Chapitre 1

Etude de l'échantillonnage d'un signal

Sommaire du Chapitre1 :

1.1 Introduction

Grâce aux développements de l'électronique et de l'informatique la plupart des lois de commande sont implémentées sur des micro ordinateurs ou processeurs numériques**.**

L'implémentation d'algorithmes de commande sur ordinateur compare à une réalisation analogique offre de nombreux atouts : cout faible, précision élevée, insensibilité aux bruits, facilité d'implémentation et souplesse par rapport aux modifications.

Donc l'objectif de ce cours est d'étudier l'asservissement numérique c.à.d. commandé piloté des processus physiques par l'utilisation des calculateurs ou processeurs numérique ou les signaux utilisés se présentent sous forme de suite de valeurs numériques d'où viennent l'opération d'échantillonnage et la notion des systèmes échantillonnés.

1.2 Principe de l'asservissement numérique

Afin de mettre en œuvre les asservissements en milieu industriel, l'usage d'outils informatiques comme organes de contrôle des processus asservis est essentiel. C'est le cas par exemples des ordinateurs ou des microcontrôleurs qui peuvent, entre autre, assumer des fonctions de calculateurs numériques. Mais de tels instruments sont à base de composants électroniques (microprocesseurs, mémoires, ...) et fonctionnent avec des signaux binaires, porteurs d'informations numériques, on parle alors de signaux numériques.

Pour résoudre le problème de contrôle des processus continus assisté à des ordinateurs ou des microcontrôleurs on doit changer la structure de l'asservissement continue.

1.2.1 Structure d'un asservissement numérique

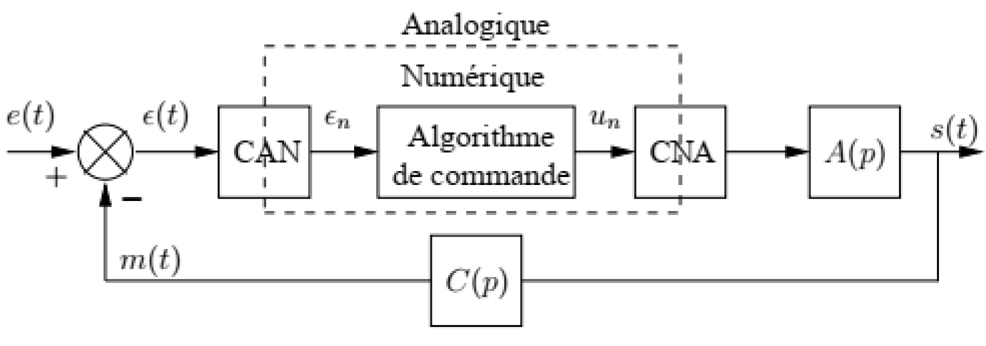


Figure. 1.1 Structure de la réalisation d'un asservissement numérique

Les problèmes qu'il s'agit de résoudre pour le contrôle des processus continus concernent les points suivants.

(a) l'échantillonnage d'un signal continu : cette opération consiste à relever les informations prises par un signal continu à intervalle de temps régulier, appelé période d'échantillonnage. On parle alors de signal échantillonné. Cela signifie que le calculateur ne tiendra compte que des échantillons, c'est-à-dire des valeurs prises par le signal aux instants d'échantillonnage.

(b) la conversion d'un signal analogique en un signal numérique (CAN) : il s'agit de convertir la valeur prise par un signal analogique à l'instant d'échantillonnage en une valeur numérique afin qu'elle soit traitée par le calculateur.

(c) la conversion d'un signal numérique en un signal analogique (CNA) : cette opération consiste à transformer le signal numérique issu du calculateur à l'instant d'échantillonnage en signal analogique de commande existant sur toute la période d'échantillonnage.

(d) correcteur numérique ou encore loi de commande numérique. Elle a pour objectif de déterminer la valeur du signal numérique de commande à un instant d'échantillonnage, à partir des valeurs antérieures des signaux numériques de commande, de mesure et de référence.

Pour transformer un signal continu en une suite de nombres compatibles avec un système de traitement numérique, on a recours à deux opérations successives : l'échantillonnage qui consiste à prélever, à intervalles de temps réguliers, des valeurs discrètes du signal, puis, la conversion analogique numérique qui transforme ces échantillons en nombres, généralement codés sous forme binaire (Figure1.2).

