

### 3. Modèle dynamique

- Le *modèle dynamique* d'un manipulateur est important pour:
  - La simulation du mouvement
  - Analyser la structure d'un robot
  - Le projet des algorithmes de contrôle
- Il y a deux méthodes pour déterminer les équations du mouvement d'un manipulateur dans l'*espace articulaire*:
  1. La méthode basée sur la **formulation de Lagrange**
    - Conceptuellement *simple* et *systématique*
  2. La méthode basée sur la **formulation de Newton-Euler** (on trouve la résultante des forces qui s'exercent sur un segment générique du manipulateur)
    - Elle produit un modèle de *façon récursive*
    - Plus avantageuse du *point de vue computationnel* que la formulation de Lagrange
- Comme pour le modèle géométrique et cinématique, on peut définir:
  - Un *problème dynamique direct*
  - Un *problème dynamique inverse*

**Modèle dynamique** : il fournit une description de la relation entre les *couples* des actionneurs sur les articulations d'un manipulateur et le *mouvement de la structure*

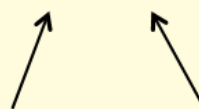
- Avec la formulation de Lagrange les équations du mouvement peuvent être déterminées d'une façon *systématique* et *indépendamment* du référentiel que on a choisi
- Lorsque les variables:

$q_i, i \in \{1, \dots, n\}$  : "coordonnées généralisées"

## formulation de Lagrange

ont été fixées (elles décrivent la position des segments d'un manipulateur à  $n$  DDL), le **lagrangien**  $\mathcal{L}$  du système peut être défini en fonction des coordonnées généralisées de la manière suivante:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$



**Énergie cinétique totale**

**Énergie potentielle totale**

- Les **équations de Lagrange** (ou d'Euler-Lagrange) sont exprimées par:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \xi_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

où

$\xi_i$  est la *force généralisée* associée à la coordonnée généralisée  $q_i$

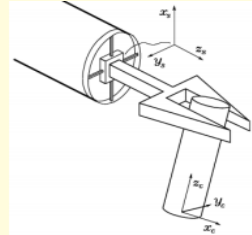
- Sous une forme compacte, nous pouvons réécrire les  $n$  équations de Lagrange comme:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \boldsymbol{\xi}$$

où, pour un manipulateur (à chaîne ouverte), les coordonnées généralisées sont réunies dans le *vecteur des variables articulaires*  $\mathbf{q}$

- Les contributions aux forces généralisées sont données par les *forces non-conservatives* dans le système:

- Les couples des actionneurs sur les articulations
- Les forces de frottement sur les articulations
- Les couples sur les articulations générés par les forces de contact de l'effecteur avec l'environnement



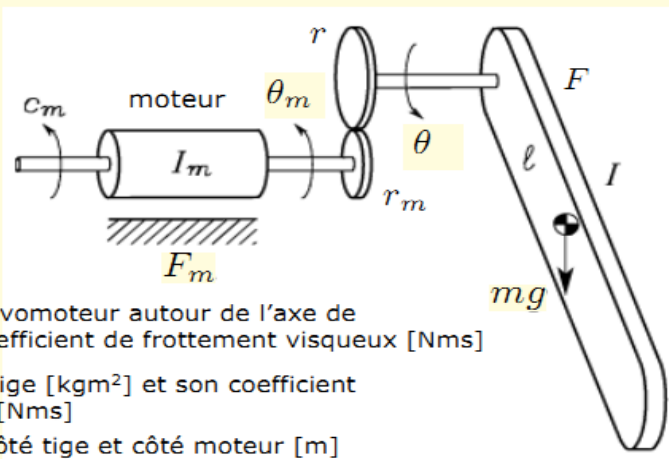
- Les équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \xi_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

nous fournissent une relation entre les *forces généralisées*  $\xi_i$  appliquées au manipulateur, et les *positions, vitesses et accélérations* des variables articulaires, c'est-à-dire  $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, i \in \{1, \dots, n\}$

- Ces équations nous permettent de déterminer le modèle dynamique d'un robot à partir de l'*énergie cinétique et potentielle* du système

