بعض المراجع

1) التعبير والترميز في الرياضيات، محمد بن قادة، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

2) التعاقد الديداكتيكي، محمد العلوي ومحمد عليلات، أكاديمية بني ملال.

3) الرياضيات ومسألة اليقين (مقال)، محمد السعيد مولاي، جامعة الملك خالد بالمملكة العربية السعودية.

4) المشكلة في الرياضيات، محمد بن قادة، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

5) تعليمية الرياضيات، مطبوعة موجهة لتكوين الأساتذة عن بعد، لوجان الطيب وعاصم علي.

6) تعليمية الرياضيات، مطبوعة موجهة لتكوين الأساتذة عن بعد، محمد الطاهر طالبي، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

7) تعليمية الرياضيات، دروس موجهة لطلبة السنة الرابعة والخامسة رياضيات، محمد الطاهر طالبي، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

8) حول النظم التبديهية (مقال)، يوسف عتيق، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

9) نيكولا بورباكي وهشاشة الرياضيات (مقال)، أبو بكر خالد سعد الله، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.

10) Didactique des mathématiques: voyage à l'intérieur et prospectif, Luc Trouche, 2009.

11) Didactique des mathématiques, Irem de université de Franche conté, M. HENRY, France, 1991.

12) Enseigner et/ou apprendre, J. STORDEUR, De Boeck, 1996.

13) Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques, S. Johsua. et JJ. Dupin ,PUF, Paris, 1993

14) Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques, Guy Brousseau, 2003.

15) La didactique des mathématiques en France, Michèle Artigue et Régine Douady, Revue française de pédagogie, 1986.

16) Les principaux concepts de la didactique; Marie Chastenet, 2008.

17) Mots clés de la didactique des sciences, J.P ASTOLFI et al, De Boeck Université, 1997.

18) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, G. CONNE , in J. Brun, Didactique des mathématiques, de lachaux et niestlé, 1996.

19) Stratégies de prise en conte de l'erreur par des enseignants de maths en liaison avec certaines de leurs représentations, S. ROUSSET-BER, Petit x, N° 25, IREM de Grenoble, 1990.

20) Un exemple d'analyse de la transposition didactique, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 3.2, La Pensée Sauvage éditions, Y. Chevalard et M.L. Johsua, 1982.

موضوع تعليمية الرياضيات

كانت نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين مرحلة تحول هامة في تطور الرياضيات بصفة عامة، وأساليب تدريسها بصفة خاصة. لقد تراكمت عدة مفاهيم رياضية وتداخلت، لدرجة الشعور بالتناقض، مما أدى إلى محاولات لتنظيم هذه المعارف وفق نظام مترابط، فكانت أعمال بيانو، هيلبرت، ثم بورباكي لاحقا.

لقد تناولت هذه الأبحاث جانب الرياضيات الخام (النظريات التي تنتج من البحث العلمي مباشرة)، ولم تتناول كيفية تهذيب هذه المعارف وتقديمها إلى التلميذ الذي يقصر عقله حتما عن إدراك هذه المعارف، التي قد تكون مبتورة عن أصلها وسياقها، كما أن صياغتها تكون عادة فوق مستوى التلميذ.

إن الجهود المكثفة التي بذلت في ميادين التعليم خلال عشرات السنين الأخيرة بغية تحسين الفعل التربوي، انتهت إلى ضرورة فهم العملية التعليمية التعلمية أكثر، من قبل القائمين عليها، وإلى معرفة حقة بأقطابها المتمثلة في المرسل (المعلم)، والمتلقي (المتعلم)، والمادة التعليمية، والعلاقة الثنائية التي تربط كل عنصر بآخر.

نشأت تعليمية الرياضيات نتيجة لانعدام التوازن في النظام التربوي، وكذا الاضطراب في تدريس معارف الرياضيات المعاصرة، وذلك في سنوات السبعينات. لقد طرحت عدة أسئلة تتعلق بالمحتويات، فكانت أن نشأت تعليمية الرياضيات المتعلقة بمحتويات التدريس.

تعريف تعليمية الرياضيات:

تعليمية الرياضيات هي العلم الذي يهتم بالشروط الخاصة بنشر المعارف الرياضية المهمة لتصبح في متناول الإنسان (التلميذ بصفة خاصة).

ظهرت تعليمية الرياضيات قبل تعليميات المواد الأخرى، ولكنها جميعا تشترك فيما يلي:

- **الاستدلال:** وهو مسار ديناميكي يسمح بربط الأفكار باستعمال المنطق.
- **النسقية:** مجموعة من المعطيات المكونة للنظام.
- **العلمية:** تمتاز بالموضوعية، الدقة، العقلانية.
- **التخصيص:** حيث يتم الاقتصار على الخاص حسب خصوصية الموضوع.

وهذا خلافا للمواد العلمية التجريبية (بيولوجيا، فيزياء، كيمياء) التي تعتمد على: الملاحظة، الفرضيات، التجربة، الاستنتاج.

إن إصلاح محتويات التعليم قد تم ربط بخصوصيات التلميذ ربطا مزدوجا من ناحيتين:

- **الربط الجمالي:** حيث يتم بناء المعارف الرياضية بشكل بسيط، خال من الحشو، لكنه متين.
- **الربط النفسي:** يخص الطريقة التي يتعلم بها التلميذ.

أطوار تعليمية الرياضيات:

مرت التعليمية بثلاث محطات بارزة.

المحطة الأولى: كانت في الستينات من القرن الماضي حيث كان التركيز على النشاط التعليمي.

المحطة الثانية: كانت في السبعينات والثمانينات وتحول هنا التركيز من النشاط التعليمي الذي يرتكز أساسا على المعلم إلى النشاط التعلمي الذي يعول على المتعلم، ويعتبر المعلم مجرد مشرف وموجه.

المحطة الثالثة : في التسعينات أصبح التركيز على التفاعل القائم بين النشاط التعليمي (من المعلم) والنشاط التعلمي (من المتعلم).

أهمية التعليمية في تكوين المعلم

إن العمل الذي يقوم به المعلم يهدف إلى إحداث تغيرات إيجابية في مجموعة التلاميذ (تربوية ، معرفية ، اجتماعية...).

وإلمام المعلم بموضوع التعليمية يجعله يبحث عن أنجع الطرق، وأحسن الوسائل لتضمن النجاح لدروسه. وهذا لكونه يؤمن بتعقد عملية التعلم عند الطفل هذا الذي هو في حد ذاته قمة في التعقيد.

إن التعليمية ليست مجرد تأمل في المسائل البيداغوجية، وإنما هي استغلال للواقع التعليمي، وتناوله بالدراسة وتحليل وضعيات التعلم المختلفة بكل مكوناتها (معلم ومتعلم ومادة تعليمية)من أجل توفير فعالية أكبر.

من المعروف أن العمل التعليمي يرتكز على ثلا ثة أقطاب هي: المعلم (المرسل)، المتعلم (المتلقي أو المستقبل)، ومنهاج بينهما.

ومما لا شك فيه أن الرسالة التي يرسلها المعلم إلى تلاميذه لا يستطيع كل التلاميذ تلقيها واكتسابها إلا بالقدر الذي تسمح لهم به قدراتهم العقلية وبنياتهم المعرفية .