L'échantillonnage réalise donc une discrétisation dans le temps, tandis que la conversion analogique-numérique réalise une discrétisation en amplitude.

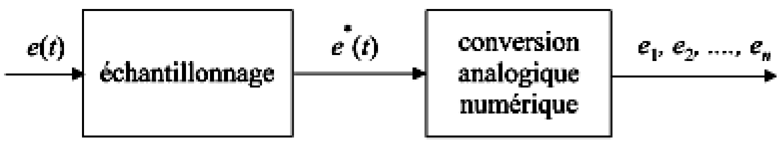


Figure.1.2 Échantillonnage et conversion analogique numérique d'un signal.

1.2.2 Principes fondamentaux de l'échantillonnage des signaux

L'échantillonnage d'un signal temporel *s(t)* consiste à transformer celui-ci en une suite discrète *s(nTe)* de valeurs prises à des instants *nTe*. *Te* est appelée période d'échantillonnage. Les instants *nTe* sont appelés les instants d'échantillonnages. Pratiquement, échantillonner un signal revient à le multiplier par une fonction d'échantillonnage *p(t)*, nulle partout, sauf au voisinage des instants *nTe*. Cette fonction, qui porte souvent le nom de peigne de Dirac, est représentée sur la Figure 1.3.

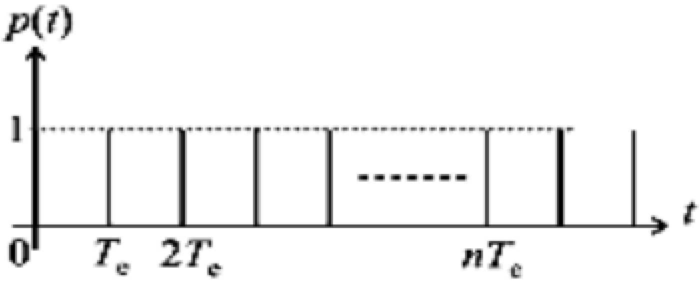


Figure.1.3 Fonction d'échantillonnage

L'échantillonnage d'un signal temporel quelconque *s(t)* consiste donc à transformer celui-ci en une suite discrète s_k=*s(k)* de valeurs prises à des instants kT_e. Ici k et n sont des entiers naturels (k = 0,1, 2, …n) et T_e est appelée période d'échantillonnage : avec $s^*(t) = s(t)p(t)$

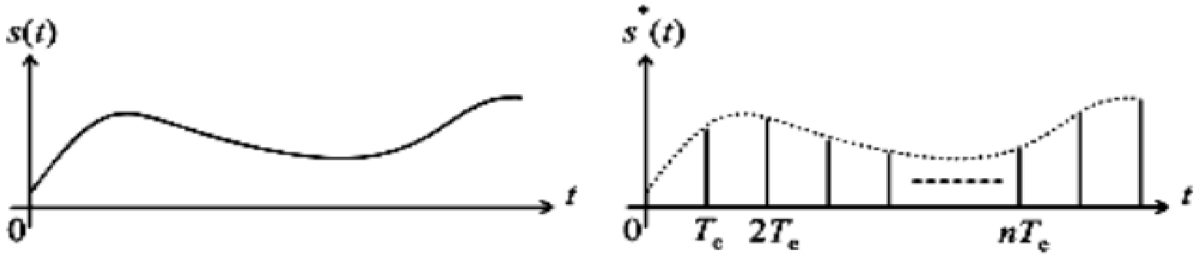


Figure.1.4 Echantillonnage d'un signal quelconque.

1.2.3 Théorème de Shannon

Un des objectifs essentiels de l'échantillonnage consiste à ne pas perdre d'information lors de la discrétisation dans le temps, ce qui peut se traduire par le fait qu'il doit être possible, à partir du spectre du signal échantillonné, de reconstituer simplement celui du signal original. Un simple coup d'œil au spectre |*S*(f)*| nous montre que cela est possible s'il n'existe aucun recouvrement entre les différents segments de spectre (Figure.1.5).

