Chapitre 2 : Systèmes linéaires libres à un degré de liberté.

2.1 Oscillateurs libres

Un système oscillant en absence de toute force *d'excitation*, est appelé oscillateur libre. Le nombre des grandeurs indépendantes intervenant dans le mouvement est appelée degré de liberté.

Un système isolé oscillant à un degré de liberté est déterminé par la coordonnée généralisée q qui est l'écart par rapport à l'équilibre stable.

2.2 Oscillateur harmonique

En mécanique, on appelle oscillateur *harmonique* qui, dès qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'une distance x (ou angle θ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à l'écartement x (ou θ) :

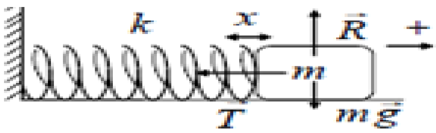
$$F = -Cx$$

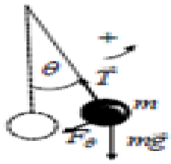
C : Une constante positive

2.2.1 Exemples

a) Le système masse-ressort ci-contre est un oscillateur harmonique car la force de rappel est $T = -kx$.

b) La force de rappel du pendule simple est $F_\theta = -mg\sin\theta$. Le pendule devient un oscillateur harmonique lorsque $\theta \ll 1$: $F_\theta = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$.





2.3 Pulsation propre d'un oscillateur harmonique

On définit l'oscillation harmonique par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

(En mécanique $q = x, y, z, \theta, \varphi$ ....En électricité $q = i, u, q$). Où ω_0 est appelée la pulsation propre du système.

On définit la période propre T_0 comme suit :

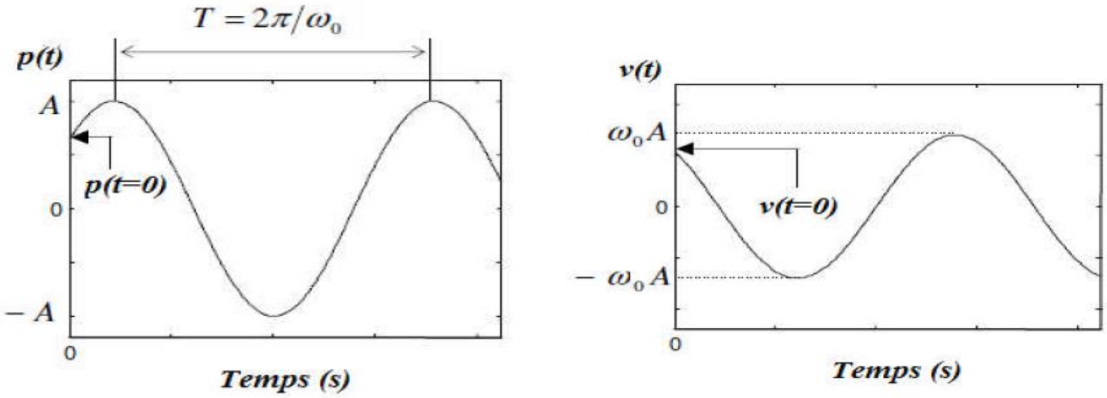
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

La solution de cette équation différentielle est de forme sinusoïdale tel que :

$$q(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Où ω_0 est appelée pulsation propre car elle ne dépend que des grandeurs propres à l'oscillateur. A représente l'amplitude des oscillations et ϕ est le déphasage. Les constantes A et ϕ sont déterminées par les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases}$$



A- Réponse de la position ***B- Réponse de la vitesse***

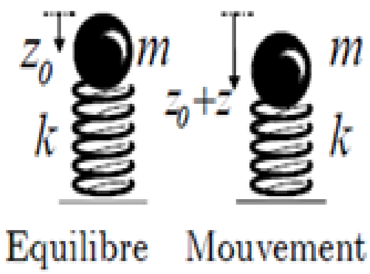
Figure 2.1 : Mouvement oscillatoire libre

Il faut signaler que toutes les oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre peuvent être assimilées à des mouvements linéaires et l'énergie potentielle peut s'exprimer sous forme quadratique de la coordonnée généralisée q.

