Chapitre III

Représentation des algèbres trivalentes de Łukasiewicz par des parties floues.

1-Généralités sur les ensembles floues

Soit E un ensemble non vide et $P(E)$ l'ensemble des parties de E. $P(E)$ muni des opérations usuelles d'intersection (∩), de réunion (∪) et de complément (∁) est une algèbre de Boole.

Si l'on note par U l'ensemble à deux éléments U = {0, 1} on sait qu'il y a une correspondance (bijection) entre $P(E)$ et U^E (ensemble des applications de E dans {0, 1}) de la façon suivante :

A chaque partie A de E on associe sa fonction caractéristique

$f_A : P(E) \rightarrow U^E$ définie par :

$$A \rightarrow f_A$$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A; \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases}$$

A chaque application $\delta : E \rightarrow U$ on associe la partie $A = \delta^{-1}(1)$.

Dans tout ce qui suit nous conviendrons d'identifier chaque partie A avec sa fonction f_A .

Ainsi on écrira aussi bien

$x \in A$ ou $A(x) = 1$;

$x \notin A$ ou $A(x) = 0$.

Par ailleurs l'ensemble U ordonné naturellement ($0 < 1$) est une algèbre de Boole (en même temps qu'une chaîne) avec les opérations

$\alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta)$

$\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$

$\urcorner\alpha = 1-\alpha$.

Avec les identifications précédentes, les opérations ensemblistes se traduisent alors par :

A ∩ B est définie par : $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$, pour tout $x \in E$.

A ∪ B est définie par : $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$, pour tout $x \in E$.

∁A est définie par : $(\complement A)(x) = \urcorner A(x)$, pour tout $x \in E$.

∅ est définie par : $\emptyset(x) = 0$, pour tout $x \in E$.

1-1- Structure floue

On appelle structure floue tout couple (E, J) où :

- E est un ensemble non vide quelconque (dont les éléments seront notés $x, y, z, \ldots$).
- J est une chaîne fermée (c'est-à-dire avec un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1, avec $0 \neq 1$). Les éléments de J seront notés α, β,…

1-2- Partie floue

Dans une structure floue on appelle partie floue de E, toute application de E dans J.

Les parties floues seront généralement notées $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$,…

L'ensemble des parties floues de E sera noté $\tilde{P}(E)$.

1-3- Parties nettes

Si J = U = {0, 1} alors $\tilde{P}(E)$ = $P(E)$ qui est l'ensemble des parties de E, dit l'ensemble des parties nettes de E.

1-4- Relation d'ordre sur les parties floues

On va maintenant définir une relation d'ordre sur $\widetilde{P}(E)$ par :

$\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ si et seulement si pour tout $x \in E$: $\tilde{A}(x) \leq \tilde{B}(x)$.

Cette relation d'inclusion est évidemment une relation d'ordre.

1-5- Réunion et intersection des parties floues

L'union et l'intersection dans $\tilde{P}(E)$ prolongent d'une manière naturelle l'union et l'intersection dans $P(E)$.

La réunion de deux parties floues $\tilde{A}, \tilde{B}$ est définie par :

$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \max(\tilde{A}(x),\ \tilde{B}(x))$.

L'intersection de deux parties floues $\tilde{A},\ \tilde{B}$ est définie par :

$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \min(\tilde{A}(x),\ \tilde{B}(x))$.

Et on a : $\complement\,\tilde{A}(x) = 1\text{-}\widetilde{A}(x)$.

- $(\tilde{P}(E), \cup,\ \cap,\ \complement,\ \emptyset,\ E)$ est une algèbre de Boole.

1-6- Niveaux de flou

Posons J^0 = J – {0}, J^1 = J – {1}, J^{01} = J – {0, 1}.

Soit $\tilde{A}$ une partie floue dans une structure floue (E, J).

