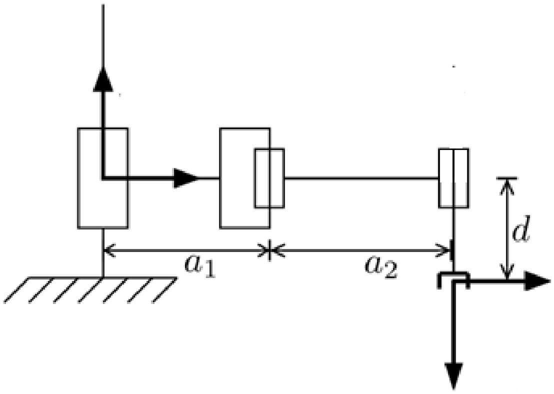
Niveau : Master 2, Automatique et systems

TD Robotique

TD 3: Modèle cinématique direct et inverse

Exercice 1 : Considérez le manipulateur schématisé dans la Figure suivant**:**

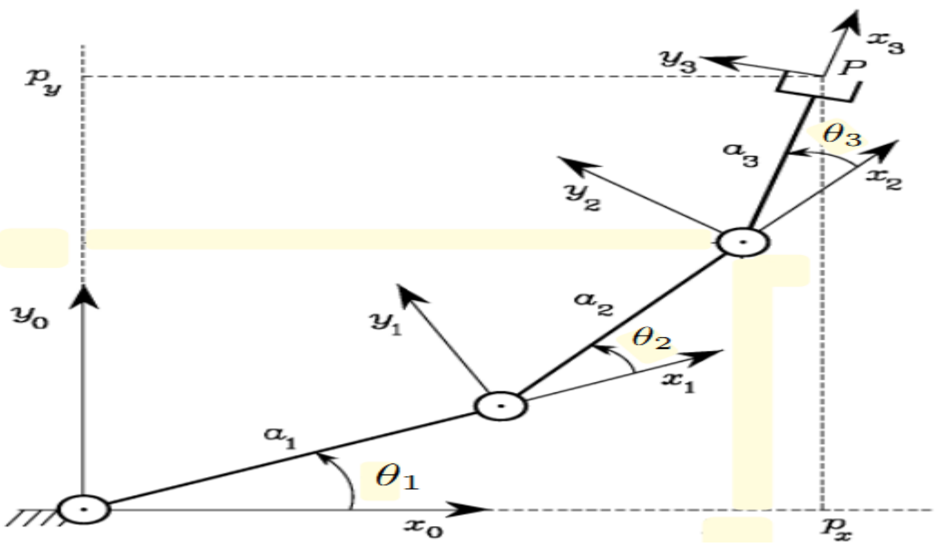
$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{-\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix}$$



$$M_1^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_2^0 = \begin{pmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 & a_1 + a_2Cq_2 \\ Sq_2 & Cq_2 & 0 & a_2Sq_2 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_3^0 = \begin{pmatrix} C(q_2+q_3) & S(q_2+q_3) & 0 & a_1 + a_2Cq_2 \\ S(q_2+q_3) & -C(q_2+q_3) & 0 & a_2Sq_2 \\ 0 & 0 & -1 & q_1 - d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le modèle cinématique direct.
2. Déterminer un modèle cinématique inverse.

Exercice 2 :



Déterminer le modèle cinématique direct et inverse.

Correction

Exercice N°01

1. Le modèle cinématique direct:

$$J = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \times (P_3 - P_1) & Z_2 \times (P_3 - P_2) \\ 0 & Z_1 & Z_2 \end{pmatrix}; \quad Z_0 = Z_1 = Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ q_1 \end{pmatrix} \; P_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2Cq_2 \\ a_2Sq_2 \\ q_1 \end{pmatrix} \; P_3 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2Cq_2 \\ a_2Sq_2 \\ q_1 - d \end{pmatrix} \; P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} a_2Cq_2 \\ a_2Sq_2 \\ -d \end{pmatrix} \; P_3 - P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -a_2Sq_2 & 0 \\ 0 & a_2Cq_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Le modèle cinématique inverse: $\dot{q}^* = J^{*-1}V^*_e \;\; J^* = \begin{pmatrix} 0 & a_2Cq_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow J^{*-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a_2Cq_2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{a_2Cq_2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice N°02

Trois articulations rotoïdes. Le jacobien est donc:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 3}$$

Les vecteurs de position des segments du robot sont:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cos\theta_1 \\ a_1 \sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs unitaires des axes des articulations sont (les axes sont tous parallèles à l'axe z_0):

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Conclusion:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque:
• Seulement les trois lignes du jacobien différentes de zéro sont importantes. Elles sont relatives aux composantes de la vitesse linéaire le long des axes x_0 et y_0, et à la composante de la vitesse angulaire autour de l'axe z_0

• En effet, 3 DDL permettent de spécifier au maximum 3 variables de l'effecteur: v_z, ω_x, ω_y sont toujours zéro pour ce manipulateur