En revanche, au-delà d'une certaine amplitude l'oscillation devient non linéaire. Quelques exemples d'applications :

2.3.1 Exemples

a) Trouver à l'aide du PFD l'équation du mouvement du système ci-contre.



- ✓ Calculer sa pulsation propre pour $m=1kg$ et $k=3N/m$.
- ✓ Trouver l'amplitude A et la phase $\emptyset$ sachant qu'initialement la masse est poussée $2cm$ vers le bas puis lancée vers le haut à une vitesse de $2cm/s$.

Solution

- ✓ PFD en équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow mg - kz_0 = 0$.
- ✓ PFD en mouvement : $\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} + \vec{T} = m\,\vec{a} \Rightarrow mg - k\left(z + z_0\right) = m\ddot{z}$.

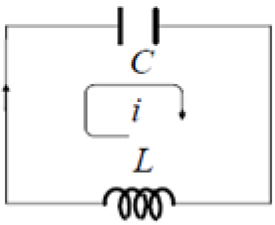
Grace à l'équation d'équilibre $mg - kz_0 = 0$, l'équation du mouvement se simplifie :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

- ✓ La pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{3}$ rad/s.
- ✓ L'équation horaire est : $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\cos\left(\sqrt{3}t + \phi\right)$. Utilisons les conditions initiales pour trouver A et $\emptyset$:

$$\begin{cases} z(0) = A\cos\phi = 2cm \\ \dot{z}(0) = -A\sqrt{3}\sin\phi = -2cm/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\phi = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = \dfrac{\pi}{6} \\ A = \dfrac{2}{\cos\phi} = \dfrac{2}{\cos\dfrac{\pi}{6}} \approx \dfrac{2}{0.866} \approx 1.155cm/s \end{cases}$$

b) Trouver à l'aide de la loi des mailles l'équation du mouvement de la charge q dans le circuit ci-contre, puis déduire la pulsation propre ω_0.



Solution :

La loi des mailles s'écrit :

$$\sum V_i = 0 \Rightarrow V_L + V_C = 0$$

$$V_C = \frac{q}{C} \quad et\ V_L = L\frac{di}{dt},\ i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

$$V_L = L\frac{d}{dt}\dot{q} = L\ddot{q}$$

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \\ \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

La pulsation propre est donc $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

2.4 L'énergie d'un oscillateur harmonique

L'énergie d'un oscillateur harmonique est la somme de ses énergies cinétiques et potentielles :

$$E = T + U$$

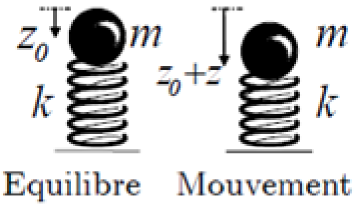
- ✓ L'énergie cinétique de translation d'un corps de masse m et de vitesse v est $T_{translation} = \frac{1}{2}mv^2$. Pour une bobine $T = \frac{1}{2}Li^2$.
- ✓ L'énergie cinétique de rotation d'un Corps de moment d'inertie I_Δ autour d'un axe Δ et de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est $T_{translation} = \frac{1}{2}I_\Delta\dot{\theta}^2$
- ✓ L'énergie potentielle d'une masse m dans un champ gravitationnelle constant g est : $U_{masse} = +mgh$. Lors d'une ascension d'une hauteur h
- ✓ $U_{masse} = -mgh$. Lors d'une descente d'une hauteur h
- ✓ L'énergie potentielle d'un ressort à boudin de raideur k lors d'une déformation d est $U_{ressort} = \frac{1}{2}kd^2$. Pour un condensateur $U = \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2$.
- ✓ L'énergie potentielle d'un ressort de torsion de raideur k lors d'une déformation θ est : $U_{ressort} = \left(\frac{1}{2}\right)k\theta^2$.

Remarque : L'énergie totale $E = T + U$ est conservée (constante) durant le mouvement :

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Cette équation de conservation donne l'équation du mouvement des systèmes conservés.