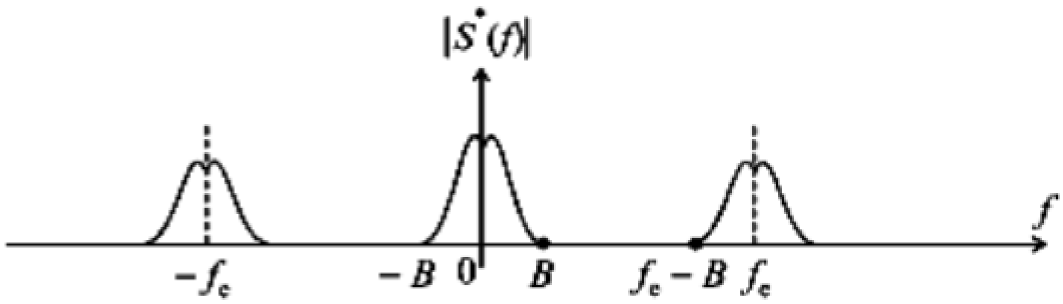


Figure.1.5 Spectre d'un signal échantillonné.

Si $2B$ est la largeur spectrale du signal $s(t)$, autrement dit sa limite fréquentielle supérieure, le premier segment décalé, dans le spectre de $s^*(t)$, qui se trouve centré sur la fréquence *fe*, s'étend de *fe* - *B* *à fe* + *B*. La condition de non recouvrement est donc, de toute évidence :

$$B < f_e - B$$

Soit $f_e > 2B$

Cette inégalité constitue le théorème de Shannon qui peut également s'énoncer de la manière suivante :

Pour préserver, lors de son échantillonnage, l'information contenue dans un signal, la fréquence d'échantillonnage *fe* doit être supérieure au double de la largeur spectrale du signal.

1.3 Transformée en z des signaux échantillonnés

La transformation en z est un outil mathématique de l'automatique et du traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformation de Laplace.

Elle est utilisée entre autres pour le calcul de filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie et en automatique pour modéliser des systèmes dynamiques de manière discrète.

Définition

La transformation en z est une application qui transforme une suite s (définis sur les entiers) en une fonction S d'une variable complexe nommée *z*, telle que :

$$S(z) = \mathcal{Z}\{s(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) z^{-k}$$

Dans le cas échantillonné, cette transformée découle de la transformée de Laplace du signal échantillonné $s_e(t)$.

Soit $s(k)$ un signal échantillonné discret d'un signal continu

Pour tout $n \in N, s(k) = s_e(k)$ la transformée de Laplace du signal continu s est :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt}dt$$

Il s'agit d'approximer l'aire définie par l'intégrale $S(p)$ par une série càd remplacé l'intégrale par une sommation.

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s_e(t)e^{-pt}dt \cong \sum_{k=0}^{\infty} s(k)e^{-pk} \; avec \; T = 1$$

On pose $z = e^{pk}$

Donc la transformé en z donne l'équation suivante :

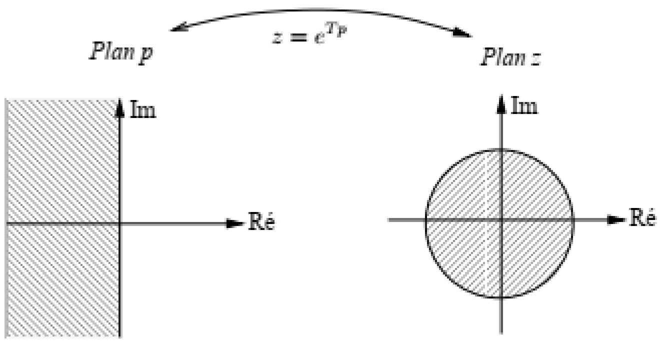
$$S(z) = \mathcal{Z}\{s(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} s(k)z^{-k}$$

La transformée en z est donc une opération qui associe, à un signal échantillonné (ou à un signal numérique), une série convergente en la variable z. Cette série est clairement une série entière en la variable $\frac{1}{z}$.

La transformée en z n'existe que si la somme qui la définit converge. Pour tous les signaux qui nous intéressent, le domaine de convergence est de la forme |z| > r, avec r > 0 (dépendant du signal considéré). Ceci est une simple conséquence du fait que le domaine de convergence d'une série entière est un disque centré à l'origine, qui est transformé en son complément par l'application $\mathcal{Z} \longrightarrow \frac{1}{z}$.
Il convient d'ores et déjà de prendre en compte la propriété suivante relative à la transformation géométrique définie par

Propriété géométrique

Si $z = e^{pT}$, avec p complexe, alors la partie réelle de p est strictement négative si et seulement si le module de z est strictement inférieur à un. Cela signifie géométriquement que $z = e^{pT}$, envoie le demi-plan {p : Re(p) < 0} à l'intérieur du cercle unité {z : |z| < 1}.