Pour tout $\alpha \in$ J on définit le niveau de flou de degré α comme étant l'application N_α : $\tilde{P}(E) \to P(E)$ définie par :

$$N_\alpha(\tilde{A}) = \{x \in E \,/\, \tilde{A}(x) \geq \alpha\}.$$

Pour tout $\alpha \in J^1$ on définit le niveau strict de flou de degré α comme étant l'application $N'_\alpha : \tilde{P}(E) \to P(E)$ définie par :

$$N'_\alpha(\tilde{A}) = \{x \in E \,/\, \tilde{A}(x) > \alpha\}.$$

$(\tilde{P}(E), \cup, \cap, \complement, \emptyset, E, N_{1/2}, N_1)$ est une L_3 algèbre.

Propriétés

- $N_\alpha(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cup N_\alpha(\tilde{B})$.

  Preuve :

  $N_\alpha(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \{x \in E / \, (\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) \geq \alpha\}$.

  $= \{x \in E / \max(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)) \geq \alpha\}$.

  $= \{x \in E / \, \tilde{A}(x) \geq \alpha$ ou $\tilde{B}(x) \geq \alpha\}$.

  $= \{x \in E / \, \tilde{A}(x) \geq \alpha\} \cup \{x \in E \,/\, \tilde{B}(x) \geq \alpha\}$.

  $= N_\alpha(\tilde{A}) \cup N_\alpha(\tilde{B})$.

- $N_\alpha(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cap N_\alpha(\tilde{B})$.

  Preuve :

  $N_\alpha(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \{x \in E / \, (\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) \geq \alpha\}$.

  $= \{x \in E / \min(\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)) \geq \alpha\}$.

  $= \{x \in E / \, \tilde{A}(x) \geq \alpha$ et $\tilde{B}(x) \geq \alpha\}$.

  $= \{x \in E / \, \tilde{A}(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in E / \, \tilde{B}(x) \geq \alpha\}$.

  $N_\alpha(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = N_\alpha(\tilde{A}) \cap N_\alpha(\tilde{B})$.

- $N_\alpha(\emptyset) = \emptyset$.

  Preuve :

  $N_\alpha(\emptyset) = \{x \in E / \, \emptyset(x) \geq \alpha\}$.

  $= \{x \in E / 0 \geq \alpha\}$ tel que $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

  $= \emptyset$.

- $N_\alpha(E) = E$.

Preuve :

$N_\alpha(E) = \{x \in E/E(x) \geq \alpha\}$.

$N_\alpha(E) = \{x \in E/1 \geq \alpha\} = E$.

- Si $\alpha \leq \beta \Longrightarrow N_\beta \leq N_\alpha$, c'est-à-dire $N_\beta(\tilde{A}) \subseteq N_\alpha(\tilde{A})$ pour tout $\tilde{A}$ de $\tilde{P}(E)$.
- Si A est une partie nette : $N_\alpha(A) = A$ pour tout $\alpha \in J^0$.
- Quels que soient α, β dans J^0 : $N_\alpha N_\beta = N_\beta$.
- Si pour tout $\alpha \in J^0$: $N_\alpha(\tilde{A}) = N_\alpha(\tilde{B})$ alors $\tilde{A} = \tilde{B}$ (Principe de détermination de Moisil).

Ces propriétés restent valables pour les niveaux stricts de flou.

Définition[2][3][6]

Pour tout $x \in L$, on défini :

φ_α : $L_3 \rightarrow$ *C(L)* (l'ensemble des éléments complémentés de *L*).

Tel que :

1. φ_α est un endomorphisme de *L*, conserve le 0 et le 1;
2. Si $\alpha \leq \beta$ alors $\varphi_\beta \leq \varphi_\alpha$;
3. Quels que soient α, β dans J^0 : $\varphi_\alpha \varphi_\beta = \varphi_\beta$;
4. Si $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(y)$ pour tout α dans J^0 alors $x = y$ (Principe de détermination de Moisil).

2- Théorème de représentation de Ł$_3$-algèbres [1][2]

Considérons une L_3 algèbre.