**Exemple** [Pendule inversé rigide actionné par un moteur électrique]



$l$  : longueur de la tige [m]

$I_m, F_m$  : moment d'inertie du servomoteur autour de l'axe de rotation [ $\text{kgm}^2$ ] et son coefficient de frottement visqueux [Nms]

$I, F$  : moment d'inertie de la tige [ $\text{kgm}^2$ ] et son coefficient de frottement visqueux [Nms]

$r, r_m$  : rayon des engrenages côté tige et côté moteur [m]

$r = r/r_m$  : rapport de transmission des engrenages

$\theta, \theta_m$  : position angulaire de l'axe du moteur et de l'axe de la tige (si  $\theta = 0$ , la tige pointe vers le bas)

$m, g$  : masse de la tige [kg] et accélération de la pesanteur ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

$c_m$  : couple engendrée par le moteur [Nm]

Si on choisit  $\theta$  comme *coordonnée généralisée*, l'**énergie cinétique** du système est ( $\dot{\theta}_m = k_r \dot{\theta}$ ):

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_m k_r^2 \dot{\theta}^2$$

En outre, l'**énergie potentielle** du système (définie à une constante près) est:

$$\mathcal{U} = m g \ell (1 - \cos \theta)$$

Le **lagrangien** du système est donc:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_m k_r^2 \dot{\theta}^2 - m g \ell (1 - \cos \theta)$$

Si on utilise cette expression dans l'équation de Lagrange suivante (nous avons *une seule* coordonnée généralisée, l'angle  $\theta$ ):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \xi$$

on trouve:

$$(I + I_m k_r^2) \ddot{\theta} + m g \ell \sin \theta = \xi$$

La *force généralisée*  $\xi$  est donnée par plusieurs contributions: la couple d'actionnement au côté tige  $\tau$  et les couples de frottement visqueux  $-F \dot{\theta}$ ,  $-F_m k_r^2 \dot{\theta}$  (la deuxième couple a été reportée au côté tige). En conclusion:

$$\xi = \tau - F \dot{\theta} - F_m k_r^2 \dot{\theta}$$

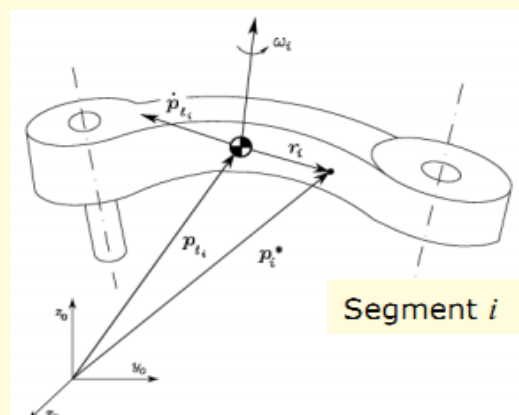
### Conclusion:

Nous avons ainsi trouvé le **modèle dynamique complet** du système, sous la forme d'une *équation différentielle ordinaire du second ordre*:

$$(I + I_m k_r^2) \ddot{\theta} + (F + F_m k_r^2) \dot{\theta} + m g \ell \sin \theta = \tau$$

### Prochaine étape:

Calculer l'*énergie cinétique* et l'*énergie potentielle* d'un manipulateur générique à *n segments rigides*, pour trouver son modèle dynamique ("les équations du mouvement") avec la formulation de Lagrange



**Objectif:** déterminer le modèle dynamique d'un manipulateur à  $n$  segments rigides en utilisant la *formulation de Lagrange*

Pour déterminer le **lagrangien**  $\mathcal{L}$ , il faut calculer l'**énergie cinétique totale** et l'**énergie potentielle totale** du manipulateur:

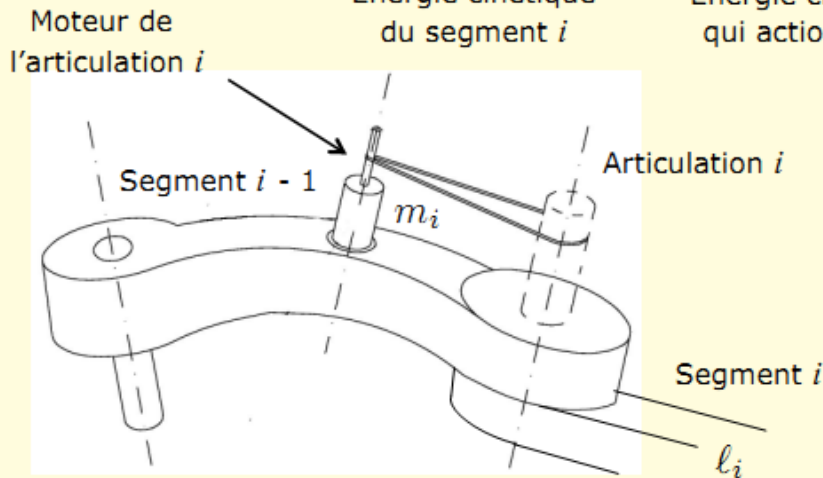
$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$

### Modèle dynamique d'un robot: énergie cinétique

L'énergie cinétique totale est donnée par la somme des contributions relatives au mouvement de chaque *segment* et au mouvement de l'*actionneur* de chaque articulation (le segment 0 est fixé et ne donne aucune contribution):

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n (\mathcal{T}_{\ell_i} + \mathcal{T}_{m_i})$$

$\mathcal{T}_{\ell_i}$ : Énergie cinétique du segment  $i$   
 $\mathcal{T}_{m_i}$ : Énergie cinétique du moteur qui actionne l'articulation  $i$



On peut montrer que:

$$\mathcal{T}_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_P^{(\ell_i)})^T \mathbf{J}_P^{(\ell_i)} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_O^{(\ell_i)})^T \mathbf{R}_i \mathbf{I}_{\ell_i}^i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_O^{(\ell_i)} \dot{\mathbf{q}}$$

où

$m_{\ell_i}$ : masse du segment  $i$

$\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ : vecteur des vitesses des variables articulaires

$\mathbf{R}_i$ : matrice de rotation entre le repère du segment  $i$  et le repère de la base

$\mathbf{I}_{\ell_i}^i$ : tenseur d'inertie relatif au centre de masse du segment  $i$  exprimé dans le repère du segment (matrice  $3 \times 3$  symétrique)

$$\mathbf{J}_P^{(\ell_i)} = [\mathbf{J}_{P1}^{(\ell_i)} \cdots \mathbf{J}_{Pi}^{(\ell_i)} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{3 \times n} \quad : \text{matrices jacobiennes}$$

$$\mathbf{J}_O^{(\ell_i)} = [\mathbf{J}_{O1}^{(\ell_i)} \cdots \mathbf{J}_{Oi}^{(\ell_i)} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{3 \times n}$$

où

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Pj}^{(\ell_i)} \\ \mathbf{J}_{Oj}^{(\ell_i)} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation est prismatique} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1} \times (\mathbf{p}_{\ell_i} - \mathbf{p}_{j-1}) \\ \mathbf{z}_{j-1} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation est rotoïde} \end{cases}$$

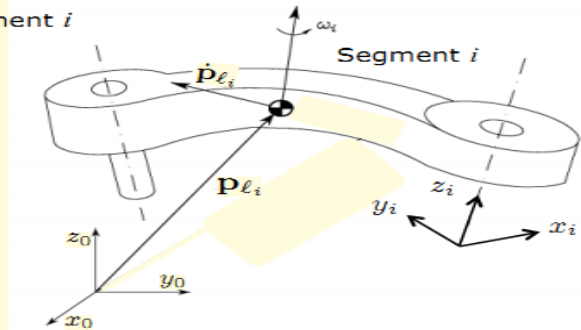
$$\begin{bmatrix} J_{P_j}^{(\ell_i)} \\ J_{O_j}^{(\ell_i)} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation est prismatique} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1} \times (\mathbf{p}_{\ell_i} - \mathbf{p}_{j-1}) \\ \mathbf{z}_{j-1} \end{bmatrix} & \text{si l'articulation est rotoïde} \end{cases}$$

où

$\mathbf{p}_{j-1}$  : vecteur de position de l'origine du repère  $j - 1$  par rapport au repère de la base