I.3.3 Propriétés de la transformée en z

1. Linéarité

Pour tous signaux temporels $s_1(t)$ et $s_2(t)$ et nombres réels α et β, on a

$$Z[\alpha s_1(kT_e) + \beta s_2(kT_e)] = \alpha Z[s_1(kT_e] + \beta Z[s_2(kT_e] = \alpha S_1(Z) + \beta S_2(Z)$$

2. Multiplication par a^k

Pour tout signal temporel $s(t)$ et a>0 on a

$$Z[a^k(skT_e] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k s(kT_e) z^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT_e)\left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = S\left(\frac{Z}{a}\right) = S(a^{-1}Z)$$

3. Théorème de retard

Soit $s(t)$ un signal quelconque possédant une transformée en z, $S(z)$ et soit $x(t) = s(t - mTe)$ correspondant au même signal retardé d'un temps mTe. La transformée en z de $s(t - mTe)$ est égale à :

$$Z[s(k-m)T_e] = Z^{-m}S(Z)$$

4. Théorème d'avance

$$Z[s(k+m)T_e] = \sum_{k=0}^{\infty}[s(k+m)T_e]\, Z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}\{s(k+m)T_e\} = z^m S(z) - \sum_{k=0}^{m-1} s(kT_e) z^{m-k}, \forall\, m \in \mathbb{N}$$

5. Théorème de la valeur finale

Soit *s(t)* un signal quelconque possédant une transformée en *z*, *S*(*Z*). Soit *s(k)* la suite échantillonnée correspondant au signal *s*(*t*). Le théorème de la valeur finale permet de connaître la valeur vers laquelle tend la suite *s(k)* lorsque $k \to +\infty$, autrement dit lorsque $t \to +\infty$.

$$\lim_{k\to\infty} s(k) = \lim_{k\to 1}[(1 - Z^{-1})S(Z)]$$

ATTENTION ! : Ce théorème n'est valable que lorsque *s*(*kTe*) converge ou, de façon équivalente, lorsque le point 1 est à l'intérieur de la région de définition de la transformée en *z*.

6. Théorème de la valeur initiale

Soit *s(t)* un signal temporel quelconque et S(Z) sa transformée en z. Alors, on a

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \lim_{Z\to\infty} S(z)$$

7. Théorème de différentiation

Soit *s*(*t*) un signal quelconque possédant une transformée en *z*, *S(Z)*. Soit *x*(*t*) le signal défini par $x(t) = t{\cdot}s(t)$.

$$X(z) = -zT_e \frac{d}{dz} S(z)$$

8. Théorème de Convolution

$$(s_1 * s_2)(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_1(k-n)s_2(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_1(n)s_2(k-n)$$

$$si\ s_1\ et\ s_2\ sont\ causales\ \ ((s_1 * s_2)(k) = \sum_{n=0}^{k} s_1(n)s_2(k-n)$$

Alors $\quad \mathcal{Z}\{(s_1 * s_2)\} = S_1(z)S_2(z)$

1.3.4 Transformée en *z* de signaux usuels

a) Impulsion unité L'impulsion unité étant définie par :

$$\delta_k = 1 \ \ pour\ k = 0$$

$$\delta_k = 0 \ \ pour\ k \neq 0$$

$$\Delta(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k z^{-k} = z^0 = 1$$

b) Échelon unité

L'échelon unité étant défini par :

$$u(k)\begin{cases}1 & pour\ k \geq 0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

On à

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

Convergence : $\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| \geq 1$

$$U(z) = \mathcal{Z}\big(u(k)\big) = \frac{z}{z-1}$$

c) Rampe unité

La rampe unité est définie par :

$$v(k) = \begin{cases}kT & k > 0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

En remarquant que $v(k) = kTu(k)$, en utilisant la propriété étudiée précédemment, on obtient :

$$V(z) = -zT_e\frac{dU(z)}{dz} = -zT_e\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$V(z) = -zT_e\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}$$

D'où

$$V(z) = \mathcal{Z}(v(k)) = \frac{zT_e}{(z-1)^2}$$

d) Fonction polynomiale a^k

$$x(k) = \begin{cases}a^k & k \geq 0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^k$$

$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a| \quad |a|$ Rayon de convergence

$$x(z) = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

1.4 Système à temps discret

Un système à temps discret se définit comme un opérateur entre deux signaux à temps discret

$$U_k \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow Y_k$$

Avec U_k : le terme général de la séquence d'entrée

Y_k : le terme général de la séquence de sortie.