فالمعلم عندما يعد درسه في البيت فإنه يحضره على أساس تصوره هو للمعرفة، ويصممه وفق فرضيات قد تكون غير مناسبة لواقع كل التلاميذ كما أن التقويم المعد للدرس قد لا يتماشى والنتائج التي يطمح إلى تحقيقها .فيخفق في الدرس، أو تكون نتائجه محدودة جدا.

من هذا المثال ندرك أن عملية توصيل المعارف إلى التلاميذ عملية معقدة، وتتطلب وسائل عديدة، منها النظر بعمق إلى الأقطاب الثلاثة مجتمعة للعملية التعليمية – التعلمية، دون حصر التحليل في قطب واحد.

إن التعليمية تقدم إجابة لثلاثة أسئلة هي:

* ما الذي يجب أن يتعلمه المتعلمون أطفالا كانوا أو راشدين؟
* كيف يتعلمون؟
* لماذا يصلح كل ما تعلموه ؟

موضوع تعليمية الرياضيات:

يتعلق موضوع تعليمية الرياضيات بالجانب النظري والتطبيقي الذي يمكن المعلم من تذليل صعوبات التدريس. ويمكن القول أيضا أن موضوع التعليمية هو دراسة الظواهر التفاعلية بين معارف ثلاث وهي: المعرفة العلمية والمعرفة الموضوعة للتدريس التي ينقلها المعلم، والمعرفة التي يحصل عليها التلاميذ، أي التي تتكون لديهم، كل ذلك في إطار فضائي زمني محدد.

أ/ الجانب التفكيري والنظري:

وهو يتكون من أقطاب ثلاثة:

1. القطب النفسي: يخص المتعلم من حيث: تصوراته، قدراته على الإدراك والمحاكاة والتفكير.

إن التفكير في التلميذ يعني تسليمنا بأنه ليس في حالة تلقي فحسب أثناء تعلمه، بل هو في حالة تفاعل مع العالم الخارجي، وأنه يبني معرفته انطلاقا من أرصدته السابقة. وهذا يؤدي إلى البحث عن الكيفيات التي يجري فيها هذا البناء.

2. القطب المعرفي الإبستمولوجي: يخص المعارف المراد تدريسها من حيث:

- خصائصها البنائية.
- الوظيفة ودرجة تعقيدها.

إن التفكير في المعارف المراد تدريسها يعني التفكير في الجوانب التالية:

البعد الإبستمولوجي: ويعني

- معرفة المفاهيم الأساسية في الرياضيات.
- تحديد العلاقات بينها.
- البحث في تاريخ تكوينها، والحواجز التي صاحبت هذا التكوين.

التحويل التعليمي: وهو البحث في تكييف المادة وفق مستويات معينة، عن طريق تحليل مراحل تحولها من معرفة مرجعية (معرفة الرياضي)، إلى معرفة مدرسية.

البعد الدلالي: يبحث في:

- معاني الأشياء (أفكار ، مفاهيم).
- الشروط التي تجعل النص الرياضي سليما من حيث القواعد والمعنى.
- التلاؤم بين الدال والمدلول.

البعد الرمزي: يبحث في الترميز ضمن نظام مقنن (رسم، حرف، مصطلح ..).

3. القطب التربوي: يخص كلا من:

- **المدرس:** التكوين، طرق تدريسه، أساليب تكوينه.

إن التفكير في المدرس يعني أيضا التفكير في أسلوب معاملته للتلاميذ، والطرق المستعملة في تسيير دروسه.

- **الوسائل التعليمية:** وبالأخص الكتاب المدرسي.

ب / الجانب التطبيقي:

ويتضمن الممارسة في:

1. تحليل حصص تعليمية.

2. تقييم هذه الحصص.

3. تكييف هذه الحصص لتحسين المردود المدرسي.

التعليمية وعلوم التربية:

لقد أصبح موضوع التعليمية يستقطب اهتمام كل الأطراف المعنية بالعملية التعليمية – التعلمية، وقد تطورت الأبحاث بشكل ملحوظ في هذا السياق ساعية إلى بلورة هذه المادة كعلم من علوم التربية.

يمكننا القول أن التعليمية علم من علوم التربية له قواعده ونظرياته يعنى بالعملية التعليمية التعلمية، ويقدم المعلومات وكل المعطيات الضرورية للتخطيط .يرتبط أساسا بالمواد الدراسية من حيث المضمون والتخطيط لها

وفق الحاجات والأهداف والقوانين العامة للتعليم، وكذا الوسائل وطرق التبليغ والتقويم.

التعليمية والبيداغوجيا:

للبيداغوجيا بعدان: يضم الأول مهنية الفعل التربوي – التعليمي، بينما يضم الثاني أثر هذه المهنية على المتعلم من خلال الطرق والأساليب المتبعة في التدريس ومن خلال الوسائل والأدوات المستخدمة كدعائم للفعل التعليمي.

تدعو البيداغوجيا إلى عزل المعارف عن سياق الاكتساب ، لإعادة استثمارها في سياقات جديدة فرضها الواقع ، أو استلزمتها الحاجة ، ولا يمكن أن نبدع إلا إذا تحررنا من سلطة سياقات المعارف.

فالبيداغوجيا تمكن المتعلم من التقويم الذاتي، الذي يسمح له بالتعرف على حقيقة إمكانياته الفكرية والأدائية والسلوكية.. والتعرف على ما تحقق لديه من الكفايات والقدرات والمهارات والمعارف ..وما لم يتحقق منها لديه.

تقوم البيداغوجيا بتفعيل العلاقة بين أطراف المثلث التعليمي (الأستاذ، المتعلم، الموضوع) انطلاقا من كون المتعلم ذات عارفة مرتبطة بطرفي الفعل التعليمي: الأستاذ والمادة المدرسة. فالعلاقة بين المتعلم والأستاذ تتميز في ظل هذه البيداغوجيا بخصوصية تقدير الأستاذ لذات المتعلم على انه الأساس في فعل التعليم، وتقدير المتعلم للأستاذ من منطلق أن هذا الأخير هو محرك فعل التعليم إلى فعل التعلم اتجاه المتعلم. فهي بهذا تعد محركا رئيسا للمثلث التعليمي.

ويمكن حصر المقارنة بين البيداغوجيا والتعليمية في:

- **التعليمية** تهتم بالجانب المنهجي لتوصيل المعرفة مع مراعاة خصوصيتها في عمليتي التعليم والتعلم. **بينما البيداغوجيا** لا تهتم بدراسة وضعيات التعليم والتعلم من زاوية خصوصية المحتوى، بل تهتم بالبعد المعرفي للتعلم وبأبعاد أخرى نفسية اجتماعية.
- **التعليمية** تتناول منطق التعلم انطلاقا من منطق المعرفة. **بينما البيداغوجيا** تتناول منطق التعلم من منطق القسم (معلم / متعلم).
- **التعليمية** يتم فيها التركيز على شروط اكتساب المتعلم للمعرفة. **بينما البيداغوجيا** يتم فيها التركيز على الممارسة المهنية وتنفيذ الاختيارات التعليمية التي تسمح بقيادة القسم في أبعاده المختلفة.
- **التعليمية** تهتم بالعقد التعليمي من منظور العلاقة التعليمية (تفاعل المعرفة / المعلم / المتعلم). **بينما البيداغوجيا** تهتم بالعلاقة لتربوية من منظور التفاعل داخل القسم (معلم / متعلم).

