المحاضرة

7

2- الطريقة غير المباشرة

3- خصائص المتوسط الحسابي

2- الطريقة غير المباشرة:

عندما تكون لدينا بيانات كبيرة القيم فإننا نستخدم طريقة غير مباشرة في حساب المتوسط الحسابي (طريقة الانحراف عن متوسط فرضي)، الغرض منها هو تصغير قيم البيانات من أجل تسهيل عملية حساب المتوسط الحسابي.

2-1- المتوسط الحسابي البسيط: إذا كانت لدينا بيانات غير مبوبة أي في شكل سلسلة إحصائية، فإننا نتبع الخطوات التالية:

أ- نفرض قيمة ثابتة a تكون قريبة من القيم الأصلية وتتوسطها (نسميها متوسط فرضي)؛

ب- حساب الانحرافات d_i بين قيم السلسلة والمتوسط الفرضي: $d_i = X_i - a$؛

ج- حساب المتوسط الحسابي للقيم الجديدة: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$؛

د- حساب المتوسط الحسابي الأصلي حيث لدينا: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum(X_i - a)}{n} = \frac{\sum X_i - \sum a}{n} = \frac{\sum X_i}{n} - \frac{na}{n}$

$$\bar{d} = \bar{X} - a \Rightarrow \boxed{\bar{X} = \bar{d} + a}$$

مثال(3-3): لتكن لدينا القيم التالية: 12، 10، 15، 8، 5. أحسب الوسط الحسابي عن طريق انحرافات القيم عن وسط فرضي.

الحل: نفرض أن $a = 9$، وعليه نحسب الانحرافات وفق الصيغة التالية: $d_i = X_i - a$، فيتنج لدينا:

X_i	$d_i = X_i - a$
5	-4
8	-1
10	1
12	3
15	6
المجموع	5

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\bar{X} = \bar{d} + a = 1 + 9 = 10$$

كما أننا نحصل على نفس النتيجة بتطبيق العلاقة:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{n} = \frac{50}{5} = 10$$

2-2- المتوسط الحسابي المرجح: إذا كانت لدينا بيانات مبوبة أي في شكل توزيع تكراري فإننا نتبع نفس الخطوات السابقة

ولكن بوضع: $\boxed{\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k} d_i n_i}{\sum n_i}}$ كما أن: $\boxed{\bar{X} = \bar{d} + a}$

مثال(3-4): أحسب المتوسط الحسابي بطريقة الانحراف عن متوسط فرضي نفترض أنه $a = 800$؟

X_i	500	700	800	850	900	1000	المجموع
n_i	10	16	02	18	16	10	72

الحل:

X_i	n_i	$d_i = X_i - 800$	$d_i n_i$
500	10	-300	-3000
700	16	-100	-1600
800	02	0	0
850	18	50	900
900	16	100	1600
1000	10	200	2000
المجموع	72	/	-100

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i d_i}{\sum n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i d_i}{72} = \frac{-100}{72} = -1{,}39$$

حساب المتوسط الحسابي الأصلي: $\bar{X} = \bar{d} + a = -1{,}39 + 800 = 798{,}61$

إذن المتوسط الحسابي لهذه البيانات: 798,61.

ملاحظة: إذا كان المتغير الإحصائي مستمر فإننا نعوض X_i بمراكز الفئات C_i في كل المعادلات السابقة أي:

$$\boxed{\bar{X} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \cdots + n_k c_k}{\sum n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i c_i}{\sum n_i}}$$

$$\boxed{\bar{X} = f_1 c_1 + f_2 c_2 + \cdots + f_k c_K = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i}$$

$\boxed{\bar{X} = \bar{d} + a}$ حيث $\boxed{\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{k} d_i n_i}{\sum n_i}}$ و $\boxed{d_i = c_i - a}$

مثال(3-5): البيانات التالية تمثل أوزان 60 طالبا بالكيلوغرام في أحد أقسام الـــ: *LMD* بكلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير بجامعة المسيلة، والمطلوب حساب متوسط أوزان الطلبة؟

الجدول(3-2): أوزان 60 طالبا بالكيلوغرام في أحد أقسام الـ: LMD بكلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير بجامعة المسيلة