Le modèle entrée sortie est appelé modèle externe qui peut se présenter par équation récurrente ou fonction de transfert.

1.4.1 Equation récurrente

La modélisation initiale d'un système à temps discret s'écrit sous forme d'une équation récurrente entre les différents termes des séquences d'entrée et de sortie.

La forme générale d'une équation récurrente linéaire est comme suite :

$$a_0y(k) + a_1y(k-1) + \cdots \dots \dots + a_ny(k-n)$$
$$= b_0u(k) + b_1u(k-1) + \cdots \dots \dots + b_{mu}u(k-m)$$

Ou encore

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, u(k-i)$$

Le système est dit causal si les sorties dépendent uniquement des événements passées implique il faut vérifier $m \leq n$.

1.4.2 Fonction de transfert échantillonné

Appliquons la transformé en z sur l'équation récurrente avec les conditions initiales nulles la relation devient

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}\right) Y(z) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}\right) U(z)$$

1.4.2.1 Définition

On appelle fonction de transfert du système à temps discret ou transmittance discrète, la fraction rationnelle :

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}\Big/\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}$$

$$G(z)=\frac{b_{0+}b_1 z^{-1}+\cdots\ldots.+b_m z^{-m}}{a_0+a_1 z^{-1}+\cdots\ldots.+a_n z^{-n}}$$

Supposons $a_0 \neq 0,\;\; b_0 \neq 0$

$$G(z)=\frac{b_0}{a_0}\frac{z^{-m}}{z^{-n}}\frac{\frac{b_m}{b_0}+\frac{b_1}{b_0}z^{m-1}+\cdots\ldots\ldots.+z^m}{\frac{a_n}{a_0}+\frac{a_1}{a_0}z^{n-1}+\cdots\ldots..+z^n}$$

$$=\frac{b_0}{a_0}\frac{z^{-m}}{z^{-n}}\frac{(z-z_1)\ldots..(z-z_m)}{(z-p_1)\ldots\ldots(z-p_n)}=\alpha\frac{z^{-m}}{z^{-n}}\;\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)\Big/\prod_{k=1}^{n}(z-p_k)$$

Donc G(z) possède M zéros finis et N pôles finis.

Remarque. D'après l'expression précédente, on peut remarquer qu'il existe une relation biunivoque entre la fonction de transfert et l'´equation aux différences dans le sens que ces modèles peuvent se déduire l'un de l'autre. Cependant, notons que la fonction de transfert correspond à l'´equation aux différences avec des conditions initiales nulles. Par définition, les pôles du système discret sont les racines du polynôme dénominateur de la fonction de transfert et les zéros sont les racines du polynôme numérateur. Le dénominateur de la fonction de transfert est également appelé polynôme caractéristique.

1.5 Transformée en z inverse

La transformée en z ne contient que des informations aux instants d'´echantillonnage. Par conséquent, la transformée en z d'un signal *f(t),* échantillonné à la période Te, ne permet pas de retrouver le signal original à temps continu f(t) mais, uniquement le signal à temps discret *f(k)* constitué des échantillons aux instants *t = kTe.*

Les techniques générales de transformation inverse sont :

1. par la table de transformation.
2. L'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul de résidus.
3. le développement en puissance de z et de z^{-1}
4. le développement en fractions élémentaires

1.5.1 Transformée inverse par intégration et méthode des résidus

Soit $X(z)$ la transformée en Z du signal $x(n)$. On définit la transformée en Z inverse, la relation déterminant $x(n)$ à partir de $X(z)$ telle que :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{n-1}X(z)dz$$

L'intégrale précédente consiste à sommer $zn¡1X(z)$ pour des valeurs de z prises sur un contour fermé du plan complexe qui contient l'origine du plan tout en étant inclue dans le domaine de convergence de la fonction. L'équation 2.20 est équivalente à :

$$x(n) = \sum_{Tous\ les\ \text{pôles}\ p_i\ de\ R(z)} Résidus\ de\ R(z)\ aux\ \text{pôles}\ p_i$$

Avec $\qquad R(x) = z^{n-1}X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

Donc $\qquad x(n) = \sum_{\forall p_{i \in D_{cv}}} Res(z^{n-1}X(z), p_i)$

Avec $Res(R(z), p_i)$ le coefficient d'indice -1 dans le développement en série de Laurent de la fonction $R(z)$ au voisinage de p_i.

