Chapitre II : Logique et Algèbres trivalentes de Łukasiewicz

§1 -Logique trivalente de Łukasiewicz

§1 - Sémantique [4]

L'œuvre principale de Łukasiewicz dans la logique mathématique a été la création des logiques dites ≪multivalentes≫, il en a eut l'idée d'un point statut à donner à la proposition ≪il y pleuvra demain ≫. En 1917 il donna la première ébauche d'une logique trivalente en rattachant la troisième valeur logique différente du vrai et du faux à la notion de possibilité. Ses premières publications sur la logique trivalente datent de1920.

Il y adaptait alors les notations suivantes : 1 pour le vrai, 0 pour le faux, et ½ pour la troisième valeur logique pouvant être interprétée comme le problématique ou (le possible).

Łukasiewicz a défini sa logique trivalente du point de vue sémantique à l'aide des connecteurs suivants :

1-La négation

Notée par N, définie par la table :

x	$N(x)$
0	1
1/2	1/2
1	0

$N(x)$

On remarque que c'est une involution décroissante dans l'ensemble

{0, ½, 1} ordonné naturellement. En particulier on a le principe de double négation *NNP=P*

2- Implication

L'implication notée $x \rightarrow y$: définie par la table

x \ y	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

$x \rightarrow y$

On constate que dans l'ensemble T = {0, ½, 1} naturellement ordonné on a : $x \rightarrow y = 1$ si et seulement si $x \leq y$

3- Disjonction

Łukasiewicz a défini la disjonction par :

$X \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y.$

Et la table de vérité est :

x \ y	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$x \vee y$

Dans une algèbre de Boole on a :

$$(x \rightarrow y) \rightarrow y = \urcorner(\urcorner x \vee y) \vee y,$$

$$= (\urcorner(\urcorner x) \wedge \urcorner y) \vee y,$$

$$= (x \wedge \urcorner y) \vee y,$$

$$= (x \vee y) \wedge (\urcorner y \vee y),$$

$$= (x \vee y) \wedge 1,$$

$(x \to y) \to y = x \vee y.$

4- Conjonction

Ce connecteur défini dans la logique trivalente de Łukasiewicz comme suit :

$x \wedge y = N(Nx \vee Ny).$

Sa table de vérité est :

$x \backslash y$	0	$1/2$	1
0	0	0	0
$1/2$	0	$1/2$	$1/2$
1	0	$1/2$	1

$x \wedge y$

Dans une algèbre de Boole on a :

$$N(Nx \vee Ny) = N(Nx) \wedge N(Ny),$$
$$= x \wedge y.$$

5- Équivalence

L'équivalence de Łukasiewicz dans l'algèbre trivalente est définie par :

$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x).$

Sa table de vérité est :

$x \backslash y$	0	$1/2$	1
0	1	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	1	$1/2$
1	0	$1/2$	1

$(x \Leftrightarrow y)$

6- Possibilité

Łukasiewicz tenta ensuite de donner une définition du concept de possibilité en essayant de résoudre certains problèmes de la logique modale et ce fut l'un de ses élèves, Tarski, qui en 1921, donna une connecteurs unaire de possibilité qu'il notait μ**,** la définition suivante :

$\mu x = Nx \rightarrow x$. Et sa table de vérité est :

x	μx
0	0
1/2	1
1	1

μx

Preuve

$\boldsymbol{x}$	Nx	$Nx \rightarrow x$	μx
0	1	0	0
1/2	1/2	1	1
1	0	1	1

7- Nécessité notée ϑ

Est un connecteur unitaire défini par : ϑx = $N\mu N$x.

x	ϑx
0	0
1/2	0
1	1

ϑx

Preuve

x	Nx	μNx	$N\mu Nx$	ϑx
0	1	1	0	0
1/2	1/2	1	0	0
1	0	0	1	1

8-Impossibilité et contingence

Dans le calcule trivalent de Łukasiewicz, on peut définir les connecteurs d'impossibilité (η) et de contingence (γ) :

$\eta x = N\mu x.$

$\gamma x = \mu N x.$

Ce qui donne les tables :

x	ηx
0	1
1/2	0
1	0

x	γx
0	1
1/2	1
1	0

9-Implication faible

A Monteiro a introduit l'implication faible notée par :

$x \underset{M}{\rightarrow} y$

$x \backslash y$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1	1	1
1	0	1/2	1

$x \underset{M}{\rightarrow} y$

On pourra remarquer : $x \rightarrow y = \gamma(x) \vee y$.

