المحاضرة

10

2- المتوسط التوافقي $\overline{X}_H$

3- المتوسط التربيعي $\overline{X}_Q$

الفصل الرابع: مقاييس التشتت

أولا: مقاييس التشتت المطلقة

2- المتوسط التوافقي $\bar{X}_H$:

المتوسط التوافقي هو متوسط نادر الاستعمال نوظفه في بعض الحالات لحساب القدرة الشرائية المتوسطة لسلعة ما بدلالة سلعة أخرى، وعادة ما تكون هذه الوحدة هي الوحدة النقدية لبلد معين، وكذا لحساب السرعة المتوسطة لمركبة على مسالك مختلفة.

2-1- في حالة سلسلة إحصائية:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, \dots, x_n$ نحسب المتوسط التوافقي $\bar{X}_H$ على هذه السلسلة بالطريقة التالية:

- نحسب مقلوبات القيم X_i: $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$

- نحسب متوسط المقلوبات (مجموع المقلوبات تقسيم n): $\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{n}$

- نقلب هذا المتوسط فنحصل على $\bar{X}_H$ أي: $\boxed{\bar{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}}$

2-2- في حالة توزيع تكراري:

في حالة التوزيع التكراري فإن المتوسط التوافقي يحسب بالعلاقة التالية: $\boxed{\bar{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{x_i}}}$

3- المتوسط التربيعي $\bar{X}_Q$:

3-1- في حالة سلسلة إحصائية:

لتكن السلسلة الإحصائية $x_1, x_2, \dots, x_n$ نحسب المتوسط التربيعي $\bar{X}_Q$ على هذه السلسلة بالطريقة التالية:

$$\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

$$\boxed{\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}}$$

3-2- في حالة توزيع تكراري:

في حالة التوزيع التكراري فإن المتوسط التربيعي يحسب بالعلاقة التالية: $\boxed{\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}}$

نتيجة: مهما تكن البيانات فإنه في كل الأحوال: $\boxed{\bar{X}_H < \bar{X}_G < \bar{X} < \bar{X}_Q}$

ملاحظة: إذا كان المتغير الإحصائي مستمر فإننا نعوض $\boldsymbol{X_i}$ بمراكز الفئات $\boldsymbol{C_i}$ في كل المعادلات السابقة.

مثال(3-12): لتكن البيانات التالية: 3، 2، 4، 6

المطلوب: 1- أحسب: المتوسط الحسابي، المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي، المتوسط التربيعي؟

- الحل:

أ- المتوسط الحسابي: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4} = \frac{2+3+4+6}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$

ب- المتوسط الهندسي: $\bar{X}_G = \sqrt[n]{x_1 . x_2 . \dots \dots x_k \dots \dots . x_n} = \sqrt[4]{2 \times 3 \times 4 \times 6} = 3{,}46$

ج- المتوسط التوافقي: $\bar{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{4}{\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}} = \frac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{4}{1{,}247} = 3{,}21$

د- المتوسط التربيعي: $\bar{X}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}{4}} = \sqrt{\frac{(2)^2+(3)^2+(4)^2+(6)^2}{4}} = 4{,}03$

الفصل الرابع: مقاييس التشتت

تمهيد:

رأينا أن الهدف من مقاييس النزعة المركزية هو قياس مستوى الظاهرة المدروسة، فمثلا نقيس مستوى الأجور في مؤسسة اقتصادية بواسطة الأجر المتوسط، ونقيس مستوى الدخل في بلد ما بواسطة الدخل المتوسط، ونقيس مستوى الطالب في آخر السنة بواسطة المعدل وهو متوسط حسابي...إلخ، إلا أن هذه المقاييس تشوبها مساوئ عدة، أهمها إخفاء الفروق الموجودة بين القيم، فعند إجراء مقارنة بين ظاهرتين يمكن أن يتساوى متوسطهما الحسابي، ورغم ذلك نجد أن انتشار البيانات في الظاهرتين مختلف كثيرا لأن البيانات غير متجانسة، لهذا وجدت مقاييس أخرى تعطينا فكرة عن مدى تباعد البيانات عن بعضها البعض، تسمى هذه المقاييس بمقاييس التشتت.

مثال(4-1):

إذا كان لدينا مجموعتان من الموظفين، وكل مجموعة تتكون من خمسة أشخاص حيث الأجور الشهرية (دج) لكل فرد في المجموعتين هي كالآتي:

- المجموعة الأولى: 30000 ، 31000 ، 32000 ، 33000 ، 34000.
- المجموعة الثانية: 16000 ، 20000 ، 24000 ، 44000 ، 56000.