2.4.1 Exemple



$$T=\frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

$$U=\frac{1}{2}k\left(z+z_0\right)^2-mg\left(z+z_0\right)$$

$$U=\frac{1}{2}kz^2+kzz_0+\frac{1}{2}kz_0^2-mgz-mgz_0=\frac{1}{2}kz^2+kzz_0-mgz+\frac{1}{2}kz_0^2-mgz_0$$

$$U=\frac{1}{2}kz^2+\left(kz_0-mg\right)z+\frac{1}{2}kz_0^2-mgz_0$$

Grâce à la condition d'équilibre

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\left(\frac{1}{2}2kz+kz_0-mg=0\right)\right|_{z=0}$$

$$z=0: kz_0-mg=0$$

Alors U se simplifie $U=\frac{1}{2}kz^2+\frac{1}{2}kz_0^2-mgz_0 \Rightarrow U=\frac{1}{2}kz^2+Cte$

$$E=T+U=\frac{1}{2}m\dot{z}^2+\frac{1}{2}kz^2+Cte\,.$$

$$\frac{dE}{dt}=0=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2+\frac{1}{2}kz^2+Cte\right)$$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kz^2\right)=0$$

$$\frac{dE}{dt}=\left(\frac{1}{2}m\,2\dot{z}\,\ddot{z}\right)+\left(\frac{1}{2}k\,2z\,\dot{z}\right)=0$$

$$m\dot{z}\,\ddot{z}+kz\,\dot{z}=0 \Rightarrow m\,\ddot{z}+kz=0 \Rightarrow \ddot{z}+\frac{k}{m}z=0$$

Qui est bien l'équation du mouvement trouvée à l'aide du PFD.

2.5 Condition d'équilibre

La condition d'équilibre est $F=0$ si l'équilibre est en $x = x_0$, on écrit $\left.F\right|_{x=x_0}=0$. Pour une force dérivant d'un potentiel $\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right)$, la condition d'équilibre s'écrit :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0} > 0.$$

L'équilibre d'un système est stable si, une fois écarté de sa position d'équilibre, il y a retourne. Le système retourne à son équilibre si F est une force de rappel. Puisque $F = -Cx$ on aura une force de rappel si $C > 0$.

Comme $= \left(-\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$, la condition d'équilibre *stable* s'écrit :

$$\left.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\right|_{x=x_0} > 0.$$

Cette condition est aussi une condition d'oscillation.

L'équilibre d'un système est instable si le système ne regagne pas son équilibre lors d'un écartement, c.-à-d. si $C < 0$ la condition d'équilibre *instable* s'écrit donc :

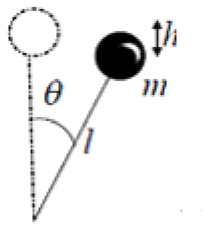
$$\left.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\right|_{x=x_0} < 0$$

Pour les rotations les équations précédentes deviennes :

$$\left.\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\right|_{\theta=\theta_0} > 0, \left.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)\right|_{\theta=\theta_0} > 0, \left.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)\right|_{\theta=\theta_0} < 0.$$

2.5.1 Exemple

Trouver les positions d'équilibre et leur nature pour le système ci-contre.



Solution

L'énergie potentielle lors d'un écartement θ de la verticale est :

$U = -mgh = -mgl\,(1-\cos\theta)$ Les positions d'équilibre sont données par

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-mgl\,(1-\cos\theta)\right) = -mgl\,\frac{\partial}{\partial \theta}(1-\cos\theta) = -mgl\,\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0$$

Les positions d'équilibres sont donc : $\theta=0$ *ou* $\theta=\pi$.