المقاربة النسقية (البنائية)

الأقطاب الثلاثة للوضعية التعليمية:

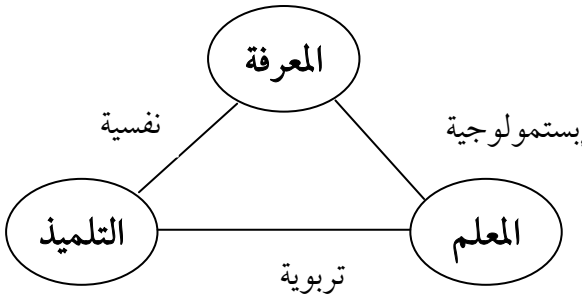
لقد أصبح من الواضح إدراك النقص في التفكير القائل: (يكفي معرفة المادة المدرسة للتدريس بنجاعة)، لذا أصبح لزاما التفكير في الأقطاب الثلاثة للوضعية التعليمية (التلميذ، المادة، المعلم)، والتفاعلات بينها.

إن هذا الأقطاب الثلاث تبني نظاما منفتحا على الواقع الفيزيائي والاجتماعي، وخاضعا لتأثيرهما، كما أنه مغمور في محيط النظام التربوي الذي تتفاعل فيه متغيرات تعليمية عديدة. وعلاقات المثلث التعليمي هي:

1) العلاقة التربوية: وهي العلاقة بين المعلم والتلميذ.

2) العلاقة الإبستمولوجية: وهي العلاقة بين المعلم والمعرفة.

1) العلاقة النفسية: وهي العلاقة بين التلميذ والمعرفة.



هذه العلاقات هي من نوع التغذية الراجعة بين الأطراف الثلاثة.

المتغير التعليمي:

المتغير التعليمي هو نوع خاص من المتغيرات لها علاقة بنص أو شكل أو تمرين في المشكل المطروح. إن التغير في قيمة المتغير التعليمي يؤدي إلى التغير في إجراءات الحل.

من بين أنواع المتغيرات التعليمية:

- متغيرات السياق الخاصة بالمعلم والتلميذ والمعرفة.
- متغيرات الوضعية التعليمية المتعلقة باختبارات بيداغوجية.
- متغيرات العقد الخاصة بالعلاقات في القسم وغيرها.

مثال 01:

لكي نجعل الطفل يتخلى عن استعمال أصابعه للعد فإننا نقدم له أعدادا كبيرة.

إننا أمام متغير تعليمي متعلق بالعد.

مثال 02:

نعتبر المعادلة التالية $x^2 + ax + 1 = 0$.

إن التغيير في a يؤدي إلى التغيير في عدد حلول المعادلة.

نسمي a إذًا متغيرا تعليميا.

مثال 03:

نريد إنشاء مضلع ذي n ضلعا، بحيث تكون منتصفات أضلاعه معطاة.

n هو المتغير التعليمي، والتغيير فيه يؤدي إلى:

- إذا كان عدد الأضلاع فرديا فالحل وحيد.
- إذا كان عدد الأضلاع زوجيا يوجد عدد غير منته من الحلول.

بعض المفاهيم في تعليمية الرياضيات

ظهر من نتائج البحث في تعليمية الرياضيات عدة مفاهيم أساسية، ارتكزت حولها الأعمال الحالية. من بين هذه المفاهيم:

أ/ التحويل التعليمي:

يعود أصل مفهوم التحويل التعليمي (la transposition didactique) إلى تعليمية الرياضيات، حيث ظهر لأول مرة في مقال مشترك للباحثين Johsua و Chevallard تحت عنوان "مثال تحليلي عن التحويل التعليمي: مفهوم المسافة". لقد استعملاه لدراسة إشكالية تكييف المعارف مع مستويات التعليم التي تدرس فيها، أي تحليل مراحل تحولها من معارف مرجعية إلى معارف مدرسية. لقد فحصا التحولات الطارئة على مفهوم المسافة ما بين تقديمه سنة 1906م من طرف Frechet في إطار معرفة العالم، وبين تقديمه في سنة 1971م في برنامج الهندسة للسنة الرابعة متوسط في إطار معرفة مدرسية.

في الواقع توجد ثلاثة أنواع من المعارف:

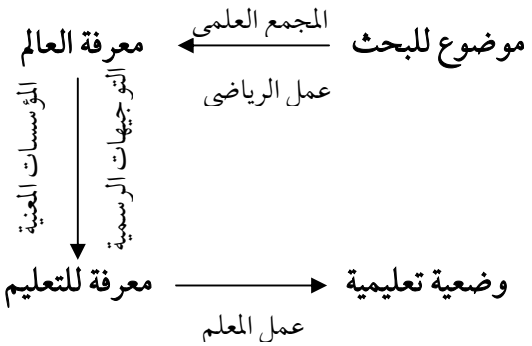
- معرفة مرجعية.
- معرفة مدرسية.
- معرفة اجتماعية.

إن التقارب بين المعرفة الأولى والثالثة يعني توازن التعليم، والتقارب بين الثانية والثالثة يعني التساؤل عن دور المعلم، أما التقارب بين الأولى والثانية فيؤدي إلى التساؤل عن دور الأولياء.

1) مفهوم التحويل التعليمي:

حسب Chevallard يخضع محتوى العلم الذي يدرس إلى مجموعة من التحويلات المكيفة ليكون مؤهلا للتدريس، تدعى هذه العملية بالتحويل التعليمي.

أهم هذه التحولات يوضحها المخطط الموالي:



يقود هذا التعريف مباشرة إلى ضرورة التمييز بين المعرفة المرجعية (معرفة العالم)، والمعرفة التعليمية. فالتكييف الواجب وضعه لا يعني أبدا خفض كمية المعلومات، وإنما مراعاة عدة عوامل، منها بالخصوص مستوى صياغة المفاهيم والشبكة التصورية.

2) مستوى صياغة المفهوم:

يوافق صياغة مفهوم ما التدرج الذي يعرفه تطور المعارف المتعلقة بذلك المفهوم، ذلك أن المفهوم لا يمكن بناؤه دفعة واحدة، بل يبني على عدة مراحل متتالية، يتم في كل منها التعبير عنه بصيغة ملائمة.

عند صياغة مفهوم ما، لا بد من مراعاة نضج فكر المتعلم ومعلوماته السابقة، مع استعمال اللغة المألوفة لديه.

وبشكل آخر تختلف الصياغات في أمور منها:

1. المستوى اللغوي: من حيث: التعقيد اللغوي، البنية النحوية والدلالية. فيكفي وجود تحويل ضعيف لمنطوق حتى يتعقد بالنسبة للمتعلم.

2. المستوى الوراثي: من حيث التسلسل، اعتمادا على تعقيد العمليات المنطقية الرياضية.

