

## 0.1 Règle de d'Alembert

**Theorem 1** Soit  $\sum u_n$  une série numérique à termes positifs.

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$  alors on  $\begin{cases} \text{si } l < 1 \text{ la série converge,} \\ \text{si } l > 1 \text{ la série diverge,} \\ \text{si } l = 1, \text{ rien à conclure.} \end{cases}$

**Example 2**  $\sum \frac{1}{n!}$ , on  $u_n = \frac{1}{n!}$  donc  $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$  comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ , alors la série  $\sum \frac{1}{n!}$  converge.

**Example 3**  $\sum \frac{2^n}{n^n}$ , on  $u_n = \frac{2^n}{n^n}$  donc  $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$  comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = 0 < 1$ , alors la série  $\sum \frac{2^n}{n^n}$  converge.

**Example 4**  $\sum \frac{2^n}{n}$ , on  $u_n = \frac{2^n}{n}$  donc  $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$  comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left( \frac{n}{n+1} \right) = 2 > 1$ , alors la série  $\sum \frac{2^n}{n}$  diverge.

**Example 5**  $\sum \frac{1}{n^2}$ , on  $u_n = \frac{1}{n^2}$  donc  $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$  comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$  rien à conclure, d'après Riemann la série converge.

**Example 6**  $\sum \frac{1}{n}$ , on  $u_n = \frac{1}{n}$  donc  $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$  comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  rien à conclure, d'après Riemann la série diverge.

## 0.2 Règle de de Cauchy

**Theorem 7** Soit  $\sum u_n$  une série numérique à termes positifs.

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$  alors on  $\begin{cases} \text{si } l < 1 \text{ la série converge,} \\ \text{si } l > 1 \text{ la série diverge,} \\ \text{si } l = 1, \text{ rien à conclure.} \end{cases}$

**Example 8**  $\sum \frac{2^n}{n^n}$ , on  $u_n = \frac{2^n}{n^n}$  donc  $(u_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n}$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = 0 < 1$  alors la série  $\sum \frac{2^n}{n^n}$  converge.

**Example 9**  $\sum \frac{1}{n^2}$ , on  $(u_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}}$  comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = 1$  rien à conclure, d'après Riemann la série converge.

**Example 10**  $\sum \frac{1}{n}$ , on  $(u_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$  comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1$  rien à conclure, d'après Riemann la série diverge.

**Exercise 11** Etudier la nature des séries suivantes:

1)  $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ , 2)  $\sum \frac{e^n}{n!}$ , 3)  $\sum \frac{n}{2^n}$ , 4)  $\sum n!e^{-n}$