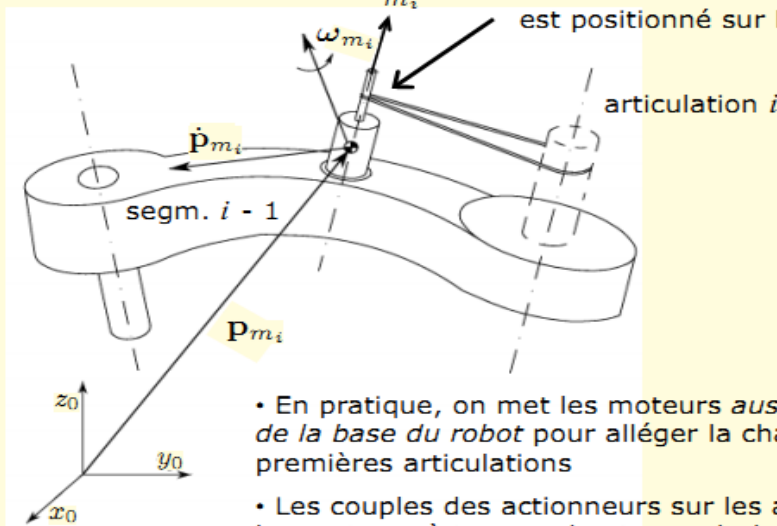
$\mathbf{p}_{\ell_i}$  : position du centre de masse du segment  $i$  par rapport au repère de la base

$\mathbf{z}_{j-1}$  : vecteur unitaire de l'axe  $z$  du repère  $j - 1$



Pour la contribution du *moteur* qui actionne l'articulation  $i$  (un moteur électrique rotatif standard), on trouve une expression similaire pour l'énergie cinétique

On suppose que le moteur de l'articulation  $i$  est positionné sur le segment  $i - 1$



- En pratique, on met les moteurs *aussi près que possible de la base du robot* pour alléger la charge dynamique des premières articulations
- Les couples des actionneurs sur les articulations sont fournis par les moteurs à travers des *transmissions mécaniques* (engrenages)

$$\mathcal{T}_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_P^{(m_i)})^T \mathbf{J}_P^{(m_i)} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_O^{(m_i)})^T \mathbf{R}_{m_i} \mathbf{I}_{m_i}^m \mathbf{R}_{m_i}^T \mathbf{J}_O^{(m_i)} \dot{\mathbf{q}}$$

où

$m_{m_i}$  : masse du rotor du moteur  $i$

$\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  : vecteurs des vitesses des variables articulaires

$\mathbf{R}_{m_i}$  : matrice de rotation (entre le repère du moteur  $i$  et le repère de la base)

$\mathbf{I}_{m_i}^m$  : tenseur d'inertie du rotor du moteur  $i$  par rapport à son centre de masse (matrice  $3 \times 3$  symétrique)

$$\mathbf{J}_P^{(m_i)} = [\mathbf{J}_{P_1}^{(m_i)} \quad \dots \quad \mathbf{J}_{P_{i-1}}^{(m_i)} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{3 \times n} : \text{matrice jacobienne}$$

où

$$\mathbf{J}_{P_j}^{(m_i)} = \begin{cases} \mathbf{z}_{j-1} & \text{si l'articulation est prismatique} \\ \mathbf{z}_{j-1} \times (\mathbf{p}_{m_i} - \mathbf{p}_{j-1}) & \text{si l'articulation est rotoïde} \end{cases}$$

$\mathbf{p}_{m_i}$  est la position du centre de masse du rotor (par rapport au repère de la base).  $\mathbf{p}_{j-1}$  et  $\mathbf{z}_{j-1}$  sont définis comme dans le cas précédent

$$\mathcal{T}_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_P^{(m_i)})^T \mathbf{J}_P^{(m_i)} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{J}_O^{(m_i)})^T \mathbf{R}_{m_i} \mathbf{I}_{m_i}^T \mathbf{R}_{m_i}^T \mathbf{J}_O^{(m_i)} \dot{\mathbf{q}}$$