3. المستوى الإبستمولوجي: من حيث أن كل منطوق يمكن أن يكون مشكلا صريحا أو ضمنيا.

مثال: تقديم الإحصاء الوصفي ضمن مستويات مختلفة (المرحلة المتوسطة والثانوية).

قدمت مفاهيم في الإحصاء الوصفي في السنوات الأولى، الثانية، الثالثة متوسط تحت عنوان تنظيم المعطيات، وقدمت في السنة الرابعة المتوسطة، الأولى، الثانية ثانوي تحت عنوان الإحصاء.

- في السنة الأولى متوسط قدمت جداول إحصائية وتمثيلات بيانية بسيطة.
- في السنة الثانية متوسط تم إدخال مفهوم الدائرة النسبية.
- في السنة الثالثة متوسط تم التطرق إلى التصنيف عبر الفئات، وتمثيل ذلك بالمستطيلات والدائرة النسبية.
- في السنة الرابعة متوسط أدخل مفهوم التكرار المتجمع، التواتر، الوسط الحسابي، الوسيط، المدى.
- في السنة الأولى ثانوي تم التطرق لمفهوم تذبذب العينات كمدخل للحساب الاحتمالي.
- في السنة الثانية ثانوي تم التطرق للربيعيات، الانحراف الربيعي والمعياري، المخطط بالعلبة.

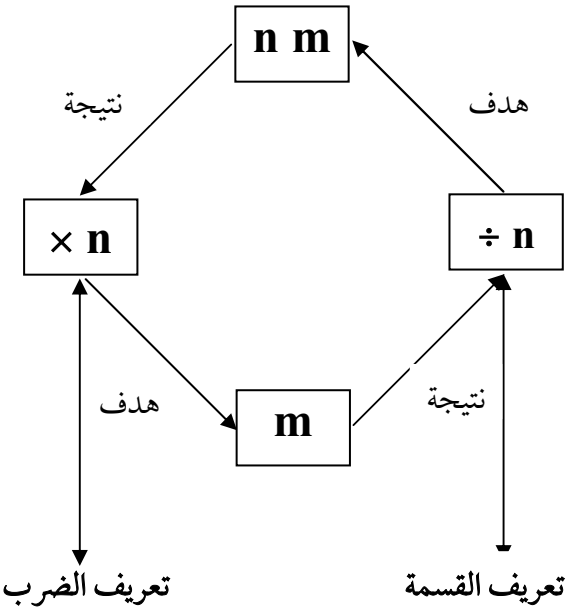
3) الشبكة التصورية:

وهي عبارة عن نموذج نظري، ينجز انطلاقا من تحليل نص (برنامج تعليمي مثلا)، لتوضيح العلاقة بين الأفكار المكونة لمفهوم ما من جهة، وبين هذا الأخير والمفاهيم المجاورة له من جهة أخرى.

الوظيفة البيداغوجية لهذه الشبكة هي المساعدة على تحديد مكتسبات المتعلمين من جهة، ومساعدة المعلمين على اختيار خطتهم التعليمية من جهة ثانية. تتم هذه المساعدة عن طريق المقارنة بين:

- منطق المفاهيم (بناء المعرفة).
- منطق المتعلم (استدلالاته وحججه).
- منطق البيداغوجيا (اختيار الخطة بناء على العاملين السابقين).

مثال: بناء مفهومي الضرب والقسمة (Wendy و Resnick سنة 1981م).



- كل عملية لها تعريف وهدف ونتيجة.
- كل عملية معاكسة للأخرى.

النتيجة: ينتج التعلم أكثر من التنظيم الجيد للمعلومات، وربطها مع بعضها البعض، لا من فصلها.

ب / التصميم التعليمي:

ظهر هذا المفهوم من طرف Chevallard سنة 1982م، حيث قدم الإطار النظري له. أما الإطار التطبيقي له فقد قدم من طرف M. Artigime سنة 1996م، حيث ارتكزت أبحاثها حول التعلم في الرياضيات المطبقة في الفيزياء (المعادلات التفاضلية مثلا).

يقصد بالتصميم التعليمي مجموعة الأعمال الموصلة إلى إعداد وتنفيذ حصص تعليمية. هذا العمل يشبه عمل المهندس، حيث يتم إخضاع الدراسة النظرية إلى التجربة الميدانية، باستعمال خصوصيات المحتوى، وفرضيات التعليم والتعلم، والتجربة المكتسبة مكن التعليم.

يمكن أن يعالج هذا المفهوم جانبين:

- العلاقات بين البحث والنشاط التعليمي.
- الدور الذي تلعبه التحقيقات التعليمية بتطبيق منهجية البحث العلمي.

من بين الأمثلة على التصميم التعليمي:

1) نظرية الوضعية التعليمية: سيتم التطرق له لاحقا.

2) جدلية أداة – موضوع: للمفهوم وظيفتان:

- استعماله في حل مشكل، ويكون هنا عبارة عن أداة لحل المشكل.
- تقديمه في الدرس، ويكون هنا موضوعا.

وضعت هذه الجدلية من طرف Douady سنة 1987م، وهذه الجدلية تكون في وضعية مشكل. ولهذا اقترح تنظيم التعليم بشكل يشبه التعليم عن طريق وضعية مشكل.

قسمت الباحثة ذلك إلى مراحل:

- تجنيد المعارف المكتسبة.
- البحث عن أدوات جديدة.
- تقييم هذه الأدوات من طرف المعلم.
- هيكلة ما هو جديد.
- التعلم والتحول والاستثمار.

ملاحظة: هناك ثلاث وضعيات للمشكل: مشكل مغلق (توظيف المكتسبات)، وضعية مشكل (تقديم المفاهيم للتعليم)، مشكل مفتوح (يفحص مسار الحل).

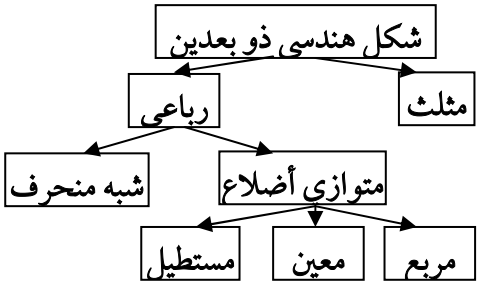
جـ / الحقل المفهومي:

يرتكز العلم على نظريات مختلفة، تربط فيما بينها مفاهيم متنوعة. إن اكتساب العلم معناه فهم هذه الروابط، وكذلك تطبيق هذه المفاهيم في صيغ مختلفة، وتقدير معرفة ملاءمة إجابة ما للسؤال المطروح.

فالمفهوم الرياضي لا يمتلك هيكلة معرفية إلا إذا اندرج ضمن شبكة من العلاقات مع المفاهيم الأخرى. وهذا ما يسمى بالحقل المفهومي، الذي طوره G. Vergnaudo سنة 1991م.

تهدف الحقول المفهومية لإلى فهم التسلسل والانقطاعات بين المعارف، وقد استخدمت في عدة مجالات رياضية (البنى الجمعية والضربية، الجبر ..).

