, $\overrightarrow{M^{\bullet}_{Entrant}}$, $\overrightarrow{F_{Exterieures}}$, sont des grandeurs vectorielles et doivent être ajoutées ou retranchées en conséquence.

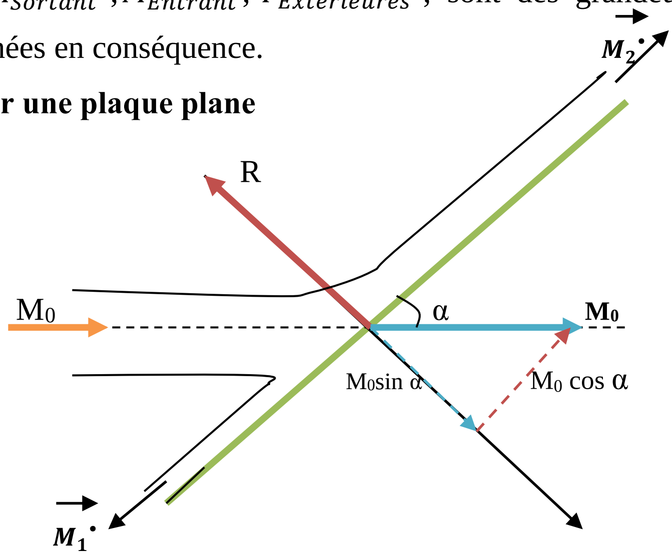
Exemple : Force exercée par un jet d'eau sur une plaque plane

Un jet d'eau en forme de lame horizontale

De section **s_0** , de vitesse v_0 , frappe une

Plaque carré homogène faisant un angle

α avec la direction du jet.



$\sum \overrightarrow{M^{\bullet}_S} - \sum \overrightarrow{M^{\bullet}_e} = \sum \overrightarrow{F_{Ext}}$

Suivant ox : $0 + 0 - M^{\bullet}_0 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = R$

Suivant oy : $-\boldsymbol{M_1}$ **+M$_2$ – M$_0$ sin $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ = 0**

On posons **$M^{\bullet}$ = ρ .v. Q$_v$,** on trouve une relation entre les débits entrant et sortant.

Note : on trouve une deuxième relation entre les vitesses V_0 , V_1 et V_2 on utilisons l'équation de Bernoulli entre (0-1) et (0-2).

II.6. Exercices d'application (Dynamique des fluides)

Exercice N° 1 :

Un réservoir rempli d'eau, de très large section R ,dont le niveau Z_0 est maintenu constant.(figure ci-dessous), AC est une conduite de diamètre D. En C se trouve une courte tuyère de diamètre d. C et D sont sur la même horizontale.

1- Etablir l'expression de la vitesse v_D de l'eau à la sortie de la tuyère (justifier les approximations effectuées). Exprimer le débit volume q en fonction de v_D , d, et g ;

En déduire l'expression de la vitesse v dans la conduite AC.

A.N : Z_0 = 4,0 m ; D = 5,0 cm ; d = 2,0 cm. Calculer v_D , q et V.

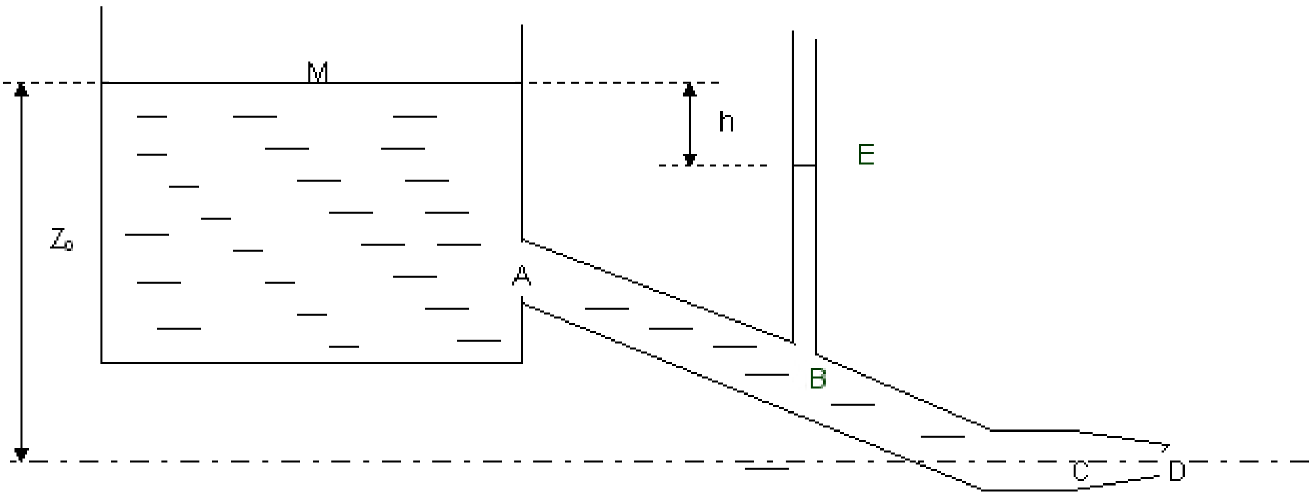
2- Un tube est placé en B en liaison avec la conduite.