Enfin:

$$\mathbf{J}_O^{(m_i)} = [\mathbf{J}_{O1}^{(m_i)} \cdots \mathbf{J}_{O,i-1}^{(m_i)} \mathbf{J}_{O,i}^{(m_i)} \mathbf{0} \cdots \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{3 \times n} : \text{matrice jacobienne}$$

où

$$\mathbf{J}_{Oj}^{(m_i)} = \begin{cases} \mathbf{J}_{Oj}^{(\ell_i)} & \text{si } j \in \{1, \dots, i-1\} \\ k_{ri} \mathbf{z}_{m_i} & \text{si } j = i \end{cases}$$

$k_{ri}$  : rapport de transmission des engrenages du moteur  $i$   
(on suppose une *transmission rigide*)

$\mathbf{z}_{m_i}$  : vecteur unitaire le long de l'axe du rotor du moteur  $i$

En effet:  $\omega_{m_i} = \omega_{i-1} + k_{ri} \dot{q}_i \mathbf{z}_{m_i}$  où  $\omega_{m_i}$  est la vitesse angulaire totale du rotor et  $\omega_{i-1}$  la vitesse angulaire du segment  $i-1$  (où le moteur se trouve)

En conclusion, l'énergie cinétique totale du robot est donnée par la forme quadratique suivante:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

où

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \left( m_{\ell_i} (\mathbf{J}_P^{(\ell_i)})^T \mathbf{J}_P^{(\ell_i)} + (\mathbf{J}_O^{(\ell_i)})^T \mathbf{R}_i \mathbf{I}_{\ell_i}^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_O^{(\ell_i)} + m_{m_i} (\mathbf{J}_P^{(m_i)})^T \mathbf{J}_P^{(m_i)} + (\mathbf{J}_O^{(m_i)})^T \mathbf{R}_{m_i} \mathbf{I}_{m_i}^T \mathbf{R}_{m_i}^T \mathbf{J}_O^{(m_i)} \right)$$

est la **matrice d'inertie** du manipulateur

**Propriétés de la matrice d'inertie:**

- $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  est une matrice  $n \times n$  symétrique ( $\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}^T(\mathbf{q})$ )
- $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  est définie positive ( $\mathbf{z}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{z} > 0, \forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ )
- $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  depend, en général, de la configuration  $\mathbf{q}$  du robot

## Modèle dynamique d'un robot: énergie potentielle

L'énergie potentielle totale stockée dans le robot est donnée par la somme des contributions relatives aux *segments* et aux *actionneurs* de chaque articulation:

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n (\mathcal{U}_{\ell_i} + \mathcal{U}_{m_i})$$

↑ Segment  $i$ 
↑ Moteur  $i$

On peut montrer que:

$$\mathcal{U} = - \sum_{i=1}^n (m_{\ell_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{\ell_i} + m_{m_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{m_i})$$

où  $\mathbf{g}_0$  est le vecteur de l'accélération de la pesanteur par rapport au repère de la base (par ex.  $\mathbf{g}_0 = [0, 0, -g]^T$  si  $z$  est l'axe vertical)

Remarque:

L'énergie potentielle est une fonction des variables articulaires  $\mathbf{q}$  (à travers  $\mathbf{p}_{\ell_i}, \mathbf{p}_{m_i}$ ) mais **elle n'est pas** une fonction des vitesses articulaires  $\dot{\mathbf{q}}$

### Modèle dynamique d'un robot: le lagrangien

- On peut maintenant écrire le **lagrangien** du robot:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q})$$

- Si on calcule les dérivées requises par l'équation (vectorielle) de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \boldsymbol{\xi}$$

on trouve l'équations du mouvement:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\xi}$$

où le vecteur

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) \right)^T + \left( \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T$$

- Il reste à trouver le vecteur des *forces généralisées*  $\boldsymbol{\xi}$

- Les **forces non-conservatives** à l'œuvre sur les articulations du robot sont:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e$$

Couples des  $n$  actionneurs ("commande")  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$   
 Couples de frottement visqueux  $\mathbf{F}_v$ : matrice diagonale  $n \times n$  des coefficients de frottement visqueux  
 Couples de frottement statique  
 Couples générées sur les articulations du robot par le contact de l'effecteur avec environnement