L'implication de Łukasiewicz se retrouve à partir de l'implication faible :

$X \rightarrow y = (x \underset{M}{\rightarrow} y) \wedge (Ny \underset{M}{\rightarrow} Nx).$

1-2- Axiomatisation de Wajsberg (1931)[4]

Wajsberg fut le premier en 1931 à donner une axiomatisation de logique trivalente de Łukasiewicz à l'aide des quatre axiomes suivants :

W1 : $x \rightarrow (y \rightarrow x)$.

W2 : $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$.

W3 : $((x \to Nx) \to x) \to x$.

W4 : $(Nx \to Ny) \to (y \to x)$.

On remarque que les quatre schémas d'axiomes sont des thèses dans le calcul propositionnel classique que nous désignons par L_2.

§₂ – ALGÉBRISATION

Algèbre trivalente de Łukasiewicz

2-1- Définition [4]

Moisil, en 1940, introduisit la notion d'algèbre trivalente de Łukasiewicz en donnant une axiomatique assez complexe que l'on peut énoncer de la façon suivante :

Un système $(L, \vee, \wedge, 0, 1, N, \mu)$ formé par un ensemble non vide L, deux éléments 1 et 0 de L, deux opérations binaires $\wedge$ et $\vee$ définies sur L et deux opérations unitaires N et μ définies sur L, est une algèbre trivalente de Łukasiewicz si :

L_1 : $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ est un treillis distributif fermé.

L_2 : L'opération unaire N est une involution décroissante c'est-à-dire :

- $x \leq y \Longrightarrow Ny \leq Nx$.
- $NNx = x$.
- $N1 = 0$.
- $N0 = 1$.

L_3 **:** L'opération unaire μ est un endomorphisme sur L, idempotent et extensif.

- **Endomorphisme :** $\mu(x \vee y) = \mu(x) \vee \mu(y)$.

$$\mu(x \wedge y) = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

- **Idempotent :** $\mu\mu(x) = \mu(x)$.

- **Extensif :** $\mu(x) \geq x$.

L₄ : $N\mu N\mu x = \mu x$.

L₅ : $Nx \vee \mu x = 1$.

L₆ : $x \wedge Nx = \mu x \wedge Nx$.

Cette algèbre est notée : $Ł_3$- algèbre.

2-2- Exemples [1]

1/- T = {0, 1/2, 1} la plus petite $£_3$- algèbre.

2/- Soit B une algèbre de Boole, $B^2 = \{(x, y) \,/\, x \in B \text{ et } y \in B\}$ est une algèbre de Boole.

L'ensemble $L(B) = \{(x, y) \,/\, x \leq y\}$ est un sous-treillis de B^2, cette ensemble muni des lois :

❶ $(x, y) \vee (x', y') = (x \vee x', y \vee y')$.

❷ $(x, y) \wedge (x', y') = (x \wedge x', y \wedge y')$.

❸ $N(x, y) = (\neg y, \neg x)$.

❹ $\mu(x, y) = (y, y)$.

Est une L_3 algèbre car :

1/- $(0, 0) \in L(B)$ le plus petit élément de L(B), et (1,1) le plus grand élément de L(B) donc L(B) fermé.

2/- L(B) distributif car :

Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in L(B)$

$$(x, y) \vee [(x', y') \wedge (x'', y'')] = (x, y) \vee [(x' \wedge x'', y' \wedge y'')]$$

$$= (x \vee (x' \wedge x''), y \vee (y' \wedge y''))$$

$$= ((x \vee x') \wedge (x \vee x''), (y \vee y') \wedge (y \vee y''))$$

$$= (x \vee x', y \vee y') \wedge (x \vee x'', y \vee y'')$$

$$= [(x, y) \vee (x', y')] \wedge [(x, y) \vee (x'', y'')]$$

Donc

$(x, y) \vee [(x', y') \wedge (x'', y'')] = [(x, y) \vee (x', y')] \wedge [(x, y) \vee (x'', y'')]$.

