

CHAPITRE III- Modélisation d'un robot manipulateur

Introduction: nécessité d'un modèle

La *conception* et la *commande* des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :

- Les **modèles géométriques direct** et **inverse** qui expriment la *pose* de l'effecteur en fonction de la configuration du mécanisme et inversement
- Les **modèles cinématiques direct** et **inverse** qui expriment la *vitesse* de l'effecteur en fonction de la vitesse articulaire et inversement
- Les **modèles dynamiques** définissant les *équations du mouvement* du robot, qui permettent d'établir les relations entre les *couples* ou *forces* exercés par les actionneurs, et les positions, vitesses et accélérations des articulations

1 Modèle géométrique

Modèle géométrique direct: étant données les positions articulaires (distance resp. angle pour une articulation prismatique resp. rotoïde) trouver la pose de l'effecteur par rapport à la base

Modèle géométrique inverse: étant donnée une pose de l'effecteur par rapport à la base, trouver, si elles existent, l'ensemble de positions articulaires qui permettent de générer cette pose

• Par rapport au repère de la base $O_b-x_b y_b z_b$, le *modèle géométrique direct* est exprimé par la matrice de transformation homogène:

Procédure pour déterminer

le modèle géométrique direct:

1. Définir les repères associés à chaque segment: $0, 1, \dots, n$
2. Déterminer la transformation de coordonnées entre deux segments consécutifs $\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$
3. Déterminer, d'une façon recursive, la transformation totale entre le repère n et le repère 0 , c'est-à-dire:

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \cdots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)$$

Attention: la transformation de coordonnées effective qui décrit la pose de l'*effecteur* par rapport à la *base* est donnée par:

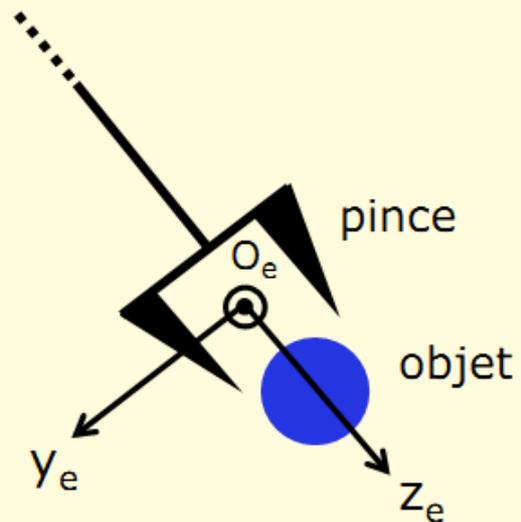
$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b \mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) \mathbf{T}_e^n$$

Matrice de transformation (*constante*) qui décrit la pose du repère 0 par rapport au repère de la base

Matrice de transformation (*constante*) qui décrit la pose du repère de l'*effecteur* par rapport au repère n

Choix du repère de la pince

Si l'*effecteur* est une **pince**, comment choisir le repère ?



- Origin O_e : au centre de la pince
- Axe z_e : direction de rapprochement de l'objet à saisir
- Axe y_e : orthogonal à z_e dans le plan de glissement des becs de la pince
- Axe x_e : orthogonal aux autres axes pour avoir un repère direct

Rappel les symboles: \odot la flèche sort de la page

\otimes la flèche entre dans la page

Procédure à suivre pour déterminer le **modèle géométrique direct**:

1. Définir les repères associés à chaque segment: $0, 1, \dots, n$

Mais:

- Comment définir les repères avec des manipulateurs complexes, avec un grand nombre d'articulations ?
- Il faut trouver une procédure **systematique** et **générale**

Solution: **Convention de Denavit-Hartenberg**

• **Convention de Denavit-Hartenberg**

Problème: déterminer les repères associés à *deux segments consecutifs* et calculer la transformation de coordonnées entre les deux repères

Notation:

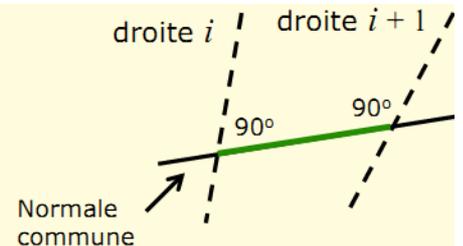
L'axe i dénote l'axe de l'articulation qui relie le segment $i - 1$ au segment i
 La convention de Denavit Hartenberg (DH) est adoptée pour définir le

repère du segment i :

