Traveaux dérigées Math3

Etudier la nature des séries suivantes<< couirs1>>

1) $\sum\limits_{n\geq 3}\frac{1}{n^2-1}$, on pose $u_n=\frac{1}{n^2-1}$ elle peut s'écrire sous la forme $u_n=\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ alors la somme partielle associée à notre série soit S_n s'écrit sous la forme $S_n=u_3+u_4+.....+u_{n.}$alors on a

$$S_3=u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$S_4=u_3+u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$S_5=u_3+u_4+u_5=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\tfrac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right),$$

$$S_6=u_3+u_4+u_5+u_6=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\tfrac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\text{On dédduit que } S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

, alors on passe à la limite on obtient

$\lim\limits_{n\infty}S_n=\lim\limits_{n\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{12}$. alors la série $\sum\limits_{n\geq 3}\frac{1}{n^2-1}$ converge vers $\dfrac{5}{12}$ càd $\sum\limits_{n=3}^{n=\infty}\frac{1}{n^2-1}=\dfrac{5}{12}$.

2) $\sum\limits_{n\geq 4}\frac{1}{n^2-2n-3}$, on pose $u_n=\dfrac{1}{n^2-2n-3}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n-3}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ alors n-3=k, $k\geq 1$

$$S_4=u_4=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4-3}-\frac{1}{4+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)$$

$$S_5=u_4+u_5=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)$$

$$S_6=u_4+u_5+u_6=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)$$

$$S_7=u_4+u_5+u_6+u_7=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}\right)$$

$$S_8=u_4+u_5+u_6+u_7+u_8=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)$$

$$S_9=u_4+u_5+u_6+u_7+u_8+u_9=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\frac{1}{7}-\tfrac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$

$$\text{On dédduit que } S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

, alors on passe à la limite on obtient

$\lim\limits_{n\infty}S_n=\lim\limits_{n\infty}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)$donc la série converge vers $\dfrac{13}{48}$

3) $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{1}{n^2-25}$. <<Inrérogation>>

TD n°2

1) $\sum \dfrac{n^2+1+\sqrt{n}}{n-1}$,on pose $u_n = \dfrac{n^2+1+\sqrt{n}}{n-1}$, on utilisant le théorème d'équivalence on remarque que $u_n \overset{n\infty}{\simeq} v_n = \dfrac{n^2}{n} = n$,comme $\lim\limits_{n\infty} v_n = \infty \neq 0$ alors la série $\sum v_n$ diverge, par conséquent $\sum u_n$ diverge.

2) $\sum \dfrac{2}{n!-1}$,on pose $u_n = \dfrac{2}{n!-1}$ alors pour n assez grand $u_n \overset{n\infty}{\simeq} v_n = \dfrac{2}{n!}$, comme $n! = n(n-1)(n-2)......1$ alors $\dfrac{n!}{n(n-1)} \geq 1$ pour tout $n \geq 2$ alors $v_n = \dfrac{2}{n!} \leq \dfrac{2}{n(n-1)} = w_n$ d'aprés exemple 1 $cours1$ la série $\sum w_n$ converge, alors on utilisant le théorème d'équivalence on déduit que la série $\sum v_n$ converge, par conséquent la série $\sum u_n$ converge d'aprés le théorème de comparaison.

3) $\sum \dfrac{1}{n^n+2}$, on pose $u_n = \dfrac{2}{n^n+1} \overset{n\infty}{\simeq} v_n = \dfrac{2}{n^n} \leq w_n = \dfrac{2}{n^2}$ la série $\sum w_n$ est de Riemann <<$\alpha = 2 > 1$ >> elle converge par conséquent la série $\sum v_n$ converge donc le théorème d'équivalence donne que la série $\sum u_n$ converge..

4) $\sum \left(\frac{1}{1-\cos\frac{1}{n}}\right)^{\beta}$ <<INTEROGATION>>