TP #1: Synthèses des filtres numérique RII

1. Objectifs du TP

- Calcul de la transformée en Z et la transformée en Z inverse pour des systèmes discrets (numériques).
- Conception des filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) utilisant les célèbres gabarits de Butterworth et Chebushev.
- Calcul des réponses fréquentielles des filtres RII
- Observation des résultats de conception trouvés

2. Rappel théorique sur les filtres RII

La transformation en z (TZ)est un outil mathématique de l'automatique et du traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est utilisée entre autres pour le calcul de filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie (RII) et en automatique pour modéliser des systèmes dynamiques de manière discrète. La TZ d'un signal discret $x(n)$, n=0, …, $+\infty$ est une approximation de la transformée de Laplace donnée par

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \tag{1}$$

La transformée en Z inverse (TZI) peut être calculée par le biais de quatre méthodes; la méthode des tables de transformation, la méthode de fractions rationnelle, la méthode en série de puissances et la méthode des résidus. Pour la méthode des résidus le calcul de la TZI est obtenu par :

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(Z) Z^{n-1} dZ \\ &= \sum_{Z_k = pôles\, de\, Z^{n-1} X(Z)} \mathrm{Re}\, s \left\{ Z^{n-1} X(Z) \right\}_{Z=Z_k} \end{aligned} \tag{2}$$

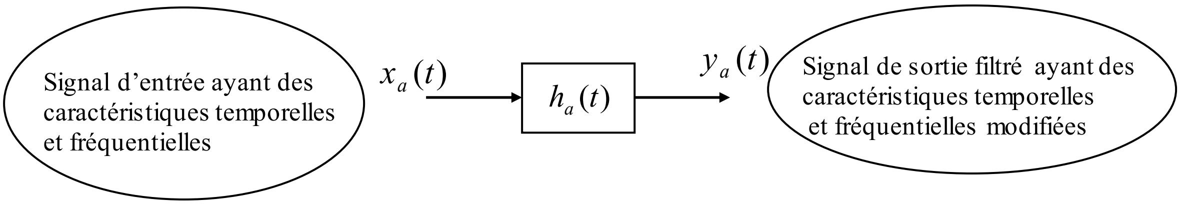
Le résidu à un pôle $z=a$ d'ordre q de la fonction $Z^{n-1}X(Z)$ est donnée par :

$$\mathrm{Re}\, s_a^q = \lim_{z \to a} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left[X(Z) Z^{n-1} (z-a)^q \right] \tag{3}$$

Un filtre numérique est un Système Linéaire Discret (SLD) invariant avec le temps (LTD) et modifiant la représentation temporelle et fréquentielle des signaux. On considère la fonction d'un système analogique

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} d_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} c_k s^k} = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} \tag{4}$$

Où $x_a(t)$ est le signal d'entrée et $X_a(s)$ sa T.L. $y_a(t)$ est le signal de sortie et $Y_a(s)$ sa T.L



Donc, $h_a(t)$ est la réponse impulsionnelle du système (filtre) analogique). Alternativement, un système analogique ayant $H_a(s)$ comme fonction de transfert peut être décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \frac{d^k y_a(t)}{d^k t} = \sum_{k=0}^{M} d_k \frac{d^k x_a(t)}{d^k t} \tag{5}$$

La fonction rationnelle du système correspondante pour un filtre numérique a la forme

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{6}$$

L'entrée et la sortie sont reliées par le produit de convolution suivant

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \tag{7}$$

Ou bien

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{8}$$

Suivant la forme de la fonction de transfert du système RII, on peut envisager quatre classes de sa structure; la forme directe, la forme cascadée, la forme parallèle et la forme transposée. A titre d'exemple, la structure directe est considérée si la fonction rationnelle du système RII s'écrit sous la forme ci-dessous

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{9}$$

L'entrée et la sortie du système sont exprimées par

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{10}$$

Cette équation différentielle peut être modélisée par la structure de la Fig. 1.

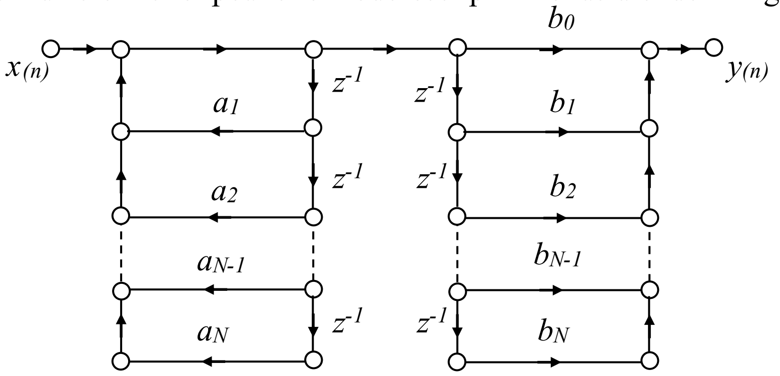


Fig. 1 *Structure du filtre RII donnée par (9)*

3. Méthodes de conception des filtres RII

La réalisation d'un filtre numérique exige trois étapes essentielles :

- Les spécifications des propriétés désirées du système
- L'approximation de ces spécifications en utilisant un système discret causal.
- Réalisation de ce système en utilisant une arithmétique finie.

Le problème est donc de déterminer un ensemble approprié de spécifications sur le filtre numérique. En transformant un système analogique en un système numérique, on doit obtenir *H(z)* ou *h(n)* du filtre numérique. Alors, on doit préserver la réponse fréquentielle. Dans cette transformation, on doit conserver les propriétés essentielles de la réponse fréquentielle. Aussi, la stabilité du filtre analogique fait garantir la stabilité du filtre numérique.

