# 1 Condition suffisante de diagonalisabilité

**Proposition 1**
*Soit $A$ une matrice carrée, d'ordre $n$.*

*Si le polynôme caractéristique de $A$ a $n$ racines distinctes deux a deux dans $K$, alors $A$ est diagonalisable.*

**Proof.**
On a $P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$.
où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les $n$ racines distinctes du polynôme $P(\lambda)$.
Soient $v_1, v_2, \dots, v_n$ les vecteurs propres associés à ces racines.

$$\text{donc } \begin{cases} f(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 \\ \quad\vdots \\ f(v_n) = \lambda_n v_n \end{cases} \quad \text{i.e. } f(v_i) = \lambda_i v_i \quad i = 1, \dots, n$$

Il suffit de montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de $E$. Pour cela, montrons par récurrence sur $k$ que $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ est une famille libre de $E$.

C'est vrai pour $k = 1$.

On suppose que la propriété est vraie pour $k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ et montrons que $(v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ est une famille libre de $E$ : si on à l'écriture $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \ + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \ \dots\dots(1)$

On a $f(\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \ + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = f\,(0) = 0$
$\Rightarrow \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_k f(v_k) \ + \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) = 0$
$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k \ + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad \dots\dots(2)$

De $(2) - \lambda_{k+1}(1)$ :
$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_{k+1})\alpha_1 v_1 + (\lambda_2 - \lambda_{k+1})\alpha_2 v_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})\alpha_k v_k = 0$

Par l'hypothèse de récurence
$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\alpha_1 = (\lambda_2 - \lambda_{k+1})\alpha_2 = \dots = (\lambda_k - \lambda_{k+1})\alpha_k = 0$

Par suite $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$ ( car les $\lambda_i$ son deux à deux distinctes), ce qui réporté dans (1), donc $\alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$.

D'où $(v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ est libre, par conséquent $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de $E$, et dans cette base la matrice $D$ de $A$ est diagonale, c'est-à-dire la matrice $A$ est diagonalisable. ■

**Proposition 2** ***Condition nécessaires et suffisante de diagonalisabilité***

*Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de $E$ et soit $\lambda_1$ une valeur propre de $f$ dans $K$.*

*Si* $\dim E(\lambda_1) = r$, *alors* $\lambda_1$ *est une racine d'ordre* $m \geqslant r$ *de* $P(\lambda)$ *i.e.* $\dim E(\lambda_1) \leqslant m$.

**Proof.**

Choisissons une base $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ de $E(\lambda_1)$ et complétons la en une base

$\mathcal{B}= (e_1, e_2, \ldots, e_r, e_{r+1}, ..., e_n)$ . La matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & A_1 \\ & & \lambda_1 & \\ \hline & 0 & & A_2 \end{array}\right)$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \left|\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 - \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & A_1 \\ 0 & & \lambda_1 - \lambda & \\ \hline & 0 & & A_2 - \lambda I_{n-r} \end{array}\right|$$

$$= (\lambda_1 - \lambda)^r \det(A_2 - \lambda I_{n-r}).$$

Il est possible que $\lambda_1$ soit aussi racine de $\det(A_2 - \lambda I_{n-r})$, d'où l'ordre $m \geqslant r = \dim E(\lambda_1)$. ■

**Corollary 3**

1. *Si* $P(\lambda)$ *n'est pas scindé dons* $K$, *alors* $f$ *n'est pas diagonalisable.*
2. *S'il existe une valeur propre* $\lambda_i$ *racine d'ordre* $m_i$ *de* $P(\lambda)$ *telle que la dimension de l'espace propre associé* $\dim E(\lambda_i) < m_i$

   *Alors* $f$ *n'est pas diagonalisable.*

**Proof.**

Le raisonement est le même dans les deux cas.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les racines de $P(\lambda)$ dans $K$ et $m_1, m_2, \ldots, m_k$ leurs ordres de multiplicité réspectifs.

i.e., $P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$

La proposition précédente montre que $\dim E(\lambda_i) \leqslant m_i$ , pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{k} \dim E(\lambda_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} m_i \leqslant n$$

Dans les deux cas, l'une des inégalites est stricte. Par conséquent, on ne peut trouver de base de $E$ formée de vecteurs propres puisque les sous-espace propres de $E$ ne peuvent enjendre $E$. ■