مثال:



الوضعية التعليمية

أ/ الوضعية التعليمية:

التطور البنائي دمج ثمر العمل المحقق في مجال الإبستمولوجيا وعلم الاجتماع والتعليمية. من بين الطرائق والسيرورات التي انتشرت نذكر حل المشكلات والمشكل المفتوح. من بين مميزاتها أنها تضع المتعلم في مركز عملية التعلم. لقد وضع Gue Brousseau تقنية حل مشكلات في إطار نظرية سماها: **نظرية الوضعيات التعليمية**.

هذه المقاربة النظرية تقترح لتحليل عملية التعلم وملاحظتها تقسيمها إلى فترات مختلفة، تكون للمعرفة خلالها وظائف مختلفة، وتكون للطفل معها علاقة معينة. وفي كل فترة يوجد نوع من التبادل والتعديل لدى كل متعلم، وبين المتعلمين كذلك، الذين يضعون في كل مرة منهجيتهم ومعرفتهم محل نقد. هذا التبادل وهذا التعديل يسميه Gue Brousseau **جدلية**.

1) جدلية العمل:

تتمثل في وضع متعلم ما أمام وضعية تسمى وضعية عمل حيث:

- نطرح مشكلا يكون حله هو موضوع المعرفة المراد بلوغه.
- يتمكن المتعلم من مراجعتها، وتقدم له هذه الوضعية تغذية راجعة حول نوعية عمله.
- وضعية العمل الجيدة عي التي تمكن الطفل من تقديم حكم على النتيجة التي وصل إليها، وتعديلها، دون تدخل من المدرس، فيتخلى عنها أو يجود طريقته. فالوضعية تحدث لدى المتعلم تعلما بالتكيف.

2) جدلية الصياغة:

ليكون ما توصل إليه المتعلم معنى بالنسبة للتلميذ لا بد له من صياغته. وليتمكن من صياغة ما يتوصل إليه صياغة صريحة واضحة لا بد له أن يتواصل مع غيره. فوظيفة هذه الفترة هي إقدار المتعلم على التواصل قصد التدرب على صياغة ما يتوصل إليه، في شكل دلائل أو قواعد صريحة، بعد تبادل الآراء الشفوية أو الكتابية بشأنها.

3) جدلية الإقرار:

الإقرار التجريبي الذي توصل إليه المتعلم في الفترات السابقة غير كاف، فلا بد على المتعلم خلال هذه الفترة إبراز وجاهة ما اختاره من منهجية ونتائج. وحتى يتمكن من بناء برهان ذي معنى بالنسبة إليه يتحتم عليه إقناع الأطراف الأخرى، ولذا نضعه في ما يسمى بـ **وضعية الإقرار**.

4) جدلية التأسيس:

بعدما تبنى المعرفة ويقر بها جميع المتعلمين، تصبح من الممتلكات الرياضية للفصل، ولمن لا ترقى إلى مكانة المعرفة الاجتماعية. لذلك يتدخل المدرس لتأسيس هذه المعرفة، فيحدد المكانة العرفانية للمعرفة موضوع الدرس

ولا يمكن لجدلية التأسيس أن تقع مبكرة خلال فترات الحصة، حتى لا تقطع بذلك بناء المعنى، وتفسد التعلم المنشود، وتضع المدرس والمتعلمين في وضعية حرجة.

ولا يمكن لجدلية التأسيس أن تأتي متأخرة، حتى لا تدعم بذلك التأويلات الخاطئة، وتخفض من نسق التعلم، وتعرقل الممارسات والتطبيقات.

5) جدلية إعادة الاستثمار:

حتى يتمكن المتعلم من إنجاز وضعيات أخرى، وحل جملة من المسائل الجديدة التي تطرح نفس القضية بأشكال مختلفة، ويتحول موضوع المعرفة من هدف إلى وسيلة.

وتجدر الإشارة إلى أنه خلال الممارسة الفعلية لا تتعاقب هذه الفترات الخمس بصورة خطية كما وقع تقديمها نظريا، وإنما تتداخل وتشهد مراوحة، وأحيانا قطيعة مع العقد التعليمي.

لذلك فإن ملاحظة فصل يعتمد تقنية حل مشكلات ليس أمرا هينا، فهي وضعية معقدة ومركبة. لذا فإن نظرية الوضعيات التعليمية لـ Brousseau تعين كثيرا على تحليل التماشي المعتمد والظواهر الملاحظة.

تمتاز الوضعية التعليمية بأنها تمازج بين التعليم والتعلم وتراوح بينهما: حيث أن:

- التعلم هو مجموع العمليات التي يقوم بها الفرد في ظروف معينة، قصد اكتساب مؤهلات جديدة (معارف، مواقف، مهارات).
- التعليم هو مجموع العمليات يوفرها الوسط التربوي (المعلمون، الأولياء، المؤسسة التربوية) بقصد تسهيل التعلم الذي يقوم به التلاميذ.

هذا التقسيم منهجي، وإلا ففي الواقع تتلازم عمليتا التعليم والتعلم داخل الوضعيات التربوية المختلفة.

ب / وضعية المشكل:

هي وضعية تعليمية منظمة، بحيث لا يستطيع المتعلم حل المشكل المطروح فيها بمجرد تكرار تطبيقات لأفكار، أو لمهارات مكتسبة.

- تستدعي الوضعية صياغة فرضيات عمل جديدة
- يجد المتعلم نفسه مجبرا على استعمال قدراته العقلية الذاتية.
- يجد من التعثر في تحقيق مشروعه ما يدفعه على استنباط حلول جديدة، وإلى جمع معارف مشتتة، وإلى تجريب وسائل لم يفكر فيها من قبل.

جـ / العقد التعليمي:

1) مفهوم العقد التعليمي:

هو مجموعة من العلاقات التي تحدد – بصفة صريحة في بعض الحالات، وضمنية في أغلبها – ما هو مطلوب من كل من المعلم والمتعلم، خلال حصة تعليمية معينة.

لا بد من إخراج بنود هذا العقد من المستوى الضمني إلى المستوى الصريح عن طريق:

- تقليص المسافة التي تفصل انتظارات المدرسين وتصورات التلاميذ عن انتظارات أساتذتهم.
- ضبط الأعمال التي على كل طرف أن ينجزها.

مثال:

كانت الإجابة على السؤال: حلل العبارة $4x^2 - 36x$:

$$4x^2 - 36x = 4x^2 - 2 \times 2x \times 9 + 9^2 - 9^2$$
$$= (2x - 9)^2 - 9^2$$
$$= (2x - 9 + 9)(2x - 9 - 9)$$
$$= 2x(2x - 18)$$

نستنتج في هذه الحالة أن المتعلم غير قادر على التعرف على الوضعية التي يواجهها.

سلوكه في الجواب – وإن كان صحيحا – إلا أنه غير وجيه بالنسبة للعقد التعليمي، وقد ينجم عن هذا انقطاع العقد التعليمي.

2) مميزات العقد التعليمي:

- هو جملة من الالتزامات الضمنية المتبادلة.
- موجود دائما، ويسبق العملية التعليمية.
- يحدد مهام كل من المتعلم والمعلم.
- يظهر عند الانقطاع.