3/- N est une involution décroissante car :

On a : $(x, y), (x', y') \in L(B)$

On suppose que $(x, y) \leq (x', y')$, et on démontre que : $N(x', y') \leq N(x, y)$

On a : $(x, y) \leq (x', y') \Rightarrow x \leq x'$

$y \leq y'$

et comme $x, y \in B$ algèbre de Boole, donc : $\urcorner x' \leq \urcorner x$

$\urcorner y' \leq \urcorner y$

Donc $(\urcorner y', \urcorner x') \leq (\urcorner y, \urcorner x)$ c'est-à-dire : $N(x', y') \leq N(x, y)$

Alors si $(x, y) \leq (x', y') \Rightarrow N(x', y') \leq N(x, y)$.

$N(0,0) = (\urcorner 0, \urcorner 0) = (1,1)$.

$N(1,1) = (\urcorner 1, \urcorner 1) = (0,0)$.

$NN(x, y) = N(\urcorner y, \urcorner x) = (\urcorner\urcorner x, \urcorner\urcorner y) = (x, y)$.

Finalement on obtient, N est une involution décroissante.

4/- μ endomorphisme :

$\mu((x, y) \vee (x', y')) = \mu(x \vee x', y \vee y')$.

$= (y \vee y', y \vee y')$

$= (y, y) \vee (y', y')$.

$= \mu(x, y) \vee \mu(x', y')$.

Donc : $\mu((x, y)\vee(x', y')) = \mu(x, y)\vee\mu(x', y')$.

$\mu((x, y)\wedge(x', y')) = \mu(x\wedge x', y\wedge y')$.

$\mu((x, y)\wedge(x', y')) = (y\wedge y', y\wedge y')$

$= (y, y)\wedge(y', y')$.

$= \mu(x, y)\wedge\mu(x', y')$.

Donc : $\mu((x, y)\wedge(x', y')) = \mu(x, y)\wedge\mu(x', y')$.

5/- μ idempotent :

On a : $\mu(\mu(x, y)) = \mu(y, y) = (y, y) = \mu(x, y)$.

Donc μ idempotent.

6/- μ extensif :

$\mu(x, y) = (y, y)$.

On a : $(x, y) \in L(B)$ donc : $y \geq x$ et $y \geq y$ alors $(y, y) \geq (x, y)$

C'est-à-dire : $\mu(x, y) \geq (x, y)$.

Alors μ extensif.

7/- $N\mu N\mu(x, y) = N\mu N(y, y)$

$= N\mu(\urcorner y, \urcorner y)$

$= N(\urcorner y, \urcorner y)$

$= (y, y)$

$= \mu(x, y)$.

Donc $N\mu N\mu(x, y)= \mu(x, y)$.

8/- $N(x, y)\vee\mu(x, y) = (\urcorner y, \urcorner x)\vee(y, y)$

$= (\urcorner y\vee y, \urcorner x\vee y)$

$= (1, \rceil x \vee y)$

$= (1, x \to y)$

Et comme $(x, y) \in$ L(B), c'est-à-dire $x \leq y$

Et d'après la propriété de l'implication suivante : $x \to y = 1$ si et seulement si $x \leq y$.

Donc : $x \to y = 1$ ($\rceil x \vee y = 1$)

Alors : $N(x, y) \vee \mu(x, y) = (1, \rceil x \vee y)$

$= (1, x \to y)$

$= (1,1)$.

Ou bien $\rceil x \leq \rceil x$

$x \leq y \Longrightarrow \rceil x \vee x \leq \rceil x \vee y$

$\Longrightarrow 1 \leq \rceil x \vee y \leq 1$.

$\Longrightarrow \rceil x \vee y = 1$.

Alors $N(x, y) \vee \mu(x, y) = (1, 1)$.

9/- $(x, y) \wedge N(x, y) = (x, y) \wedge (\rceil y, \rceil x)$

$= (x \wedge \rceil y, y \wedge \rceil x)$

On a : $x \leq y \Longrightarrow \rceil y \leq \rceil x$ et $x \leq x$

Donc : $x \wedge \rceil y \leq 0$ et $x \wedge \rceil y \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq x \wedge \rceil y \leq 0$ alors $x \wedge \rceil y = 0$.