Le calcul de résidus dépend des nombres de pôles sur $D(z)$.

✓ ***Pôles simples de R(z)***: $p_i\ tel\ que\ D(z)|p_i$=0

$$Res(R(z), p_i) = \frac{N(z)}{\frac{d}{dz}D(z)} \qquad (I.6)$$

Si $D(z) = (z - p_i)F(z)\ \ avec\ \ F(p_i) \neq 0$

Alors

$$\frac{d}{dz}D(z)|_{z=p_i} = \frac{d}{dz}[(z - p_i)F(z)]_{z=p_i} = F(z)|_{z=p_i} + (z - p_i)\frac{d}{dz}F(z)|_{z=p_i}$$

$$= F(z)|_{z=p_i} = \left.\frac{D(z)}{z - p_i}\right|_{z=p_i}$$

$$Res(R(z), p_i) = \left[(z - p_i)\frac{N(z)}{D(z)}\right]_{z=p_i}$$

✓ ***Pôles multiples d'ordre m de R(z).***

Si $D(z) = (z - p_i)^m F(z)$ avec $F(p_i) \neq 0$

Alors $Res(R(z), p_i) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-p_i)^m \frac{N(z)}{D(z)}\right]_{z=p_i}$

Exemple1 :

Déterminer la suite X dont la transformée en z est :

$f(z) = \frac{z}{(z-2)}$

Il existe un pole simple z=2

$Res[z^{(n-1)}\ \frac{z}{(z-2)}\ (z-2)]_{z=2} = 2^n$

Donc $x(n) = 2^n u(n)$

Exemple 2 :

Déterminer la suite X dont la transformée en z est $F(z) = \frac{z^2}{(z+3)^2}$

On pose $G(z) = z^{n+1}F(z) = z^{n+1}\frac{z^2}{(z+3)^2}$

$R(z) = \frac{z^{n+1}}{(z+3)^2}$ il y'a un pole double en z=-3

Donc $Res(g(z), -3) = \frac{d}{dz}\left[(z+3)^2\frac{z^{n+1}}{(z+3)^2}\right]_{z=-3} = \frac{d}{dz}[z^{n+1}]_{z=-3} = (n+1)z^n|_{z=-3}$

$$= (n+1)(-3)^n \Longrightarrow\ x_n = (n+1)(-3)^n$$

1.5.2 Developpement en puissance

Exemple :

Trouver la réponse impulsionnelle d'un système décrit par l'équation aux différences suivante :

$$s(n) = (n-3) + e(n)$$

La transformée en z nous donne $H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{1-Z^{-3}}$

Les limites des series géometriques

$$\frac{1}{1-z^{-3}} = \sum_{k=0}^{\infty}(z^{-3})^k$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-3k} = 1 + z^{-3} + z^{-6} + \cdots \ldots\ldots + z^{-3n}$$

On obtient

$$h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - 3k)$$

1.5.3 Transformée inverse par décomposition en fractions rationnelles

Exemple :

$$f(z) = \frac{4z}{3z^2 - 2z - 1}$$
$$\frac{f(z)}{z} = \frac{4}{3z^2 - 2z - 1} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{3z+1}$$

Avec a=1, b=-3

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{3}{3z+1} \Longrightarrow f(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{3z}{3z+1}$$
$$= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+\frac{1}{3}} \xrightarrow{TZI} x_n = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

1.6 Transformée en z modifiée :

La transformée en z modifiée, principalement utilisée dans la synthèse des réseaux correcteurs à pour but de fournir des informations sur le comportement du système entre les instants d'échantillonnage.

En pratique, la méthode utilisée consiste à introduire fictivement un retard $\lambda T,\ \lambda \in [0, 1]$ sur la sortie du système avant échantillonnage.