3) فسخ العقد التعليمي:

قد يلجأ المعلم – بغية تبسيط عمل المتعلم – إلى أخذ مواقف مختلفة، من شأنها تمكين الدارسين من التحكم في المعارف. قد يؤدي هذا إلى فسخ العقد التعليمي، والتقليل من عملية التعلم. من بين ما يفسخ العقد التعليمي نذكر:

التوظيف المفرط للماثلة: يشكل نشاط المماثلة في مناسبات عديدة كيفية عمل، وإمكانية للقفز على عملية التفسير. حيث يجد المعلم والتلاميذ مخرجا في ذكر أمثلة متشابهة ظاهريا، وتتجه عملية التقويم لمستوى المتعلم نتيجة لذلك، إلى إصدار الحكم على قدرة التلاميذ في التعرف على هذه التشابهات.

كان من الأجدى أن يعي التلاميذ مزايا المماثلة وحدودها، وأن لا يضعوها موضع تفسير.

مفعول Topaz: عند مصادفة المتعلم لصعوبة ما، يتدخل المعلم لجعل الدارس يتجاوز هذه الصعوبة. ولكن في الحقيقة تدخل المعلم في بعض الحالات يشوه الأنشطة المقترحة. فهناك مثلا التفصيل المبالغ في تذليل الصعوبات لدرجة تقطيع نصوص التمارين أو المسائل.

فما طبيعة التعلم الذي ننشده في ظل غياب أي صعوبة أو حاجز معرفي؟

مفعول Jordain: تصرف من المتعلم يترجم كإبراز معرفة علمية، يجعل المعلم يفترض أنها مكتسبة، وقد لا يتطرق إليها. فكم من تلميذ يقضي عدة سنوات متتالية في تعلم مفهوم معين، وتشهد له نتائج الامتحانات بأنه قد أتقن ذلك المفهوم، لكن الحقيقة يبقى مواجها لنفس الصعوبات والحواجز.

الانزلاق الماوراء معرفي: أخذ تقنية تحل مشكلا ما كموضوع للدراسة، والتخلي عن المعرفة وتطويرها. وهذا الانزلاق يتكرر مرارا في الفيزياء والكيمياء. فكم من تلميذ يقرن تدريس الميكانيك بالوسادة الهوائية، والكهرباء برسم الميزات (U,I). إن التوظيف المتنامي للحاسوب كأداة قياس عامة، أو كأداة قياس مخبرية قد يؤدي لتعميق هذا الانزلاق.

مفعول الانتظار غير المفهوم: توقع أن الإجابة المنتظرة في متناول المعلمين قد يجعل المعلم ينتظر إجابة لن تأتي.

مفعول Papy: حينما يخفق نشاط تعلمي معين يحاول المعلم – من أجل تبرير ما آلت إليه الوضعية، والدفع في اتجاه استمرار الاشتغال التعليمي – اتخاذ تفسيراته الخاصة، وإمكاناته العملية والبحثية موضوع الدراسة، بدل الموضوع المعرفي المجسد للنشاط الحقيقي للفعل التعليمي – التعلمي.

د / بيداغوجيا العقد التعليمي:

ظهرت بيداغوجيا التعاقد كأسلوب جديد لتنظيم العلاقات في إطار العمل التعليمي. يعتبر هذا التعاقد التزاما يقبله كل طرف متعاقد، بغية إقامة علاقة واضحة وصريحة، تؤدي إلى تطور مستوى التبادل المشترك.

يقوم هذا الالتزام على مجموعة من العناصر تحدد مسؤولية كل طرف ينخرط في التعاقد:

1) العناصر المحددة لمسؤولية المعلم:

يقتضي الانخراط في إطار بيداغوجيا العقد من طرف المعلم عملا جماعيا بين المعلمين، لتحديد أهداف التكوين، وإنجاز تكوين شامل، والاضطلاع بدور المرشد التربوي.

كما يقتضي الالتزام بالمسؤوليات المحددة في صياغة الأهداف التعليمية، وإنجاز تقويم موضوعي يستجيب لمعايير محددة سلفا.

2) العناصر المحددة لمسؤولية التلميذ:

إن التلميذ مطالب – في إطار المقاربة بالكفاءات – بتحقيق أهداف نهائية تحددها شبكة الكفاءات المستهدفة، وبتجسيد النتائج المنتظرة في سلوكات قابلة للملاحظة والقياس، وفق شروط محددة للإنجاز.

فضلا عن ذلك، فهو مطالب بالقيام بتقويم ذاتي لإنجازاته ومستوى تعلمه.

هـ / تطبيق:

$(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس. علم النقط: $A(4,1)$، $B(-1,4)$، $A(-4,-1)$، $A(1,-4)$. أوجد نوع الرباعي ABCD معللا إجابتك.

اقترح جورج بوليا وفرانك لستور المراحل التالية:

1) فهم الوضعية:

- تحديد المعطيات التي تشتمل عليها المسألة.
- هل هذه المعطيات كافية لاستخراج المجهول.
- رسم شكل، أو استعمال رموز مناسبة لتلخيص المعطيات، والعنصر أو العناصر المجهولة.

2) إنشاء الخطة:

- هل سبق وتناول المشكلة المعروضة من قبل؟ (التشابه إما كلي أو جزئي)
- هل بالإمكان إعادة صياغة المسألة ؟
- تحديد الجزء الذي يمكن حله من المسألة.
- هل بالإمكان تحديد معطيات جديدة تساعد على تحديد المجهول؟

3) تنفيذ الخطة:

التثبت من تماسك الإستراتيجية التي توصل المتعلم إلى بلورتها، ومن التماشي المعتمد في إيجاد الحل.

4) التغذية الراجعة:

- التأكد من صحة النتيجة والمتمشيات المتبعة.
- النظر في إمكانية حل المسألة بطريقة مختلفة.
- إمكانية تعميم الطريقة في معالجة مشكلات.

ملاحظة:

قد تجد هذا التمرين في السنة الرابعة متوسط.

الإجابة المنتظرة هي: الرباعي ABCD مربع. وفي حالة فسخ العقد التعليمي

قد تكون إجابة بعض المتعلمين متوازي أضلاع، أو معين.

آثار هذا الفسخ تظهر في كيفية التعليل أو من خلال الاستدلال.

الإبستمولوجيا وتدريس الرياضيات

أ/ تدريس المفاهيم الرياضية:

من مميزات علم الرياضيات أنه يمكن تقديمه في وضعيات جديدة، مختلفة عن التي تولد منها.

يتم عمل الرياضي والمعلم والتلميذ حسب Gue Brousseau كما يلي:

1) عمل الرياضي: لكي ينشر الرياضي منتوجه عليه أن يتأكد من أهميته، وكون البراهين التي يحويها ليست مجرد تخمينات، وأنه حذف كل: تفكير غير مفيد، آثار الأخطاء المرتكبة، المسالك التافهة.

لا بد أيضا من النظرية الأكثر عمومية (بحيث تظل فيها النتائج صحيحة)، والإجراء الذي يجعل هذا العلم يتصف بالموضوعية، الأصالة، التكيف مع الزمن.