Donc $(x, y) \wedge N(x, y) = (x \wedge \rceil y, y \wedge \rceil x)$

$= (0, y \wedge \rceil x)$.

$\mu(x, y) \wedge N(x, y) = (y, y) \wedge (\rceil y, \rceil x)$

$= (y \wedge \rceil y, y \wedge \rceil x)$

$= (0, y \wedge \rceil x)$.

Finalement on obtient : $(x,y)\wedge N(x,y) = \mu(x,y)\wedge N(x,y)$.

2-3-Propriétés

1/ La négation N vérifie les lois de De Morgan :

$N(x\vee y) = N(x)\wedge N(y)$.

On a : $\begin{cases} x \leq x\vee y \\ y \leq x\vee y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x\vee y) \leq N(x). \\ N(x\vee y) \leq N(y). \end{cases}$

$\Rightarrow N(x\vee y) \leq N(x)\wedge N(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$.

Soit z : $\begin{cases} z \leq N(x) \\ z \leq N(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq N(z) \\ y \leq N(z) \end{cases} \Rightarrow x\vee y \leq N(z)$.

$\Rightarrow z \leq N(x\vee y)$.

Et on a $N(x)\wedge N(y) \leq N(x)$.

$N(x)\wedge N(y) \leq N(y)$.

Donc $N(x)\wedge N(y) \leq N(x\vee y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$.

De (1) et (2) on obtient $N(x\vee y) = N(x)\wedge N(y)$.

Et aussi $N(x\wedge y) = N(x)\vee N(y)$.

$2/$- $N(0) = 1, N(1) = 0$.

On a $\forall\, x \in L : N(x) \geq 0$.

Donc $N(1) \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$.

Et on a $\forall\, x \in L :\ N(x) \leq 1$.

$x \geq N(1)$ et $x \geq 0$. Donc : $N(1) \leq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$.

De (1) et (2) : $0 \leq N(1) \leq 0$, donc : $N(1) = 0$.

$3/$- $\mu(1) = 1$.

On a $\forall\, x \in L :\ \mu(x) \geq x$, donc : $\mu(1) \geq 1$.

Et d'autre part : $\forall\, x \in L :\ \mu(x) \leq 1$ alors $\mu(1) \leq 1$.

$\mu(1) \geq 1$et $\mu(1) \leq 1$ donc $\mu(1) = 1$.

4/- $\mu(0) = 0$.

$\forall\, x \in L : x \wedge N(x) = \mu(x) \wedge N(x)$.

Donc : $0 \wedge N(0) = \mu(0) \wedge N(0)$.

$0 \wedge 1 = \mu(0) \wedge 1$.

$0 = \mu(0)$.

Donc : $\mu(0) = 0$.

5/-$N\mu(x) \leq Nx \leq \mu N(x)$.

On a : $\forall\, x \in L : \mu(x) \geq x$.

$\Rightarrow Nx \geq N\mu(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$.

Et on a : $\forall\, x \in L: x \leq \mu(x)$.

Donc pour l'élément $N(x)$: $Nx \leq \mu N(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$.

De (1) et (2) on obtient : $N\mu(x) \leq Nx \leq \mu N(x)$.

6/- $N\mu N(x) \leq x \leq \mu(x)$.

En utilisant la propriété (5) on obtient :

On a : $N\mu(x) \leq Nx \Rightarrow N(N(x)) \leq N(N\mu(x))$

$$\Rightarrow\ x \leq\ \mu(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

D'autre part : on a $N(x) \leq\ \mu N(x) \Rightarrow N\mu(N(x)) \leq N\big(N(x)\big)$.

$$\Rightarrow N\mu\big(N(x)\big) \leq x \ldots\ldots\ \ldots.(2).$$

De (1) et (2) on trouve : $N\mu N(x) \leq x \leq \mu(x)$.

7/- ϑ et η sont des endomorphismes rétractant, idempotentes.

$\vartheta = N\mu N.$

a/-$\boldsymbol{\vartheta}$ **endomorphisme :**

$\vartheta(x \vee y) = N\mu N(x \vee y).$

$= N\mu(Nx \wedge Ny).$

$= N(\mu Nx \wedge \mu Ny)$ (car μ endomorphisme).