2.1- En utilisant la relation de Bernoulli, exprimer littéralement la pression au point B.

2.2- Par application de la loi de l'hydrostatique dans le tube vertical, calculer littéralement la pression p_B .

2.3- En déduire l'expression de h, différence des niveaux des surfaces libres du réservoir et du tube en fonction de v et g. Pouvait-on prévoir aisément ce résultat ?

3- Représenter la ligne de charge et la ligne piézométrique effective de l'installation.



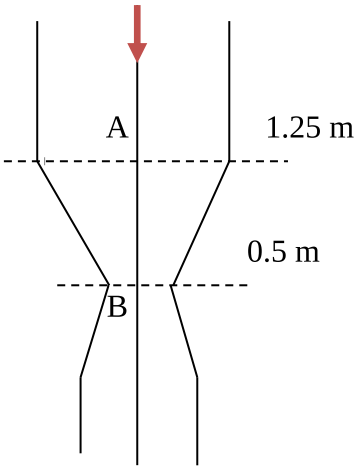
Exercice N° 2

On étudie l'écoulement de l'eau à travers un tube de Venturi vertical.

(Schéma ci-contre). On supposera le liquide comme parfait et le régime d'écoulement permanent.

1- Ecrire l'équation de continuité et exprimer la relation littérale entre les vitesses moyennes v_A , v_B et les diamètres D_A et D_B . Calculer v_A et v_B .

2- Appliquer la relation de Bernoulli entre A et B en précisant clairement la signification des différents termes. Calculer $\Delta p = p_A - p_B$



Données numériques :

Débit-volume : $q_v = 200$ L / s.

$D_A = 30{,}0$ cm, $D_B = 15{,}0$ cm.

$\rho_{eau} = 1000$ kg.m^{-3} .

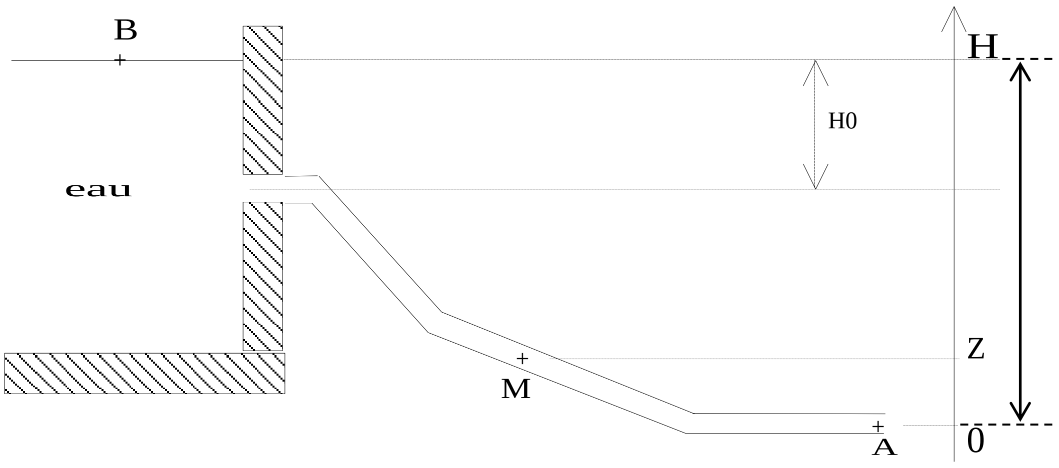
Les côtes Z_A et Z_B des points A et B sont indiquées sur le schéma. $Z_A = 1.25$ m et $Z_B = 0.5$ m.

Exercice N° 3

Une conduite amène de l'eau à la température moyenne de 10 °C , de masse volumique constante ρ, d'un barrage vers la turbine d'une centrale hydroélectrique. La conduite cylindrique, de diamètre constant D = 30 cm et de longueur L = 200 m, se termine horizontalement, son axe étant situé à H = 120 m au-dessous de la surface libre de l'eau dans le barrage de très grande capacité. Le départ de la conduite est à H_0 = 20 m au dessous du niveau pratiquement constant. On néglige tout frottement et on prendra les valeurs numériques suivantes :

$g = 9.81$ m.s^{-2}, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}, $p_{atm} = 1{,}01$ bar.

Schéma :



1- Calculer littéralement la vitesse v_A du fluide à la sortie A (extrémité à l'air libre) ; faire l'application numérique.

Calculer le débit-volume q_v à la sortie.

2 - Pour éviter ce problème dans la conduite, on dispose à l'extrémité A de la conduite une tubulure de section décroissante (injecteur), de diamètre de sortie d et d'axe horizontal.

Expliquer qualitativement comment est modifiée la pression à l'intérieur de la conduite.