**Remark 4**

*Le corollaire précédent donne deux conditions nécessaires de diagonalisation.*

*La proposition suivante montre que ce sont des conditions suffisantes pour pouvoir diagonaliser.*

**Proposition 5**

*Soient $f : E \to E$ une endomorphisme. Une coditions nécessaire et suffisante pour que $f$ soit diagonalisable est que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

1. *Le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de $f$ est scindé dans $K[\lambda]$*

2. *Si on note $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_k$ les racines distinctes de $P(\lambda)$ et $m_1, m_2, \ldots, m_k$ leurs ordres de multiplicité réspectifs , alors*

$$\dim E(\lambda_i) = m_i \text{ , pour } 1 \leqslant i \leqslant k$$

**Proof.**

Pour montrer que ces conditions sont suffisantes, on va montrer par récurrence que les sous-espaces propres $E(\lambda_i), 1 \leqslant i \leqslant j$ sont en somme directe pour $1 \leqslant j \leqslant k$.

$$E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_k)$$

C'est vrai pour $j = 1$, supposons que la propriété soit vraie pour un entier $j$, $1 \leqslant j \leqslant k$ et montrons qu'elle est vraie pour l'entier $j + 1$.

$$\text{Notons } S_j = \bigoplus_{i=1}^{j} E(\lambda_i) = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_j)$$

Il suffit de montrer que $S_j \cap E(\lambda_{j+1}) = \{0\}$.

Soit donc $v \in S_j \cap E(\lambda_{j+1}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} v & = & v_1 + v_2 \quad + \ldots + v_j \;\ldots\ldots (1) \\ & \text{et} & \\ f(v) & = & \lambda_{j+1} v \end{array} \right.$

avec $v_i \in E(\lambda_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant j$

De (1) $\Rightarrow f(v) = f(v_1) + f(v_2) + \ldots + f(v_j)$

$$\lambda_{j+1} v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_j v_j \;\ldots\ldots (2)$$

De $(2) - \lambda_{j+1}\,(1) \Rightarrow 0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{j+1})v_1}_{\in E(\lambda_1)} + \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_{j+1})v_2}_{\in E(\lambda_2)} + \ldots \underbrace{(\lambda_j - \lambda_{j+1})v_j}_{\in E(\lambda_j)}$

L'hypothèse de recurrence implique que les termes de la somme du second membre sont tous nuls.

On en déduit que $v_1, v_2, \ldots, v_j$ sont nuls, d'où $v = 0$

Par conséquent, les $E(\lambda_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, sont en somme directe dans $E$. Comme $\sum_{i=1}^{k} \dim E(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} m_i = n$. on voit que $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E(\lambda_i)$, donc E est somme directe de ses espaces propres et $f$ est diagonalisable.

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{matrix}} \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \blacksquare$$

**Example 6**

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   $\boxed{P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2}$ *est scindé*

   $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \;;\; m_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \;;\; m_2 = 2 \end{array} \right.$

   $E(\lambda_1) = E(0) = < v_1 >$ *où* $v_1 = (1,1,1)$ $\boxed{\dim E(\lambda_1) = 1 = m_1}$

   $E(\lambda_2) = E(1) = < v_2, v_3 >$ *où* $v_2 = (1,3,2)$ , $v_3 = (1,2,1)$ $\boxed{\dim E(\lambda_2) = 2 = m_2}$.

*Ce qui preuve que $A$ est diagonalisable.*

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) \text{ où } \left\{ \begin{array}{lllll} v_1 & = & e_1 & +e_2 & +e_3 \\ v_2 & = & e_1 & +3e_2 & +2e_3 \\ v_3 & = & e_1 & +2e_2 & +e_3 \end{array} \right.$$

$$P = (v_1 v_2 v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$$\boxed{P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 5-\lambda & -7 \\ 1 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2}$$

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \ ; m_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \ ; m_2 = 2 \end{array} \right.$$

$E(\lambda_1) = E(0) = < v_1 >$ *où* $v_1 = (1,1,1)$ $\boxed{\dim E(\lambda_1) = 1 = m_1}$

$E(\lambda_2) = E(1) = < v_2 >$ *où* $v_2 = (1,3,2)$ , *et* $\boxed{\dim E(\lambda_2) - 1 \neq m_2}$

*Ceci preuve que $A$ n'est pas diagonalisable .*