2) عمل المعلم: عمل المعلم يعاكس أحيانا عمل الرياضي، فهو يعيد إعطاء السياق والذاتية للمعارف، ويوفر شروطا خاصة لتصبح ذات معنى للتلميذ، وتتكيف مع الوضعيات التي تعطى فيها.

على المعلم أن يسهر على طرح الأسئلة الجيدة، وأن يتحكم في المناقشات، حتى يجعل التعبير وسيلة للصياغة، والبرهان وسيلة للإقناع.

3) عمل التلميذ: لا بد أن يكون العمل الذهني للتلميذ مماثلا في أغلب الأحيان للنشاط العلمي المطروح.

إن تعلم الرياضيات لا يقتصر فقط على معرفة التعاريف والنظريات وتوظيفها، بل يستوجب حل المشاكل، وإيجاد أسئلة جديدة، وإعادة الإنتاج العلمي. إن ذلك يتطلب التصرف، والقيام بالبراهين، والتبادل مع الغير، وهذه كلها من صميم عمل التلميذ.

ب/ الإبستمولوجيا والمساءلة التعليمية:

1) موضوع الإبستمولوجيا: تدرس الإبستمولوجيا تكون المعارف، سواء فيما يخص أصلها التاريخي، أو إعادة بنائها، وكذا فيما يخص تمفصلها في مرحلة ما من تطور المعرفة المرجعية.

تشمل الإبستمولوجيا فلسفة العلوم، وتاريخ تطورها، والمنهجية الخاصة بكل علم.

2) العلاقة بين الإبستمولوجيا وتعليم الرياضيات: تعطي تعليمية الرياضيات مكانة أساسية للمفاهيم الرياضية، فيما يخص أصلها وتكونها، وتعتمد على ثلاث توجهات هي:

- دراسة التكون التاريخي للمفاهيم.
- دراسة سيرورة بناء المفاهيم أثناء التعلم.
- إيجاد العلاقة بينها.

نلخص أوجه المقارنة فيما يلي:

- **التكوين التاريخي:** في التفكير الإبستمولوجي يخضع تكون المفاهيم العلمية عبر التاريخ لتعديلات متعاقبة. كل حقبة لها حواجزها الإبستمولوجية التي تزول.

وتأتي المساءلة التعليمية لتسليط الضوء على هذه الحواجز التي اعترضت المفهوم في مختلف مراحل تكونه، وكيف تم تجاوزها عبر التاريخ.

- **سيرورة البناء:** في التفكير الإبستمولوجي تكون المفاهيم العلمية أجوبة لمشاكل

وتنص المساءلة التعليمية على كيفية التعليم عن طريق حل المشاكل.

- في التفكير الإبستمولوجي يمكن أن يعالج المفهوم العلمي هرميا حسب درجة تعقيده.

ونطرح في المساءلة التعليمية سؤالا حول مختلف مستويات الصياغة لمفهوم ما.

- **إيجاد العلاقة بين المفاهيم:** في التفكير الإبستمولوجي لا ترتب المفاهيم العلمية خطيا، وإنما كل مفهوم علمي موجود في عقدة من شبكة مفهومية.

ويطرح عندئذ في المساءلة التعليمية السؤال التالي: هل نأخذ بعين الاعتبار في تهيئة تعلم مفهوم الحقل المفهومي ام لا؟

إذًا: كل تفكي إبستمولوجي حول مفهوم علمي تقابله مساءلة تعليمية، وهذا ما يبين الروابط الوثيقة بين التعليمية والإبستمولوجيا.

جـ/ الإبستمولوجيا وتاريخ العلوم:

يعتبر تاريخ العلوم فرعا هاما من الإبستمولوجيا، وقد وضع في خدمة البيداغوجيا والتعليمية منذ وضع باشلار Bachelard كتابه "تكوين الحقل العلمي".

لقد تطور تاريخ العلوم في القرن الماضي تطورا ملحوظا، وقد صحح تدريسه التصور اليقيني الذي كان سائدا في المدرسة التقليدية.

ولقد ساهم باشلار وغيره في إظهار الطبيعة المتقطة في بناء المفاهيم، عن طريق الحاجز الإبستمولوجي، والقطيعة الإبستمولوجية.

إن التفكير في علم ما عن طريق هذين يتطلب معرفة تاريخ هذا العلم، الذي لا ينبغي أن يكون تجميعا للسير الذاتية، بل تاريخ لتسلسل المفاهيم وانقطاعها

من بين أهم الحواجز الإبستمولوجية المذكورة في كتاب باشلار نجد:

- حواجز ناتجة عن استدلالات غير سليمة (خطورة التعميم السريع).
- حواجز لفظية.
- حواجز الإحساس المشترك (العلاقة بين الجزء والكل).
- حواجز تصورية (في الفيزياء مثلا نجد تصورات حول الذرة).

التعلم، الأخطاء، الحواجز

أ/ تصورات حول التعلم

إن الشروط التي يتم بها اكتساب التلميذ للمعارف هي محل تساؤل من طرف الفلاسفة والمربين، وبصفة خاصة السيكولوجيين، منذ القدم. هل يعتمد هذا الاكتساب على التلقين واستدعاء الذاكرة؟ أم على استدعاء الذكاء؟ وبشكل آخر، هل يعتمد الاكتساب على تصورات تقليدية أم بنائية؟

للإجابة على هذا التساؤل، يتوفر حاليا ثلاث أجوبة:

1) تصور الرأس الفارغ:

التلميذ عبارة عن وعاء يملأ بالمعرفة، ولهذا يسمى بالرأس الفارغة أو العجين الطري حيث يترك المعلم فيه بصمة أو أثرا. يتصف هذا النموذج بالمميزات التالية:

- يعتمد التعلم على الحفظ.
- للمعارف هيكلة وثوقية (Dogmatisme).
- تقدم المعرفة للتلاميذ جاهزة ومنظمة ومؤسسة (معترف بها من طرف المجتمع).
- يعتمد التخاطب بين المعلم والتلميذ على المبدأ: "ما نعبر عنه جيدا يفهم جيدا".

يكون هذا النموذج مفيدا إذا كان التلاميذ محفزين، ويملكون مرجعية موحدة. لكن قصوره يتمثل بالخصوص في:

- هناك فرق جوهري في معنى الخطاب بين المعلم والتلميذ.
- يمتلك التلميذ تصورات أولية لما يتناول معرفة جديدة.

2) تصور الخطوات الصغيرة:

يعتمد التوجه السلوكي على القول بأنه لا يمكن النفاذ إلى البناءات العقلية للتلميذ فقط سلوكاته الملحوظة تكون محل الدراسة. يمكن لهذه السلوكات أن تتعدل عن طريق التحريض يعقبه استجابة. يرتكز هذا النموذج على الفكرة: "لكي يمر التلميذ من مستوى معرفي إلى آخر، يكفي إعداده عن طريق مراحل وسيطية. تشمل كل مرحلة على صعوبة صغيرة على التلميذ تجاوزها".

من أهم مميزات هذا النموذج:

- تخطيط وعقلنة بناء حصص تعليمية عن طريق تحديد الأهداف المراد تحققها.
- إعطاء الاهتمام لنشاط المتعلم عن طريق تعليم فردي يعتمد على القدرات الذاتية.