1. Choisir l'axe z_i le long de l'axe de l'articulation $i + 1$
2. Placer l'origine O_i à l'intersection de l'axe z_i avec la normale commune* aux axes z_{i-1} et z_i . Placer aussi O_{i-1} à l'intersection de la normale commune avec l'axe z_{i-1}
3. Choisir l'axe x_i le long de la normal commune aux axes z_{i-1} et z_i avec sens de l'articulation i à l'articulation $i + 1$
4. Choisir l'axe y_i pour compléter la triplet d'un repère direct (on utilise la *règle de la main droite*)

***Remarque**

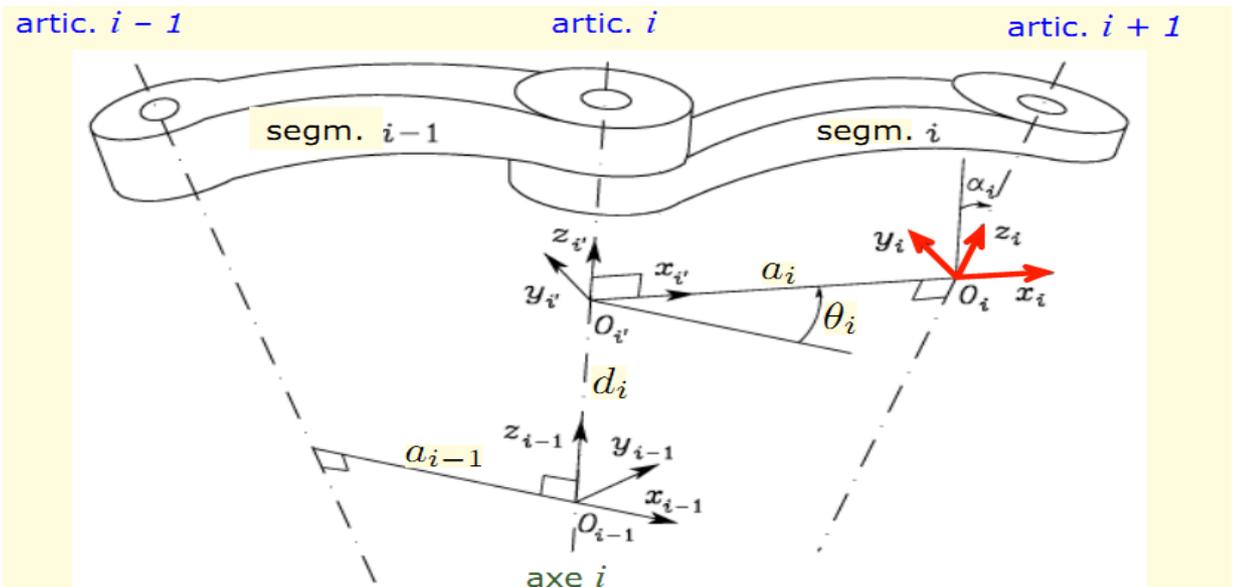
La **normale commune** entre deux droites est la droite qui contient le segment à *distance minimale* entre les deux droites



Remarque [Cas particuliers]:

La convention de DH ne donne pas une définition **unique** de repère d'un segment dans les cas suivants:

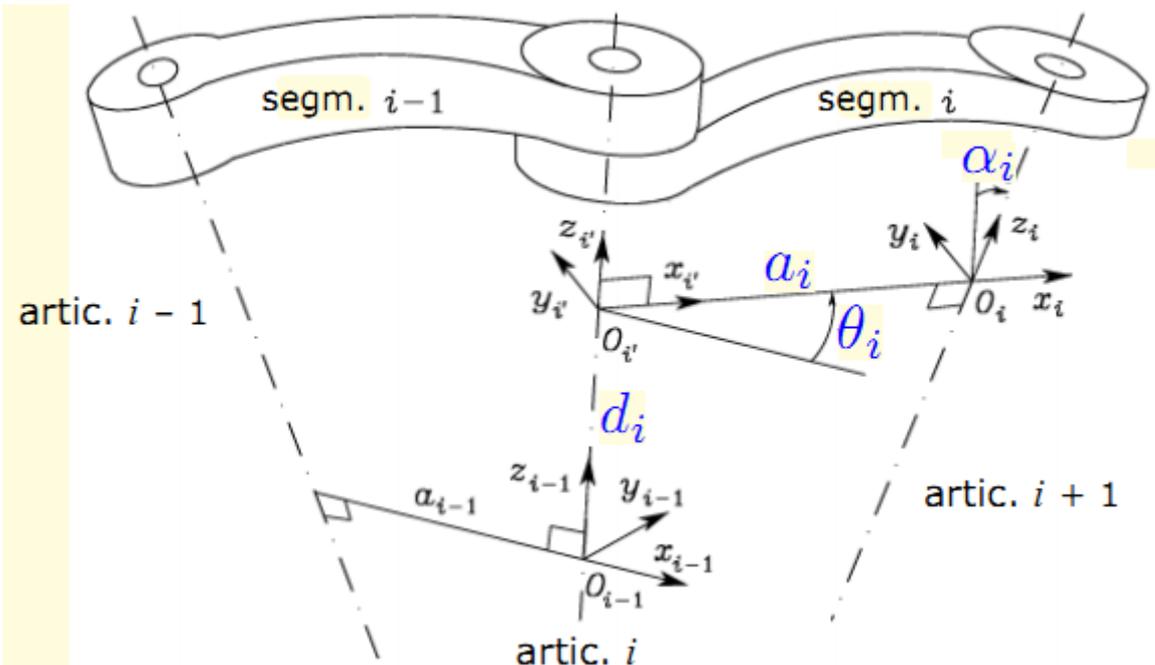
- *Pour le repère 0:* seulement la direction de l'axe z_0 est spécifiée. Par conséquent, O_0 et x_0 peuvent être choisis arbitrairement
- *Pour le repère n :* puisqu'il n'y a pas l'articulation $n + 1$, z_n n'est pas défini de manière unique, tandis que x_n doit être orthogonal à l'axe z_{n-1} . Typiquement, l'articulation n est rotoïde, et donc z_n doit être aligné avec la direction de z_{n-1}
- Si deux axes consécutifs sont *parallèles* ($\alpha_i = 0$), la normale commune entre les deux n'est pas définie de manière unique. On place O_i tel que $d_i = 0$
- Si deux axes consécutifs *se coupent* ($a_i = 0$), le sens de x_i est *arbitraire*. On place O_i à l'intersection des axes z_{i-1} et z_i
- Si l'articulation i est prismatique, la direction de z_{i-1} est *arbitraire*



Paramètres de Denavit-Hartenberg

Une fois que les repères des segments ont été fixés, la position et l'orientation du repère i par rapport au repère $i - 1$ est complètement spécifiée par les **quatre paramètres** suivantes:

- a_i : distance entre O_{i-1} et O_i ,
- d_i : coordonnée de O_i , le long de z_{i-1}
- α_i : angle entre les axes z_{i-1} et z_i autour de l'axe x_i . $\alpha_i > 0$ si la rotation est faite dans le sens *antihoraire*. $\alpha_i = 0$ si les axes sont *parallèles*
- θ_i : angle entre les axes x_{i-1} et x_i autour de l'axe z_{i-1} . $\theta_i > 0$ si la rotation est faite dans le sens *antihoraire*



- Deux des quatre paramètres (a_i and α_i) sont toujours *constants* et ils dependent que de la *géométrie* de connection des articulations consecutives définie par le segment i
- Des paramètres restants, seulement un est *variable* et depend du type d'articulation qui relie le segment $i - 1$ avec segment i . En particulier:
 - Si l'articulation i est **rotoïde**, la variable est θ_i
 - Si l'articulation i est **prismatique**, la variable est d_i

Transformation homogène de DH

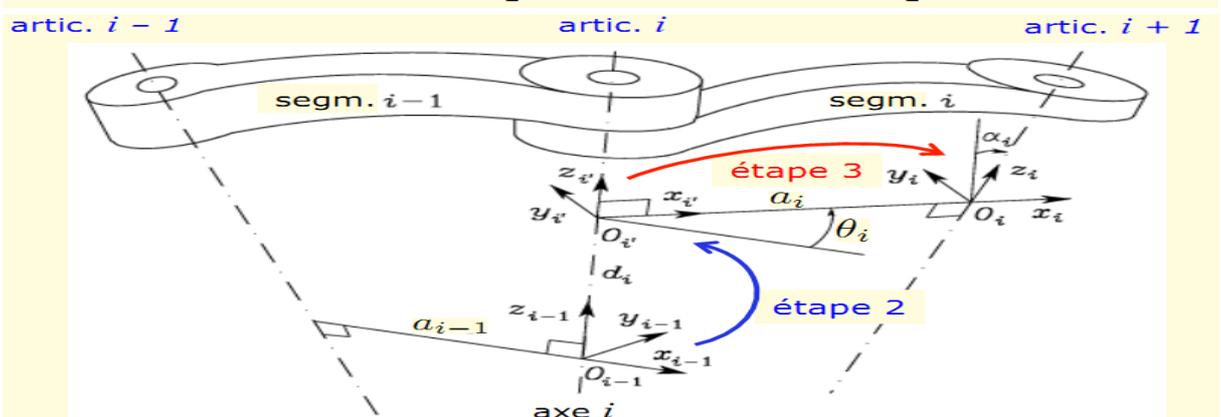
En conclusion, nous pouvons exprimer la *transformation de coordonnées* entre repère i et $i - 1$ selon les étapes suivantes:

1. Choisir un repère aligné avec le repère $i - 1$
 2. Faire un translation de d_i du repère choisi le long de l'axe z_{i-1} et faire un rotation de θ_i autour de l'axe z_{i-1}
- Cette séquence aligne le repère courant avec le repère i' et elle est décrite par la matrice homogène:

$$A_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Faire un translation du repère aligné avec le repère i' de a_i le long de l'axe $x_{i'}$ et faire un rotation de α_i autour de l'axe $x_{i'}$. Cette séquence aligne le repère courant avec le repère i et elle est décrite par la matrice homogène:

$$A_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



4. La *transformation finale* est obtenue en multipliant à droite les transformations précédentes:

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \mathbf{A}_{i'}^{i-1} \mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fonction seulement de q_i

$q_i = \theta_i$ si l'articulation est *rotoïde*

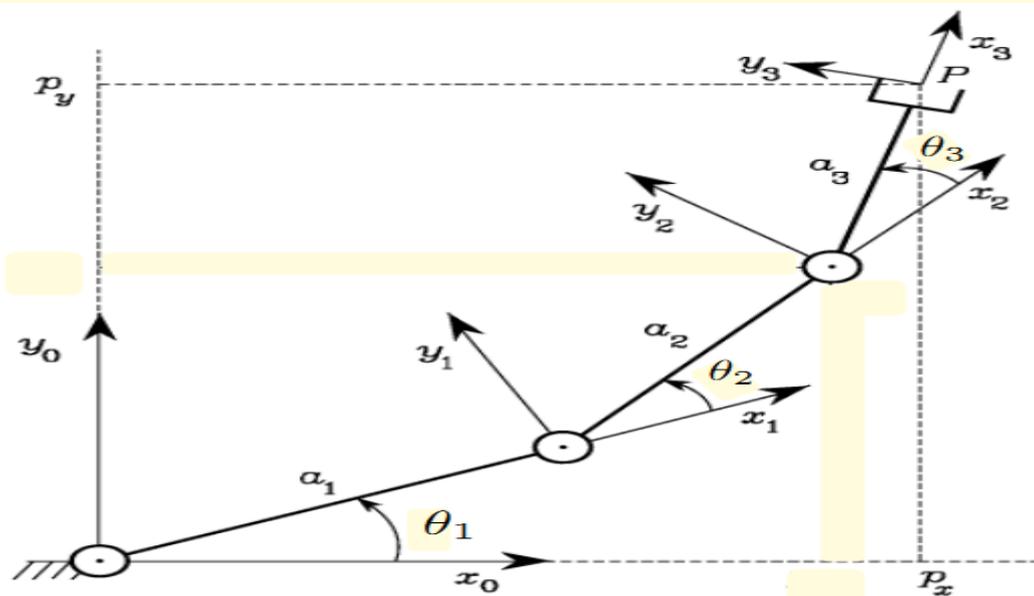
$q_i = d_i$ si l'articulation est *prismatique*

Comme d'habitude:

$c_{\theta_i} = \cos \theta_i$, $s_{\theta_i} = \sin \theta_i$

Exemples

1 - Manipulateur planaire à 3 segments



- Les axes des articulation rotoïdes sont tous *parallèles*
- Choix le plus simple des repères: axes x_i le long de la direction des segments correspondants (la direction de x_0 est arbitraire) et tous situés dans le plan (x_0, y_0)

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	0	0	θ_3

Paramètres de DH

Puisque toutes les articulations sont rotoïdes, la matrice de transformation homogène a la même structure pour chaque des trois articulations:

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & a_i \sin \theta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

- La matrice de transformation totale est donc:

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

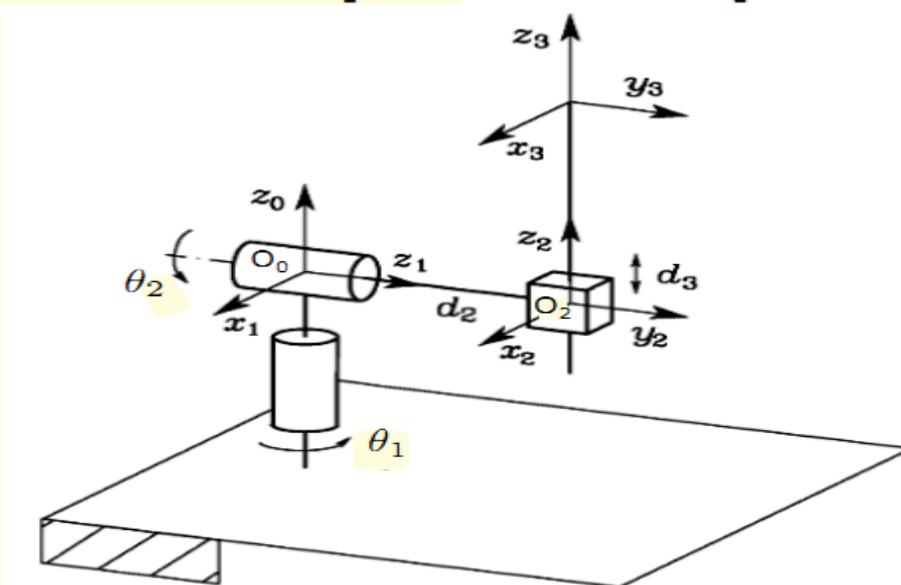
où $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ et $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

- Le repère 3 ne coïncide pas avec le *repère de l'effecteur*: en effet la direction de rapprochement de l'object à saisir est alignée avec le vecteur unitaire \mathbf{x}_3^0 et pas avec \mathbf{z}_3^0 (cf. le diaporama "Choix du repère de la pince")

Si les deux repères ont la même origine, il faut ajouter la transformation suivante (une rotation pure):

$$\mathbf{T}_e^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y(90^\circ) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 – Manipulateur sphérique



Remarques:

- L'origine du repère 0 est située à l'intersection des axes z_0 et z_1 de façon que $d_1 = 0$
- L'origine du repère 2 est située à l'intersection des axes z_1 et z_2

Segment	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	d_2^*	θ_2
3	0	0	d_3	0

Tableau des paramètres de DH (* : d_2 n'est pas une variable)

Nous avons *deux articulations rotoïdes* et une *articulation prismatique*, donc il faut déterminer trois matrices de transformation

La 1ère transformation est:

$$\mathbf{A}_1^0(\theta_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\theta_1)\mathbf{R}_x(-\pi/2) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maintenant, $a_2 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$, $d_2 \neq 0$ et $\theta_2 \neq 0$ (2ème ligne du tableau de DH):

$$\mathbf{A}_2^1(\theta_2) = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ \mathbf{R}_z(\theta_2)\mathbf{R}_x(\pi/2) & & & 0 \\ & & d_2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enfin, $a_3 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $d_3 \neq 0$ et $\theta_3 = 0$ (3ème ligne du tableau):

$$\mathbf{A}_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ \mathbf{I}_3 & & & 0 \\ & & & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 \leftarrow$$

Évidemment, la 3ème articulation n'a pas d'influence sur l'orientation de l'effecteur

Conclusion:

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{z}}_2 \leftarrow$$

où $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, d_3]^T$ et $c_1 = \cos \theta_1$, $s_1 = \sin \theta_1$

Remarques:

- L'orientation du vecteur unitaire \mathbf{y}_3^0 est déterminée uniquement par la 1ère articulation, car l'axe de la 2ème articulation \mathbf{z}_1 est parallèle à l'axe \mathbf{y}_3
- Dans le manipulateur sphérique, le repère 3 peut représenter le repère d'un effecteur, autrement dit $\mathbf{T}_e^3 = \mathbf{I}_4$

• Modèle géométrique inverse

Problème direct

Si les variables des articulations sont connues, la pose de l'effecteur peut être calculée d'une **manière unique** en utilisant la matrice de transformation homogène:

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \cdots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)$$

Problème inverse

Il s'agit de déterminer les coordonnées articulaires permettant d'obtenir une situation désirée pour l'effecteur

Problème beaucoup plus difficile pour les raisons suivantes:

1. Les équations à résoudre sont, en général, **non linéaires**.
En conséquence, il n'est pas toujours possible de trouver une solution de **forme fermée** (c'est-à-dire, une solution explicite)
2. Le problème peut avoir des **solutions multiples**
3. Le problème peut avoir un **nombre infini de solutions** (par ex. pour des robots cinématiquement redondants)
4. Le problème peut n'avoir **aucune solution admissible** à cause de la structure cinématique du manipulateur

Solutions multiples

- Ça dépend du *nombre de DDL* du robot mais aussi du *nombre de paramètres de DH* qui sont différents de zéro
- En général, plus le nombre de paramètres de DH différents de zéro est grand, plus le nombre des solutions admissibles est grand
- Pour un manipulateur à 6 DDL sans des *butées mécaniques* sur les articulations, il y a, en général, **16 solutions admissibles**. On a donc besoin de trouver des critères pour choisir parmi ces solutions admissibles
- La présence de *butées mécaniques* sur les articulations des robots réels peut, éventuellement, *réduire* le nombre de solutions multiples admissibles

Solutions de forme fermée

Pour trouver des solutions de forme fermée est nécessaire de la:

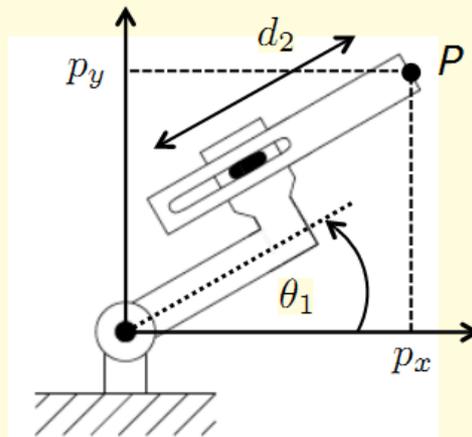
- *Intuition algébrique* pour trouver les équations significatives qui contiennent les inconnues
- ou
- *Intuition géométrique* pour trouver des points significatifs sur le robot que peuvent être utilisés pour exprimer la position et/ou orientation en fonction du nombre des inconnues

Solutions numériques

Lorsque il n'y a pas des solutions de forme fermée ou elles sont difficiles à déterminer, on peut calculer une solution particulière du problème inverse par des *procédures numériques* (méthodes itératives d'optimisation non linéaire ou l'algorithme de Levenberg-Marquardt)

- *Avantage*: on peut appliquer les méthodes numériques à tous les robots
- *Inconvénients*: les méthodes numériques ne trouvent pas, en général, *toutes* les solutions admissibles. Ils trouvent une solution locale au sens où elle dépend des *conditions initiales*. Ces méthodes sont pénalisantes du point de vue du *temps de calcul*

Exemple 1: robot planaire à 2 segments (RP)



Problème

$[p_x, p_y]^T$ donné.

$\mathbf{q} = [\theta_1, d_2]^T$?

On a le modèle géométrique direct suivant:

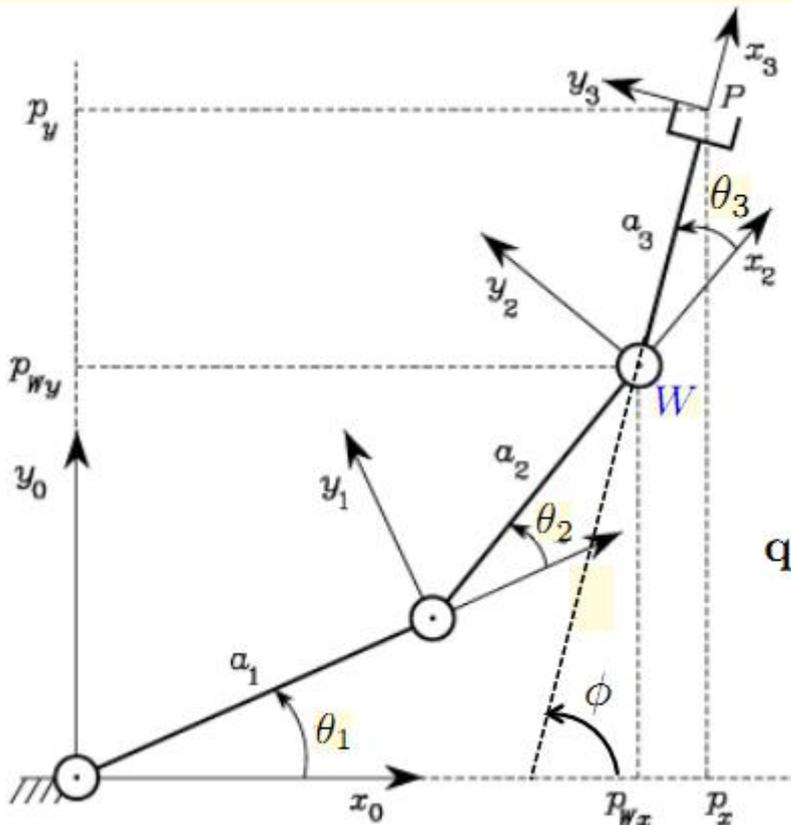
$$p_x = d_2 \cos \theta_1$$

$$p_y = d_2 \sin \theta_1$$

Une démarche analytique simple permet de déterminer le modèle géométrique inverse. En effet, nous avons que :

$$\theta_1 = \arctan(p_y/p_x), \quad d_2 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Exemple 2: manipulateur planaire à 3 segments



$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$?

Problème: étant données la position et l'orientation de l'effecteur, déterminer les variables $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ des trois articulations rotoïdes

- On a déjà vu que la matrice de transformation totale pour ce manipulateur est (cf. la première partie du Ch. 3.1):

$$\mathbf{T}_3^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ et $c_1 = \cos \theta_1$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

- Il convient de spécifier la position et orientation de l'effecteur en utilisant un **nombre minimal de paramètres**

- On peut utiliser les coordonnées p_x, p_y et l'angle ϕ entre l'effecteur et l'axe x_0 :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Élément (1,4) de } \mathbf{T}_3^0 \\ \leftarrow \text{Élément (2,4) de } \mathbf{T}_3^0 \\ \leftarrow \text{Somme des variables} \\ \text{articulaires} \end{array}$$

1 - Solution algébrique

Si ϕ est spécifié, la 1ère équation du système à résoudre est:

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

En revanche si ϕ n'est pas spécifié, le manipulateur est redondant et il y a un *nombre infini de solutions* au problème inverse

- À partir du modèle direct, on trouve que:

$$\left. \begin{array}{l} p_{W_x} = p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ p_{W_y} = p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Position du point } W \\ \text{(origine du repère 2)} \end{array}$$

- On calcule le carré des deux expressions précédentes et on les additionne:

$$p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2$$

Donc

$$c_2 = \frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}$$

- Pour avoir une solution admissible, il faut que:

$$-1 \leq c_2 \leq 1$$

- Donc, on impose

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

où le signe est "+" correspond à la posture "coude en bas" et le signe "-" à la posture "coude en haut" du robot

- En conséquence:

$$\theta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

- Maintenant, il faut déterminer θ_1 . Si on substitue l'expression de θ_2 trouvée, dans les équations de p_{W_x} , p_{W_y} , on obtient un système de deux équations à deux inconnues, s_1 , s_2 , avec solution:

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{W_y} - a_2 s_2 p_{W_x}}{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}$$

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{W_x} + a_2 s_2 p_{W_y}}{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}$$

Par conséquent: $\theta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1)$

- Enfin, pour trouver l'angle θ_3 on peut utiliser l'équation:

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

Remarque:

Si $s_2 = 0$ on a que $\theta_2 \in \{0, \pi\}$: dans cette posture le manipulateur est dans une **singularité cinématique**. On peut déterminer encore θ_1 **d'une manière unique** sauf si $a_1 = a_2$ et on requiert que $p_{W_x} = p_{W_y} = 0$

2 - Solution géométrique

- On utilise encore les trois équations:

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$p_{W_x} = p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$p_{W_y} = p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

2 - Solution géométrique

- Si on applique le *théorème d'Al-Kashi* (ou loi des cosinus) au triangle rouge en figure, on obtient:

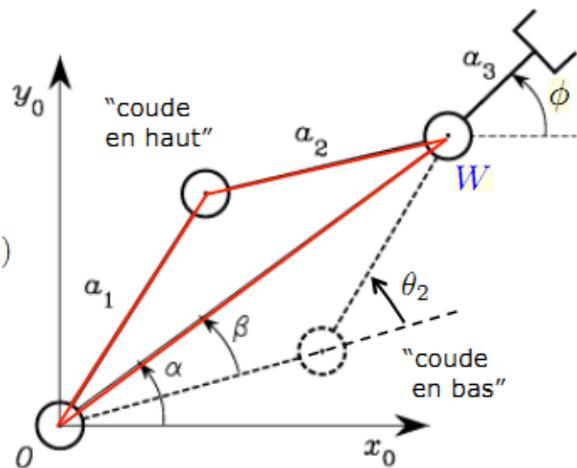
$$p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos(\pi - \theta_2)$$