$= N\mu N(x) \vee N\mu N(y).$

$\vartheta(x \vee y) = \vartheta(x) \vee \vartheta(y).$

$\vartheta(x \wedge y) = N\mu N(x \wedge y).$

$= N\mu(Nx \vee Ny).$

$= N(\mu Nx \vee \mu Ny).$

$= N\mu Nx \wedge N\mu Ny.$

$= \vartheta x \wedge \vartheta y.$

Donc ϑ endomorphisme.

b/- $\boldsymbol{\vartheta}$ **est une rétraction :**

$\vartheta x = \ N\mu Nx \leq x$ (d'après la propriété 6).

$\vartheta x \leq x$, donc ϑ rétractent.

c/- $\boldsymbol{\vartheta}$ **idempotente :**

On a :

$\vartheta\vartheta x = N\mu N(N\mu Nx).$

$= N\mu NN(\mu Nx).$

$= N\mu\mu(Nx).$

$= N\mu Nx.$

$= \vartheta x.$

Donc ϑ idempotente.

8/- η et γ vérifiant les lois de De Morgan appelés dualités.

$\eta(x \vee y) = \eta x \wedge \eta y$ et $\eta(x \wedge y) = \eta x \vee \eta y$.

$\gamma(x \vee y) = \gamma x \wedge \gamma y$ et $\gamma(x \wedge y) = \gamma x \vee \gamma y$.

9/-$\eta x \leq Nx \leq \gamma x$.

$\vartheta x \leq x \leq \mu x$.

Les 6 opérateurs I, N, , ϑ, η , γ forment un monoïde avec la table suivante :

o	I	N	μ	ϑ	η	γ
I	I	N	μ	ϑ	η	γ
N	N	I	η	γ	μ	ϑ
μ	μ	γ	μ	ϑ	η	γ
ϑ	ϑ	η	μ	ϑ	η	γ
η	η	ϑ	η	γ	μ	ϑ
γ	γ	μ	η	γ	μ	ϑ

Ce monoïde est engendré par N et l'un quelconque de $\mu, \vartheta, \eta, \gamma$.

10/- L_5 est équivalente à :

1- $x \vee \gamma x = 1$.

2- $\eta x \vee \mu x = 1$.

3- $\vartheta x \vee \gamma x = 1$.

4- $\mu x \vee \gamma x = 1$.

Preuve : Rappelons que L_5 **:** $Nx \vee \mu x = 1$.

$(L_5) \Longrightarrow (1)$.

On suppose que : $Nx \vee \mu x = 1$. i.e., L_5

Remplaçons x par Nx, on obtient :

$Nx \vee \mu x = NNx \vee \mu Nx = 1$.

$\Rightarrow x \vee \gamma x = 1.$

Donc (L_5) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (L_5)

On suppose que : $x \vee \gamma x = 1.$

En remplaçons x par Nx :

$Nx \vee \gamma Nx = 1 \Rightarrow Nx \vee \mu x = 1.$

Donc (L_5) $\Leftrightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2).

On suppose que : $x \vee \gamma x = 1.$

En remplace x par μx :

$x \vee \gamma x = 1.$

$\Rightarrow \mu x \vee \gamma \mu x = 1$(d'après la propriété (9), $\gamma \mu = \eta$)

$\Rightarrow \mu x \vee \eta x = 1.$

Donc (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3).

Supposons que :

$\eta x \vee \mu x = 1.$

En remplace x par Nx

$\eta x \vee \mu x = \eta Nx \vee \mu Nx.$

$= \vartheta x \vee \gamma x$

$=1.$

Donc (2) $\Rightarrow$ (3).

(3)$\Rightarrow$ (1).

Supposons que : $\vartheta x \vee \gamma x = 1$.

On a $\forall\, x \in L$: $\vartheta x \leq x$.

Donc $\vartheta x \vee \gamma x \leq x \vee \gamma x$.

C'est-à-dire $1 \leq x \vee \gamma x$.

Donc $x \vee \gamma x = 1$.

Alors (3) $\Rightarrow (1)$.

(L_5) $\Rightarrow (4)$.

On suppose que : $N x \vee \mu x = 1$.