أوزان الطلبة X_i	عدد الطلبة n_i
$]55 - 50]$	2
$]60 - 55]$	5
$]65 - 60]$	12
$]70 - 65]$	16
$]75 - 70]$	14
$]80 - 75]$	8
$]85 - 80]$	3
المجموع	60

الحل:

$C_i n_i$	C_i	n_i عدد الطلبة	X_i أوزان الطلبة
105	52,5	2	$]55-50]$
287,5	57,5	5	$]60-55]$
750	62,5	12	$]65-60]$
1080	67,5	16	$]70-65]$
1015	72,5	14	$]75-70]$
620	77,5	8	$]80-75]$
247,5	82,5	3	$]85-80]$
4105	/	60	المجموع

$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i c_i}{\sum n_i} = \frac{4105}{60} = 68{,}42$ ، ومنه فإن متوسط أوزان الطلبة هو 68,42 كلغ.

3- خصائص المتوسط الحسابي:

أ- يتأثر المتوسط الحسابي بالقيم المتطرفة.

مثلا: تتكون أسرة من 5 أفراد، تبلغ أعمارهم على الترتيب: 55، 49، 13، 11، 10.

المتوسط الحسابي هو: $\overline{X} = \frac{55+49+13+11+10}{5} = \frac{138}{5} = 27{,}6$

نلاحظ أن النتيجة المحصل عليها لا تمثل أي قيمة من القيم المدروسة، وبالتالي نستنتج أنه لا يمكن استعمال المتوسط الحسابي في مثل هذه الحالات، لأنه من المفروض أن تكون قيم المتغير الإحصائي متمركزة حول النتيجة المحصل عليها.

ب- يستعمل المتوسط الحسابي في حالة المتغيرات الكمية أي القابلة للقياس.

ج- لا يمكن حساب المتوسط الحسابي في حالة البيانات المفتوحة (أقل من، أكثر من).

د- مجموع انحرافات القيم عن متوسطها يساوي دائما الصفر، أي: $\boxed{\sum(X_i - \overline{X}) = 0}$

$$\sum(X_i - \overline{X}) = \sum X_i - \sum \overline{X}$$
$$\sum(X_i - \overline{X}) = \sum X_i - n\overline{X} = n\overline{X} - n\overline{X} = 0$$

تدل هذه الخاصية على أن المتوسط الحسابي يقع في مركز البيانات.

هـ- مجموع مربع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات انحراف نفس القيم عن أي قيمة أخرى،

أي: $\boxed{\sum(X_i - \overline{X})^2 < \sum(X_i - X_\alpha)^2}$ ، حيث: $\overline{X} \neq X_\alpha$

تدل هذه الخاصية على أن المتوسط الحسابي أقرب إلى البيانات X_i من أي قيمة أخرى.

مثلا: إذا كانت لدينا القيم التالية: 24، 8، 6، 16، 14، 4، أثبت صحة الخاصيتين د ، هـ؟

نفرض أن النقطة المختارة هي: $X_\alpha = 10$ ولدينا: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6} X_i}{n} = \frac{72}{6} = 12$

القيم x_i	$(X_i-\bar{X})$	$(X_i-\bar{X})^2$	(X_i-X_α)	$(X_i-X_\alpha)^2$
24	12	144	14	196
8	-4	16	-2	4
6	-6	36	-4	16
16	4	16	6	36
14	2	4	4	16
4	-8	64	-6	36
$\sum X_i = 72$	$\sum(X_i-\bar{X}) = 0$	$\sum(X_i-\bar{X})^2 = 280$	$\sum(X_i-X_\alpha) = 12$	$\sum(X_i-X_\alpha)^2 = 304$

بالنسبة للخاصية الأولى نلاحظ من خلال الجدول أن: $\sum(X_i-\bar{X}) = 0$ وهو المطلوب.

أما بالنسبة للخاصية الثانية فمن خلال مقارنة النتائج المتحصل عليها في الجدول أعلاه نجد:

$280 < 304$ ينتج عن ذلك: $\sum(X_i-\bar{X})^2 < \sum(X_i-X_\alpha)^2$.