- En effet, on a deux configurations possibles du triangle (voir le trait pointillé noir en figure)
- Car $\cos(\pi - \theta_2) = -\cos \theta_2$, nous avons:

$$c_2 = \frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2}$$

- Pour l'existence d'un triangle, il faut que:

$$\sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \leq a_1 + a_2$$



- Sous cette condition:

$$\theta_2 = \pm \arccos(c_2)$$

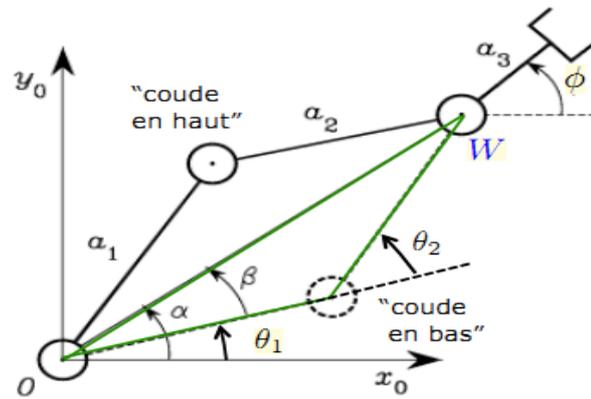
2 - Solution géométrique

- La posture "coude en bas" est obtenue avec $\theta_2 \in (0, \pi)$
- La posture "coude en haut" est obtenue avec $\theta_2 \in (-\pi, 0)$
- Pour déterminer θ_1 , il faut considérer les angles α et β en figure
- La valeur de α dépend du signe de p_{W_x} , p_{W_y} . Il faut donc calculer α comme:

$$\alpha = \text{Atan2}(p_{W_y}, p_{W_x})$$

- Pour trouver β , nous appliquons encore la loi des cosinus au triangle vert, ce qui nous donne l'équation:

$$a_2^2 = p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 + a_1^2 - 2a_1 \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} \cos \beta \implies c_\beta \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2} = a_1 + a_2 c_2$$



2 - Solution géométrique

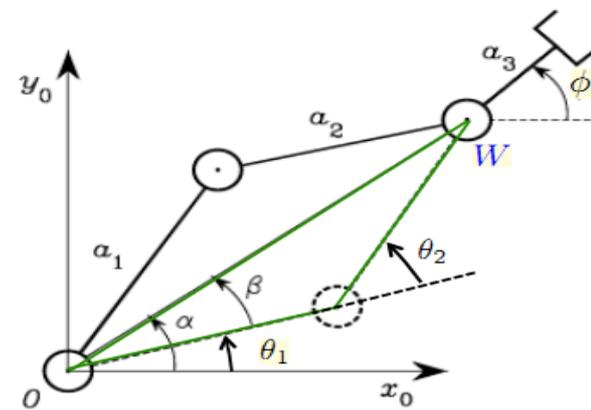
- Si on utilise l'expression de c_2 trouvée auparavant, on trouve

$$\beta = \arccos \left(\frac{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 \sqrt{p_{W_x}^2 + p_{W_y}^2}} \right)$$

avec $\beta \in (0, \pi)$ pour garantir encore l'existence du triangle

- Donc, $\theta_1 = \alpha \pm \beta$ où le signe est "+" pour $\theta_2 < 0$ et "-" pour $\theta_2 > 0$
- Enfin pour trouver θ_3 , on utilise à nouveau l'équation:

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$



Solutions de forme fermée: considérations générales

- La plupart des manipulateurs existant sont *cinématiquement simples*
- En effet ils sont typiquement composés d'un *porteur* et d'un *poignet de type rotule* (avec un poignet de type rotule, le point W est choisi à l'intersection des trois axes des articulations rotoïdes)
- Ce choix est motivé par la difficulté à déterminer des solutions du problème inverse dans le *cas général*
- En particulier, un **manipulateur à 6 DDL** a des solutions de forme fermée du problème inverse si une des conditions suivantes est satisfaite:
 - Les axes de trois articulations rotoïdes consecutives se croisent en un seul point (trois axes concourants), comme dans le cas du poignet de type rotule
 - Les axes de trois articulations rotoïdes consecutives sont parallèles