لو قمنا بحساب المتوسط الحسابي لكل مجموعة، نجد أنه متساوي في كل منهما ويساوي 32000، ومع ذلك أجور المجموعة الأولى أكثر تجانسا من أجور المجموعة الثانية، من أجل ذلك لجأ الإحصائيون إلى استخدام مقاييس أخرى لقياس مدى تجانس البيانات أو مدى انتشار البيانات حول مقياس النزعة المركزية، ويمكن استخدامها في المقارنة بين مجموعتين أو أكثر من البيانات، ومن هذه المقاييس، مقاييس التشتت و مقاييس الشكل.

سنتطرق في هذا الفصل إلى مقاييس التشتت على أن نتطرق إلى مقاييس الشكل في الفصل اللاحق.

أولا: مقاييس التشتت المطلقة

هذا النوع من المقاييس يقيس التشتت بقيمة مطلقة أي بمقادير لها وحدة قياس وهي نفس وحدة قياس المتغير الإحصائي موضوع الدراسة، وهناك العديد من مقاييس التشتت المطلقة تتفاوت أو تختلف في طريقة الحساب، المعنى الاقتصادي والإحصائي، الدقة في قياس التشتت، نذكر منها:

- المدى E، الانحراف المتوسط EM، التباين $V(X)$، والانحراف المعياري $\delta(X)$.

1- المدى E:

هو الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة في البيانات (السلسلة أو الجدول) أي:

- القانون في حالة سلسلة إحصائية أو حالة توزيع تكراري: $\boxed{E = Max(X_i) - Min(X_i)}$

ملاحظة: نلاحظ أن المدى يقيس التشتت بدلالة قيمتين فقط، وهما قيمتان متطرفتان لا تعكسان حقيقة الظاهرة المدروسة فهو لا يعطي القياس الحقيقي للتشتت.

2- الانحراف المتوسط EM:

هو متوسط البعد بالقيمة المطلقة لقيم المتغير الإحصائي عن المتوسط الحسابي:

- القانون في حالة سلسلة إحصائية: $$EM = \frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

- القانون في حالة توزيع تكراري: $$EM = \frac{\sum_{i=1}^{k}n_i|X_i-\bar{X}|}{\sum n_i} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ملاحظة:

-يمكن أن نعوض $f_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$ فتصبح العلاقة (2) كما يلي: $$EM = \sum_{i=1}^{k} f_i|X_i - \bar{X}|$$

- نلاحظ أن EM يحسب التشتت بدلالة كل البيانات ويقيس التشتت حول أدق وأحسن مقاييس النزعة المركزية وهو المتوسط الحسابي، فهو إذن مقياس جيد للتشتت، إلا أن هاتين الصيغتين ستصبحان في الإحصاء الرياضي دوال ذات مدلول إحصائي وهي الدوال بالقيمة المطلقة، ونحن نعرف أن الدراسة الرياضية للدوال ذات القيمة المطلقة ثقيلة نوعا ما، وعليه نسعى إلى تسهيل المهمة بإلغاء القيمة المطلقة وتعويضها بما يكافؤها لقياس التشتت، والذي يؤدي هذا الغرض، أي مقياس للتشتت صالح وسهل الاستعمال في الإحصاء الوصفي والإحصاء الرياضي، وهو الانحراف المعياري ذو الرمز $\delta(X)$.

3- التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\delta(X)$:

أ- التباين $V(X)$:

- القانون في حالة سلسلة إحصائية: $$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

- القانون في حالة توزيع تكراري: $$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(X_i-\bar{X})^2}{\sum n_i} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

- **ملاحظة:** يمكن أن نعوض $f_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$ فتصبح العلاقة (2) كما يلي: $$V(X) = \sum_{i=1}^{k} f_i(X_i - \bar{X})^2$$

ب- الانحراف المعياري $\delta(X)$:

وهو الجذر التربيعي للتباين، أي:

- القانون في حالة سلسلة إحصائية: $$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

- القانون في حالة توزيع تكراري: $$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(X_i-\bar{X})^2}{\sum n_i}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ملاحظة:

- المقياس الحقيقي للتشتت هو الانحراف المعياري وليس التباين لأن هذا الأخير هو عبارة عن قيمة إحصائية ليس لها وحدة قياس، بينما الانحراف المعياري فهو قيمة إحصائية تعبر عن التشتت ولها وحدة قياس (نفس وحدة قياس X).

- يمكن أن نعوض $f_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$ فتصبح العلاقة (2) كما يلي: $$\delta(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i(X_i - \bar{X})^2}$$