On a $\forall\, x \in L$: $N x \leq \mu N x$ (d'après la propriété (5)).

$$N x \leq \gamma x.$$

Donc $N x \vee \mu x \leq \mu x \vee \gamma x$.

$\Rightarrow 1 \leq \mu x \vee \gamma x$.

$\Rightarrow \mu x \vee \gamma x = 1$.

Donc (L_5) $\Rightarrow (4)$.

(4) $\Rightarrow (2)$.

On suppose que : $\mu x \vee \gamma x = 1$.

Remplacé x par μx.

$$\begin{aligned} \mu x \vee \gamma x &= \mu \mu x \vee \gamma \mu x. \\ &= \mu x \vee \eta x. \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc (4) $\Rightarrow (2)$.

11/- L_5 est équivalent à :

1/- $\eta x \wedge x = 0$.

2/- $Nx \wedge \vartheta x = 0$.

3/- $Nx \wedge \eta x = 0$.

4/- $\gamma x \wedge \vartheta x = 0$.

5/- $\eta x \wedge \vartheta x = 0$.

Preuve

12/-L_6 est équivalent à :

1/- $x \wedge Nx = x \wedge \gamma x$.

2/- $x \vee Nx = x \vee \eta x$.

3/- $x \vee Nx = \mu x \vee Nx$.

13/- $\mu x \wedge Nx = x \wedge \gamma x$.

$x \vee \eta x = Nx \vee \vartheta x$.

2-4-Propriétés fondamentales

$Nx = \eta x \vee (x \wedge \gamma x)$.

Preuve : on soit que :

$x \leq \mu x$ d'où $x \wedge \mu x = x$.

$x \vee 0 = x \vee (\mu x \wedge \eta x)$.

$= (x \wedge \mu x) \vee (\mu x \wedge \eta x)$.

$= \mu x \wedge (x \vee \eta x)$.

Et on a : $x = \mu x \wedge (Nx \vee \vartheta x)$ … … … … … $(*)$.

Donc : $Nx = N\mu x \vee (NNx \wedge N\vartheta x)$.

$= \eta x \vee (x \wedge \gamma x)$.

Principe de détermination de Moisil :

$$\begin{cases} \mu x = \mu y. \\ \vartheta x = \vartheta y. \end{cases} \Longrightarrow x = y.$$

Preuve : supposons que :

$\mu x = \mu y$ et $\vartheta x = \vartheta y$.

D'après (*) :

$x \vee y = \mu(x \vee y) \wedge \big(N(x \vee y) \vee \vartheta(x \vee y)\big)$.

$= (\mu x \vee \mu y) \wedge (Nx \wedge Ny \vee \vartheta x \vee \vartheta y)$.

$x \vee y = \mu x \wedge (Nx \vee \vartheta y) \wedge \mu x \wedge (Ny \vee \vartheta y)$.

Donc : $x \vee y = x \wedge y$.

$x \wedge y \leq x \leq x \vee y$.

$x \vee y \leq x \leq x \vee y$.

$\Longrightarrow \; x \vee y = x$. Mais $x \vee y = y$.

$\Longrightarrow x = y$.

2-5-Deuxième axiomatisation des £$_3$- algèbre [11]

La 1[éré] axiomatisation de Moisil c'est l'ensemble des axiomes L_1 à L_6 est équivalente à la suivante :

Une £$_3$- algèbre est une structure $(L, \wedge, \vee, 0, 1, \; \mu, \; \vartheta)$ tel que :

L'_1 **:** $(L, \wedge, \vee, \; 0, 1)$ est un treillis distributif fermé.

L'_2 : μ, ϑ sont des endomorphismes conservant 0 et 1.

L'_3 : $\mu\vartheta = \vartheta, \vartheta\mu = \mu$.

L'_4 : $\vartheta \leq \mu$.

L'_5 : $\mu(x) = \mu(y), \vartheta(x) = \vartheta(y) \Longrightarrow x = y$.

L'_6 : $\mu, et\ \vartheta$ sont chrysipiens : $\mu, \vartheta : L \rightarrow CL,\ ou\ C(L) =$ { les éléments complémentes de L}.

2-6-Équivalence des deux axiomatisations des Ł3 – algèbres

La démonstration de l'équivalence entre les deux axiomatisations est laissée au lecteur à titre d'exercice.