$U - mgl\left(1-\cos\theta\right)$

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$

$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-mgl\sin\theta\right) = -mgl\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta = -mgl\cos\theta$

$Alors\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right) = -mgl\cos\theta$

$\left.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)\right|_{\theta=0} = -mgl\cos 0 = -mgl < 0$ Alors $\theta = 0$ *est une position d'équilibre instable.*

$\left.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)\right|_{\theta=\pi} = -mgl\cos\pi = +mgl > 0$ Ce qui implique que $\theta = \pi$ *est une position d'équilibre stable.*

2.6 Equation de Lagrange (1788)

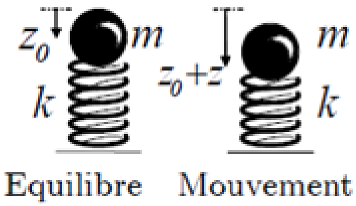
L'équation de Lagrange (appelée aussi équation d'Euler-Lagrange) est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = 0$$

$L=T-U$ est appelé le *Lagrangien*

L'équation de Lagrange donne aussi directement l'équation du mouvement. (Pour les translations $q=x, y, z$. Pour les rotations $q=\theta, \varphi$,... En électricité $q=q$)

2.6.1 Exemple



$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$

$U = \frac{1}{2}kz^2 + Cte$

Le lagrangien est : $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}kz^2 + Cte$

L'équation du mouvement est donc :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right) = 0$

$Avec\ L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}kz^2 + cte$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial \dot{z}}\left(\dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(2\dot{z}\right) = m\dot{z} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\right) = m\frac{d}{dt}\left(\dot{z}\right) = m\ddot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{2}kz^2\right) = -\frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right) = -\frac{1}{2}k\left(2z\right) = -kz$$

Alors

$m\ddot{z} + kz = 0$

$$\begin{cases} \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0 \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Qui est bien l’équation obtenue à l’aide du PFD puis à l’aide de l’équation de conservation.

La solution de l’équation différentielle s’écrit alors : $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

2.6.1.1 Ressort :

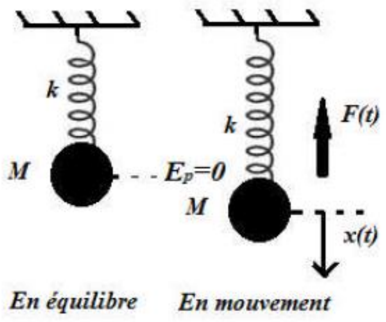


Figure 2.2 : Mouvement oscillatoire d’un ressort.

L’énergie cinétique s’écrit :

$$T = E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L’énergie potentielle pour des petites oscillations, s’écrit sous la forme :

$E_p = U = U_k + U_m$

$$dU_k = -\vec{F}_k d\vec{l} = -F_k dl \cos\left(\vec{F}_k\,(\uparrow), d\vec{l}\,(\downarrow)\right)$$
$$dU_k = -F_k dl \cos(180°)$$
$$\cos(180°) = -1$$
$$dU_k = +F_k dl = kxdx \;/\; F_k = kx\,, dl = dx$$
$$U_k = \int dU_k = \int_0^{x_0+x} kxdx = k\int_0^{x_0+x} xdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0+x} = \frac{k}{2}\left[x^2\right]_0^{x_0+x}$$
$$U_k = \frac{k}{2}\left[(x_0+x)^2 - 0\right]$$
$$U_k = \frac{k}{2}(x_0+x)^2 = \frac{k}{2}\left(x^2+2xx_0+x_0^2\right) = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2$$
$$U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + \frac{k}{2}x_0^2 + cte \;/\; \frac{k}{2}x_0^2 = cte$$

Alors : $U_k = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 + cte$

$$dU_m = -\vec{F}_m d\vec{l} = -F_m dl \cos\left(\vec{F}_m\,(\downarrow), d\vec{l}\,(\downarrow)\right)$$
$$dU_m = -F_m dl \cos(0°)$$
$$\cos(0°) = +1$$
$$dU_m = -F_m dl = -mgdl \;/\; F_m = mg$$
$$U_m = \int dU_m = \int_0^{x+x_0} -mgdl = -mg\int_0^{x+x_0} dl = k\left[l\right]_0^{x+x_0} = -mg\left[(x+x_0) - 0\right]$$
$$U_m = -mg\,(x+x_0) = -mgx - mgx_0$$
$$U = U_k + U_m = \frac{k}{2}x^2 + kxx_0 - mgx - mgx_0 + cte$$
$$U = \frac{k}{2}x^2 + (kx_0 - mg)x - mgx_0 + cte \,/ -mgx_0 = cte$$
$$U = \frac{k}{2}x^2 + (kx_0 - mg)x + cte$$