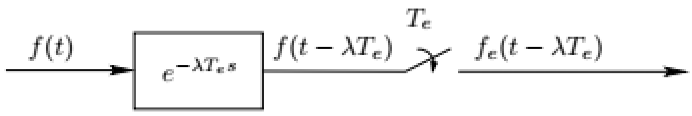


Figure.1.6 Signal retardé échantillonné

1.6.1 Définition La transformée en z modifiée du signal (ou de la fonction) f(t) est la transformée en z de *f(t - λTe)* :

$$\mathcal{Z}_m\{(f(t)\} = \mathcal{Z}\{f(t - \lambda T_e\} = \sum_{k=0}^{\infty} f((k - \lambda)T_e)z^{-k}$$

Notons que $f((k - \lambda)T_e)$ balaie l'intervalle de $f(kT_e)$ à $f((k - 1)T_e)$ lorsque λ varie de 0 à 1. Soit m = 1 - λ avec 0 ≤ m < 1, alors :

$$\mathcal{Z}_m\{f(t)\} = \mathcal{Z}\{f(t - T_e + mT_e\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\big((k-1+m)T_e\big) z^{-k} = F(z,m)$$

Quand k = 0, on a k - 1 + m < 0 et $f((k - 1 + m)T_e) = 0$. Alors, la transformée en z modifiée vaut :

$$F(z,m) = \mathcal{Z}_m\{f(t)\} = \sum_{k=1}^{\infty} f((k-1+m)T_e) z^{-k}$$

$$F(z,m) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f((k+m)T_e) z^{-k}$$

1.6.2 Propriétés

- **Linéarité**

$$\mathcal{Z}_m\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F_m(z) + \beta G_m(z)\ , \forall \alpha, \beta \in \Re$$

- **Théorème de la valeur initiale**

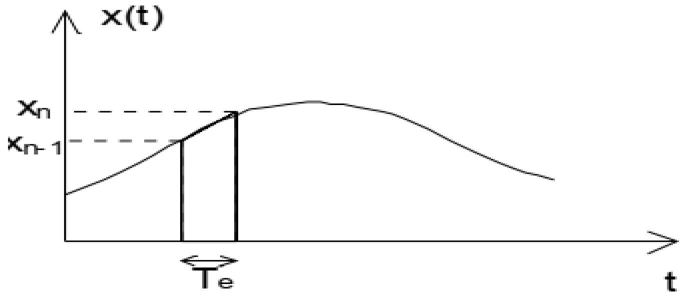
$$\lim_{\substack{m \to 0 \\ k \to 0}} f\big((k+m)T_e\big) = \lim_{z \to \infty} z\, F(z,0)$$

- **Théorème de la valeur finale**

$$\lim_{k \to \infty} f\big((k+m)T_e\big) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z,m)$$

1.7 Transformation bilinéaire

Elle permet le passage d'une transformée de Laplace en une transformée en z.
Elle utilise la méthode du trapèze pour calculer une intégrale.



Soit y(t), l'intégrale de la fonction x(t) :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Si l'on effectue cette intégration entre les instants $(n-1)T_e \ \ et\ nT_e$: $y_n - y_{n-1}$ = aire du trapèze défini ci-contre,

Soit $y_n - y_{n-1} = (x_n + x_{n-1})T_e/2$

En passant à la transformée en z : $Y(z)(1-z^{-1}) = X(z)(1+z^{-1})T_e$
On passe donc de la transformée en z d'un signal à la transformée en z de son intégrale, en multipliant la transformée en z du signal par :

$$\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\frac{T_e}{2}$$

Or un intégration en Laplace correspond à une division par p, on aura donc la correspondance :

$$p \longrightarrow \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\frac{2}{T_e}$$ qui constitue la transformation bilinéaire.

Table des transformées de Laplace et en Z

Transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$	Signal continu $f(t)$	Signal échantillonné f_k	Transformée en z $F(z) = \mathcal{Z}[f_k]$
1	$\delta(t)$	$f_0 = 1\,,\quad \forall k \neq 0 \quad f_k = 0$	1
e^{-ap}	$\delta(t-a)$		
e^{-hTp}	$\delta(t-hT)$	$f_h = 1\,,\quad \forall k \neq h \quad f_k = 0$	z^{-h}
$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t)$	1	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	kT	$T\frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{2}{p^3}$	t^2	k^2T^2	$T^2\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{z(e^{-aT}-e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
		a^k	$\frac{z}{z-a}$
		$(-a)^k$	$\frac{z}{z+a}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\sin\omega kT$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\cos\omega kT$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$