Il existe trois méthodes de conception des filtres numériques RII ; la méthode de l'invariance impulsionnelle, la méthode des différences finies et la méthode de la transformation bilinéaire.

- La méthode de l'invariance impulsionnelle impose que $H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{s_k T}z^{-1}}$ où s_k sont obtenus à partir de la FT du filtre analogique $H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k}$.
- La méthode des différences finies impose que $H(z)=H_a(s)\big|_{\frac{1-z^{-1}}{T}}$
- La méthode de la transformation bilinéaire impose que $H(z)=H_a(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

T est le temps d'échantillonnage

4. Manipulations

Dans cette section, on va utiliser les routines Matlab pour les calculs de la TZ, TZI et les réponses fréquentielles des filtres numériques RII. Pour cela, on considère plusieurs exemples dans les manips suivantes:

Manip # 1 : (Calcul de TZ, TZI et pôles/zéros de X(z))

- Calculer la TZ des systèmes suivants utilisant les instructions Matlab « syms » et « ztrans ».

$$x(n) = n,\ x(n) = n+2,\ x(n) = n-3,\ x(n) = n^2,\ x(n) = \frac{1}{4^n},\ x(n) = 2(2)^n + 4(1/2)^n$$

```
%TZ:
syms z n;
ztrans(n),
```

- Calculer la TZI des systèmes suivants utilisant les instructions Matlab « syms » et « iztrans ».

$$X(z) = \frac{2z}{2z-1},\ X(z) = \frac{(1-0.13)z}{(z-1)(z-0.13)},\ X(z) = \frac{6-9z^{-1}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}}$$

```
%TZI:
syms z n;
iztrans(2*z/(2*z-1)),
```

- Tracer le diagramme pôles/zéros de la FT en z suivante utilisant la commande Matlab «zplane» : $X(z) = \dfrac{1-1.618^{-1}+z^{-2}}{1-1.5161\,z^{-1}+0.87\,z^{-2}}$

```
%Pôles et zéros:
b= [1 -1.618 1] ;
a=[1 -1.5161 0.878] ;
roots(a),
roots(b),
zplane(b,a),
```

Manip # 2: (Conception d'un filtre numérique basée sur le gabarit de Butterworth)

Dans cette manip, on veut concevoir un filtre passe-bas numérique utilisant le gabarit du filtre analogique de Butterworth donnée par :

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}} \qquad (11)$$

Les spécifications souhaitées sont :

- Une atténuation dans la bande passante de 1dB à $\Omega = \Omega_p = 0.2\pi$
- Une atténuation dans la bande d'arrêt de 15dB à $\Omega = \Omega_s = 0.3\pi$

Donc, on doit chercher les deux inconnus du filtre de (11) ; l'ordre du filtre N et la fréquence de coupure Ω_c. Alors, on peut écrire

$$\begin{cases} 20\log_{10}\left(H_a(j\Omega)\right) \geq -1 \\ 20\log_{10}\left(H_a(j\Omega)\right) \leq -15 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1+\left(\dfrac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1} \\ 1+\left(\dfrac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{1.5} \end{cases}$$

La solution de ces équations donne immédiatement : N=6 et $\Omega_c = 0.7032 = 0.2238\pi$.

- Selon ces valeurs, construire un filtre RII utilisant les commandes Matlab suivantes:

```
% Filtre de Butterworth
clear all;clc;
N=6;
wc=0.7032;
[b a]=butter(N,wc/pi);
figure(1);
freqz(b,a)
axis([0 1 -30 0]);

%Filtrage numérique
dataIn=randn(1000,1);
dataOut=filter(b,a,dataIn);
figure(2);
plot(1:1000,dataIn, 1:1000,dataOut,'r');
legend('DataIn','DataOut');grid;
```

- Vérifier les spécifications désirées du filtre numérique et comparer ces résultats trouvés avec les spécifications imposées du filtre analogique de Butterworth ci-dessus.

Manip 3: (Conception d'un filtre numérique basée sur le gabarit de Chebyshev)

Dans cette manip, on veut concevoir un filtre passe-bas numérique utilisant le gabarit du filtre analogique de Chebyshev donnée par :

$$\left|H_a(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_c)} \tag{12}$$

Après un certain calculs (voir le cours du Traitement avancé du signal), on obtient :

N=6, ε=0.50885 et $\omega_c = 2\tan(0.2\pi/2) = 0.6498 = 0.2069\pi$.

- Selon ces valeurs trouvées, construire un filtre RII utilisant les commandes Matlab suivantes:

```
%Filtre de Chebyshev
Clear all;clc ;
N=6;
wc=0.6498;
[b2,a2] = cheby1(4,0.50885,wc/pi);
figure(3);
freqz(b2,a2);
axis([0 1 -30 0])
```

```
%Filtrage numérique
dataIn=randn(1000,1);
dataOut=filter(b2,a2,dataIn);
figure(4);
plot(1:1000,dataIn, 1:1000,dataOut,'r');
legend('DataIn','DataOut');grid;
```

- Vérifier les spécifications désirées du filtre numérique et comparer ces résultats trouvés avec les spécifications imposées du filtre analogique de Chebyshev ci-dessus.

- Utiliser le code Matlab suivant pour tracer les deux gains en (dB) obtenus par les deux filtres ci-dessus :

```
%Comparaison entre les deux filtres
freqz(b1,a1);
hold on;
freqz(b2,a2);axis([0 1 -30 0])
legend('Butterworth','Chebyshev');*
```

- Constater les deux allures et donner des conclusions sur la réalisation de ce TP.