Equilibre

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{k}{2}\times 2x + (kx_0 - mg)$$
$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} : x = 0 \Rightarrow \frac{k}{2}\times 2(x=0) + (kx_0 - mg)$$
$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow (kx_0 - mg) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{kx_0}$$
$$U = \frac{k}{2}x^2 + cte$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

L'équation de mouvement est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0$$

$$Avec\ L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\dot{x}^2\right) = \frac{1}{2}m\,(2\dot{x}) = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\frac{d}{dt}(\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) = -\frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}k\,(2x) = -kx$$

Alors $m\ddot{x} + kx = 0$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

2.6.1.2 Pendule simple :

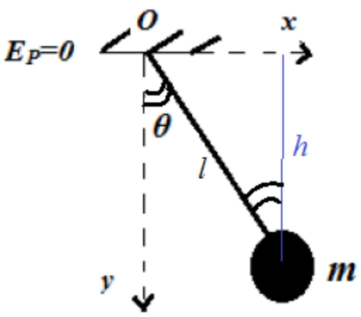


Figure 2.3 : Mouvement Oscillatoire d'un pendule simple

$$\vec{om} = \begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$|v|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(l\dot{\theta}\right)^2$$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T = E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\dot{x} = l\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Pour l'énergie potentielle on a :

$$dU_m = -\vec{F}_m d\vec{l} = -F_m dl \cos\left(\vec{F}_m\left(\downarrow\right), d\vec{l}\left(\downarrow\right)\right)$$

$$dU_m = -F_m dl \cos\left(0°\right)$$

$$\cos\left(0°\right) = +1$$

$$dU_m = -F_m dl = -mgdl \ / \ F_m = mg$$

$$U_m = \int dU_m = \int_0^h -mgdl = -mg\int_0^h dl = k\left[l\right]_0^h = -mg\left[h-0\right]$$

$$U_m = -mgh$$

$$\cos\theta = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l\cos\theta \Rightarrow U_m = -mgl\cos\theta$$

Alors

$$U = E_p = -mgl\cos\theta + cte$$

Alors, le Lagrangien du système s'écrit :

$$L = E_c - E_p = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta + cte$$

L'équation de mouvement pour des petites oscillations, est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$Avec \ L = E_c - E_p = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta + cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}ml^2\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\left(\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}ml^2\left(2\dot{\theta}\right) = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) = ml^2\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(mgl\cos\theta\right) = mgl\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\right) = -mgl\sin\theta$$

Alors $ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$

A faible amplitude $\sin\theta \approx \theta$

Alors : $ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \end{cases}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

2.6.1.3 Système de torsion :

Un corps rigide de moment d'inertie J_0 oscille autour d'un axe avec une constante de torsion k_t.

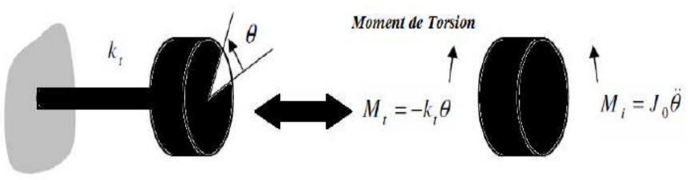


Figure 2.4 : Mouvement oscillatoire de torsion

L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = T = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$$

Pour l'énergie potentielle on a :

$$E_p = U = \frac{1}{2}k_t\theta^2$$

Le Lagrangien du système s'écrit alors :

$$L = E_c - E_p = T - U = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_t\theta^2 + cte$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \quad Avec : L = E_c - E_p = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_t\theta^2 + cte$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_0\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_0\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k_t\theta$$

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \dfrac{k_t}{J_0}\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k_t}{J_0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$