X : espace dual de *L* (l'ensemble des ultrafiltres de *L*). On considère la structure floue $\tilde{P}(X)$ = *(X, J)*

$f : L \rightarrow \tilde{P}(X)$

$x \rightarrow f(x)$ la fonction définie par :

$f(x)(U) = \sup \{\alpha \in J^0 \ / \ \varphi_\alpha(x) \in U\}$.

Preuve

1) **f est un morphisme de treillis fermé**

- $f(x \vee y)(U) = \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x \vee y) \in U \}$

  $= \sup \{ \alpha \in J^0 / (\varphi_\alpha(x) \vee \varphi_\alpha(y)) \in U \}$ car φ_α endomorphisme.

  $= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U$ ou $\varphi_\alpha(y) \in U \}$

  $= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U \} \cup \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(y) \in U \}$

  $= f(x)(U) \cup f(y)(U)$.

D'où $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$.

- $f(x \wedge y)(U) = \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x \wedge y) \in U \}$

  $= \sup \{ \alpha \in J^0 / (\varphi_\alpha(x) \wedge \varphi_\alpha(y)) \in U \}$ car φ_α endomorphisme.

  $= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U$ et $\varphi_\alpha(y) \in U \}$

  $= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U \} \cap \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(y) \in U \}$

  $= f(x)(U) \cap f(y)(U)$.

D'où $f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$.

- $f(0)(U) = \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(0) \in U \}$

  $= \sup \{ \alpha \in J^0 / 0 \in U \}$ (car φ_α conserve le 0).

  $= \sup \emptyset$

  $= 0$.

D'où $f(0) = \emptyset$.

- $f(1)(U) = \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(1) \in U \}$

  $= \sup \{ \alpha \in J^0 / 1 \in U \}$ (car φ_α conserve le 1).

  $= \sup J^0$

  $= 1$.

D'où $f(1) = X$.

Donc f est un morphisme de treillis fermé.

2) $f(\varphi_\beta(x)) = N_\beta(f(x))$.

$$f(\varphi_\beta(x)(U) = \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha\left(\varphi_\beta(x)\right) \in U \}$$
$$= \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\beta(x) \in U \}$$
$$= \begin{cases} 0 & si\ \varphi_\beta(x) \notin U; \\ 1 & si\ \varphi_\beta(x) \in U. \end{cases}$$
$$= \sigma\left(\varphi_\beta(x)\right).$$

Où σ est le monomorphisme de stone relative à X.

$$N_\beta(f(x)) = \{U \in X \ / \ f(x)(U) \geq \beta \}$$
$$= \{U \in X \ / \ f(x)(U) \in [\beta, 1]\}$$
$$= \{U \in X \ / \ \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U\} \in [\beta, 1]\}$$
$$= \{U \in X \ / \ \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U\} \geq \beta \}$$
$$= \sigma\left(\varphi_\beta(x)\right).$$

Donc $f(\varphi_\beta(x)) = N_\beta(f(x))$.

3) f injective

Montrons finalement que f est injective.

f injective $\Leftrightarrow$ Ker $f = \emptyset$.

Ker $f = \{x \in L \ / \ f(x) = \emptyset\}$.

Si $x \in$ Ker $f \Leftrightarrow f(x) = \emptyset$.

$$\Leftrightarrow f(x)(U) = 0.$$
$$\Leftrightarrow \sup \{ \alpha \in J^0 / \varphi_\alpha(x) \in U\} = 0.$$
$$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) \notin U, \forall\, U \in X, \forall\, \alpha \in J^0.$$
$$\Leftrightarrow \urcorner\varphi_\alpha(x) \in U, \forall\, U \in X.$$
$$\Leftrightarrow \urcorner\varphi_\alpha(x) \in \cap\, U.$$
$$\Leftrightarrow \urcorner\varphi_\alpha(x) = 1.$$
$$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) = 0.$$
$$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(0), \forall\, \alpha \in J^0.$$

Si $x \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow x = 0$ (Principe de détermination de Moisil).

Donc f est injective.

Par conséquent f est un monomorphisme d'algèbre de Łukasiewicz.