

Solution de la série de TD N°2

EX1.

Sur un chemin réversible, la variation d'entropie d'un gaz parait a été donné par :

$$\Delta S = nC_v \ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = nC_v \ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{T_e P_0}{T_0 P_e}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta S = n(C_v + R) \ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{P_0}{P_e}\right) = nC_p \ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{P_0}{P_e}\right) = 50,1 J.K^{-1}$$

Il faut utiliser le bilan entropique sous sa forme intégrée : $\Delta S = S^r + S^p$. Nous connaissons déjà ΔS , calculons donc S^r en prenant bien en compte la transformation réelle, donc irréversible. Par définition :

$$\delta S^r = \frac{\delta Q}{T_e} = \frac{dU - \delta W}{T_e} = \frac{nC_v dT - (-P_e dV)}{T_e} = \frac{nC_v dT + P_e dV}{T_e}$$

Comme C_v , P_e et T_e sont constantes, l'intégration conduit à :

$$S^r = \frac{nC_v (T_e - T_0)}{T_e} + \frac{P_e (V_1 - V_0)}{T_e} = \frac{nC_v (T_e - T_0)}{T_e} + \frac{P_e}{T_e} nR \left(\frac{T_e}{P_e} - \frac{T_0}{P_0}\right) = -8,31 J.K^{-1}$$

$$\Rightarrow S^p = \Delta S - S^r = 58,41 J.K^{-1}$$

EX2.

$$1. \text{ On a: } n = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{10^5 \times 5 \times 10^{-3}}{8,31 \times 293} = 0,2 \text{ mol}$$

$$C_v = \frac{5R}{2} = 20,78 J.K^{-1}.mol^{-1}$$

$$\text{Et } c_{v, mass} = \frac{C_v}{M} = \frac{20,78}{29 \times 10^{-3}} = 717,5 J.K^{-1}.kg^{-1}$$

2. Bilan énergétique: comme l'évolution est adiabatique réversible, on a: $Q = 0$ et $P.V^\gamma = Cte$. Par conséquent:

$$\Delta U = W = -\int P dV = -P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = P_1 V_1^\gamma \left(\frac{V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}}{\gamma-1} \right) = \left(\frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma-1} \right)$$

Or l'équilibre mécanique étant-réalisé, on a:

$$(P_2 - P_1)S = mg \text{ d'où: } \frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{mg}{SP_1} = 1 + \frac{10 \times 9,81}{10^{-3} \times 10^5} = 1,981$$

On en déduit: $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0,614$ et $\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = 1,22$

b) Le bilan entropique est simple: $\Delta S = S^r + S^P$ avec $S^r = 0$ et $S^P = 0$

Puisqu'il n'y a pas d'échange thermique et que la compression est réversible.

3. Bilan énergétique: comme l'évolution est adiabatique, on a $Q = 0$. Par conséquent:

$$\Delta U = nC_V(T_3 - T_1) = W = -\int_{V_1}^{V_3} P_{ext} dV = -P_3 \int_{V_1}^{V_3} dV = P_3(V_1 - V_3)$$

Avec: $(P_3 - P_1)S = mg$

On en déduit: $\frac{P_3}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} = 1,981$

Et $nC_V T_1 \left(\frac{T_3}{T_1} - 1\right) = -P_1 V_1 \frac{P_3}{P_1} \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)$ soit $\left(\frac{T_3}{T_1} - 1\right) = -(\gamma - 1) \cdot \frac{P_3}{P_1} \cdot \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right)$

Puisque $C_V = R/(\gamma - 1)$ et $\frac{T_3}{T_1} = \frac{P_3}{P_1} \times \frac{V_3}{V_1}$, il vient, en posant $x = P_3/P_1$

$$x \frac{V_3}{V_1} - 1 = -x(\gamma - 1) \left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right) \Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \frac{1 + (\gamma - 1)x}{\gamma x} = 0,646 \text{ et } \frac{T_3}{T_1} = \frac{1 + (\gamma - 1)x}{\gamma} = 1,28$$

b) Bilan entropique: $\Delta S = S^r + S^P = S^P$

On calcule ΔS le long d'un chemin réversible entre les mêmes états extrêmes:

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{nC_V dT + PdV}{T} = nR \left[\frac{5}{2} \ln \left(\frac{T_3}{T_1} + \ln \left(\frac{V_3}{V_1} \right) \right) \right] = 0,3 J/K$$

EX3.

1. A l'équilibre mécanique final, on a l'égalité:

$$P_2 = P_1 + \frac{mg}{S} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{mg}{SP_1} = 1 + \frac{10 \times 9,81}{10 \times 10^{-4} \times 10^5} = 1,98$$

2. Comme la température ne varie pas, l'énergie interne reste inchangée, le bilan énergétique s'écrit:

$$\Delta U = Q + W = 0 \text{ avec } W = -\int_{V_1}^{V_2} P_{ext} dV = P_2(V_1 - V_2)$$

En fonction de x, on trouve, puisque $P_1 V_1 = P_2 V_2$

$$W = -Q = RT_1 \frac{P_2}{P_1} \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right) = RT_1 x \left(1 - \frac{1}{x} \right) = RT_1 (x - 1)$$

donc $W = -Q = 8,31 \times 300 \times (1,98 - 1) = 2,44 \text{ kJ}$

Le bilan entropique s'écrit:

$$\Delta S = S^r + S^p \text{ avec } S^r = \frac{Q}{T_1} = -\frac{W}{T_1} = -R(x - 1)$$

Et, ΔS que l'on calcule le long d'un chemin réversible à température constante:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{C_V dT + PdV}{T} = R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -R \ln x$$

On en déduit :

$$S^p = R[-\ln x + (x - 1)]$$

Application numérique :

$$S^r = -8,14 \text{ J / K} ; \Delta S = -5,68 \text{ J / K} ; S^p = 2,46 \text{ J / K}$$

EX4.

La température finale de l'aluminium est celle de l'air ambiant ($T_f = T_2 = 20 \text{ °C}$) ainsi

$$\Delta S_A = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{m.C.dT}{T} \Leftrightarrow \Delta S_A = m.C \times \ln \left(\frac{T_f}{T_1} \right) = 100.10^{-3} \times 896 \times \ln \left(\frac{20 + 273}{10 + 273} \right)$$

$$\Delta S_A = 3,11 \text{ J / K}$$

$$\Delta S_B = \frac{Q_B}{T_2} \text{ (car B est un thermostat, or } Q_B = -Q_A \text{ (puisque l'univers est un système$$

isolé).

$$\text{Donc } \Delta S_B = -\frac{m.C.(T_f - T_1)}{T_2} = -\frac{100.10^{-3} \times 896 \times (293 - 283)}{293} = -3,06 \text{ J / K}$$

$\Delta S_{A+B} = \Delta S_A + \Delta S_B = 3,11 - 3,06 = 53,4 J / K$. On observe toujours une augmentation d'entropie pour un système isolé.

$\Delta S_{A+B} \neq 0$ pour un système isolé \Rightarrow la transformation est irréversible .