- On peut utiliser les couples du *frottement de Coulomb* comme modèle simplifié des couples de frottement statique:

où 
$$\mathbf{f}_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \simeq \mathbf{F}_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})$$

$\mathbf{F}_s$ : matrice diagonale  $n \times n$

$\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) = [\text{sgn}(\dot{q}_1), \dots, \text{sgn}(\dot{q}_n)]^T$ : signe des composantes du vecteur des vitesses articulaires

En conclusion, on peut réécrire les équations du mouvement comme:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_e$$

Il représente le *modèle dynamique du robot dans l'espace articulaire*

où

$g_i(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ : moment généré sur l'axe de l'articulation  $i$  par la présence de la pesanteur, dans la configuration courante

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ : matrice  $n \times n$  des forces centrifuges et de Coriolis (*non-unique*)

$\mathbf{h}_e$ : vecteur des forces et moments exercés par l'effecteur sur l'environnement

$\mathbf{J}(\mathbf{q})$ : jacobien géométrique du robot

Remarque:

La matrice  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  est *antisymétrique*, c'est-à-dire:

$$-\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{N}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

## Exemple: robot cartésien à 2 segments

$\mathbf{q} = [d_1, d_2]^T$  : vecteur des coordonnées généralisées

$m_{\ell_1}, m_{\ell_2}$  : masses des deux segments

$m_{m_1}, m_{m_2}$  : masses des rotors des moteurs sur les deux articulations

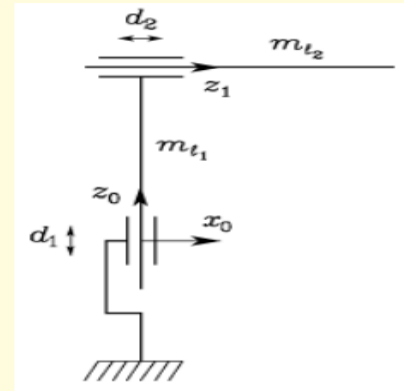
$I_{m_1}, I_{m_2}$  : moments d'inertie par rapport aux axes des deux rotors

**Hypothèse simplificatrice:**

$$\mathbf{p}_{m_i} = \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{z}_{m_i} = \mathbf{z}_{i-1}, i \in \{1, 2\}$$

c'est-à-dire, les moteurs sont positionnés sur les axes des articulations avec les centres de masse situés aux origines des repères correspondantes

Noter que:  $\mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$ ,  $\mathbf{z}_1 = [1, 0, 0]^T$



• On trouve que les matrices jacobiennes (segments):

$$\mathbf{J}_P^{(\ell_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_P^{(\ell_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Évidemment, nous n'avons pas de contributions des vitesses angulaires pour les deux segments

• En outre (moteurs):

$$\mathbf{J}_P^{(m_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_P^{(m_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_O^{(m_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ k_{r1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_O^{(m_2)} = \begin{bmatrix} 0 & k_{r2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où  $k_{ri}$  est le rapport de transmission du moteur  $i$

• La matrice d'inertie est:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} m_{\ell_1} + m_{m_2} + k_{r1}^2 I_{m_1} + m_{\ell_2} & 0 \\ 0 & m_{\ell_2} + k_{r2}^2 I_{m_2} \end{bmatrix}$$

Elle est une matrice *diagonale constante* (elle ne dépend pas de la configuration du robot  $\mathbf{q} = [d_1, d_2]^T$ )

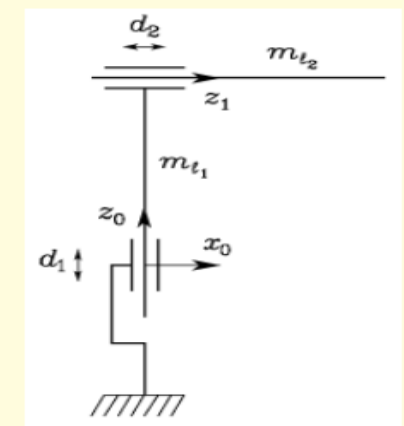
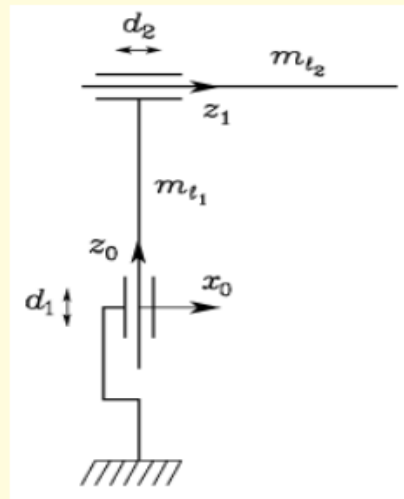
• Cela implique aussi que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{0}_{2 \times 2}$$

c'est-à-dire, nous n'avons pas de contributions des forces centrifuges et de Coriolis

• Pour le vecteur des moments, car  $\mathbf{g}_0 = [0, 0, -g]^T$ :

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial d_1}, \frac{\partial U}{\partial d_2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (m_{\ell_1} + m_{m_2} + m_{\ell_2})g \\ 0 \end{bmatrix}$$





En l'absence de *frottements* et de *forces sur l'effecteur*, le **modèle dynamique** est:

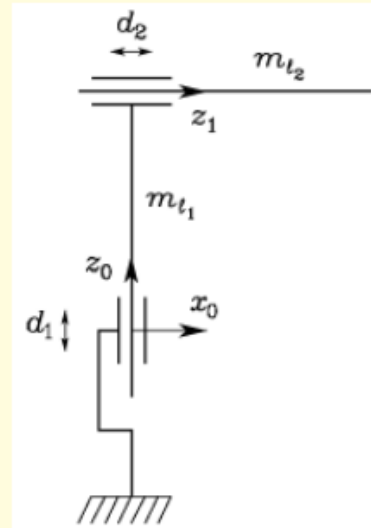
$$\begin{aligned} (m_{\ell_1} + m_{m_2} + k_{r_1}^2 I_{m_1} + m_{\ell_2}) \ddot{d}_1 + (m_{\ell_1} + m_{m_2} + m_{\ell_2}) g &= \tau_1 \\ (m_{\ell_2} + k_{r_2}^2 I_{m_2}) \ddot{d}_2 &= \tau_2 \end{aligned}$$

où

$\tau_1, \tau_2$  sont les forces appliquées sur les deux articulations du robot (les variables de commande du robot)

#### Remarque:

- Les dynamiques sont complètement *découplées*. Cela est une conséquence de la structure cartésienne et de la géométrie particulière du manipulateur
- En effet, si le deuxième segment n'était pas perpendiculaire au premier segment, la matrice d'inertie  $B$  ne serait pas diagonale



## Problème dynamique direct et inverse

### Problème dynamique direct

Déterminer pour  $t > t_0$ , les accélérations articulaires  $\ddot{q}(t)$  (et ainsi  $\dot{q}(t), q(t)$ ) qui résultent des couples appliqués aux articulations  $\tau(t)$ , et éventuellement des forces appliquées à l'effecteur  $\mathbf{h}_e(t)$ , lorsque  $q(t_0), \dot{q}(t_0)$  sont connus (à savoir l'état initial du système est donné)

### Problème dynamique inverse

Déterminer les couples sur les articulations  $\tau(t)$  qui sont nécessaires pour générer le mouvement spécifié par les accélérations, vitesses et positions  $\ddot{q}(t), \dot{q}(t), q(t)$  des articulations, lorsque les forces sur l'effecteur  $\mathbf{h}_e(t)$  (si elles existent), sont connues

#### Remarque:

- La résolution du *problème dynamique direct* est utile pour *simuler le comportement d'un robot*
  - Nombre d'opérations nécessaires pour calculer la dynamique directe d'un robot à  $n$  articulations:  $\mathcal{O}(n^2)$
- La résolution du *problème dynamique inverse* est utile pour la *planification de trajectoire* d'un robot et pour la *mise en oeuvre des algorithmes de contrôle*
  - Nombre d'opérations nécessaires pour calculer la dynamique inverse d'un robot à  $n$  articulations:  $\mathcal{O}(n)$