هذا النموذج فعال في اكتساب المكانيزمات والمهارات، واستعمال الطريقة الاستكشافية عن طريق التعليم بالبطاقات والتعليم المساعد بالحاسوب. لكن قصوره يتمثل خصوصا:

- معرفة المهام المرحلية قد لا يكون كافيا للقيام بالمهمة الكلية.
- صعوبة الاستثمار في الوضعيات الجديدة.
- صعوبة إعطاء المعنى للتعلم.

3) التصور البنائي:

يعتمد هذا النموذج على مجموعة من الفرضيات المستعارة من التعليمية، وعلم النفس الوراثي، وعلم النفس

الاجتماعي، والابستمولوجية، وغيرها. أهم هذه الافتراضات:

الافتراض 1:

يمر اكتساب المعارف عبر التفاعل بين التلميذ والمشكل المراد حله.

الافتراض 2:

الذهن ليس فارغا ففيه تصورات تلقائية للمفهوم المراد تعلمه. ويقصد بالتصور مجموعة معارف الفرد التي يجندها للقيام بمهمة في لحظة ما ووضعية معينة.

مثال: يعتقد كثير من التلاميذ بصحة المتباينة التالية: "4,182 < 4,27" لأن هذا التصور لم يواجه بفكرة من النوع: " 5,33 <... < 5,32 " ليزول.

إذا: (كل تصور يبقى ولا يزول إذا لم يواجه بفكرة أخرى تغيره).

الافتراض 3:

تمر المعارف من حالة توازن إلى أخرى عبر مراحل من اللاتوازن، يتم فيها وضع المعارف الداخلية موضع شك.

مرحلة اللاتوازن هي الشعور بعدم كفاية المعارف المجندة للقيام بالمهمة، مما يولد الشك في وجاهتها. يتم عادة خلق هذا الاضطراب (بين تصور ساذج نريد تغييره بآخر أرقى) لما نستعمل وضعية مشكل، التي تفرض حاجزا يتطلب تجاوزه. فهناك إذن ضرورة لإعادة تنظيم وبناء المعارف حتى يدمج الجديد مع القديم.

الافتراض 4:

إيجاد الصراع المعرفي الاجتماعي عن طريق العمل الفوجي حتى يسهل التعلم.

والصراع المعرفي الاجتماعي هو نوع من الخلافات المعرفية والاجتماعية بين التلاميذ، عن طريق مواجهتهم بوضعية مشكل تتطلب حلا عن طريق:

- تخصيص فترات من النشاط (البحث عن الحل).
- الصياغة (النقاش والمجادلة).
- التصديق (الإثبات والبرهان).
- التأسيس (تنظيم المعرفة في شكلها البنائي).
- الاستثمار (التوظيف في سياقات متنوعة).

الافتراض 5:

يعطي التلميذ معنى للمعرفة، لما تظهر كأداة أساسية في حل مشكل.

أثناء حل التلميذ لوضعية مشكل، تظهر المعارف أولا على شكل أداة، قبل أن تتحول إلى موضوع. فهو أولا يعيد السياق والذاتية لهذه المعارف، حتى يتمكن من تمثيلها وتخصيصها، وبالتالي تأخذ المعرفة هيكلة الأداة، ثم بعد ذلك، يتجرد من السياق والذاتية، لتأخذ المعرفة هيكلة الموضوع.

ب / الأخطاء والحواجز والتصورات

1) الخطأ:

الخطأ لغة هو ضد الصواب، ويعرفه البعض الآخر بأنه حكم يناقض الحقيقة.

يمكن تصنيف المدارس، بناء على نظرتها للخطأ إلى:

- **المدرسة التقليدية:** الخطأ هو عمل غير كاف من طرف التلميذ، وهو ذنب يستوجب العقاب عن طريق: العلامة، إعادة السنة، الطرد.

يمكن تسيير الخطأ بإعادة الاكتساب وإعادة الشرح.

• **المدرسة السلوكية:** الخطأ هو شذوذ يجب تصحيحه عن طريق التمارين والدعم.

ينبغي أن يكون الخطأ مجنبا، وإذا حدث، فيرجع إلى كون التدرج المستعمل غير مناسب.

• **المدرسة البنائية:** الخطأ مؤشر لمسار تفكير التلميذ، وهو مؤشر على أن معرفة التلميذ في طور البناء. فالخطأ إذن هو جزء من سيرورة التعلم.

2) الحاجز:

يرتكز تحليل الخطأ على مفهوم الحاجز. ويمتاز بكونه معرفة تسمح بإنتاج أجوبة: صحيحة في سياقات معينة، وخاطئة في سياقات أخرى.

والحاجز هو العقبة والصعوبة التي تواجه الإنسان لتحد من نشاطه ، وتحول دونه وتحقيقه للأهداف. وقد يقف العائق في طريق المعلم فيتعذر عليه تحقيق الأهداف من الدرس كما قد تواجه هذه العقبة التلميذ فيصعب عليه فهم الدرس والإفادة منه.

خلال بناء المعرفة يلاحظ التلميذ وبصفة دورية أن المعارف والتصورات التي مكنته في الماضي من حل بعض المشكلات، لم تصبح بنفس الجدوى في وضعية جديدة .أي لم يبق لها المفعول الكافي للمساعدة على إيجاد الحل في الوضعية الجديدة وذلك ما يسمى بالحاجز. إن التنبؤ بهذه الحواجز أو البحث عنها وكشفها ومعاينتها يعد عملا جوهريا في التعليمية.

يقاوم الحاجز كل تعديل أو تحويل، ويظهر بطريقة تراجعية.

تجاوز الحاجز يتم لما ترفض هذه المعرفة، وبالتالي ظهور معرفة جديدة.

3) التصور:

يمكن اعتبار التصور (أو التمثيل أو المعرفة الداخلية،..) كنتيجة لنشاط ذهني يسمح للفرد بإعادة إنشاء الواقع المعاش اعتمادا على خبرته وتجربته وقناعته وتكوينه.

يمكن القول الآن أن الخطأ هو ظهور صريح لمجموعة من التصورات العفوية والتي لم يتم بناؤها بعد، مدمجة في شبكة متناسقة من التمثيلات المعرفية، مكونة حاجزا عن الاكتساب والتحكم في معارف جديدة.

جـ/ طبولوجيا الأخطاء:

اعتمادا على المثلث التعليمي – الذي يحدد العلاقات بين التلميذ والمعلم والمعرفة – يمكن تصنيف الأخطاء على الشكل:

1) أخطاء راجعة للتلميذ: هذه الأخطاء راجعة إلى محدودية النمو الوراثي للتلميذ. فمثلا حفظ الأطوال والمساحات والحجوم لا تتم (حسب أعمال بياجي) إلا بعد فترة من النضج العقلي. إننا أمام **الحواجز الوراثية** التي تزول بالنمو الطبيعي.

2) أخطاء راجعة للمعرفة:

هي أخطاء معروفة في تاريخ المفاهيم العلمية عموما، والرياضية خصوصا. وهي تميز الصعوبات التي لقاها الرياضيون أمام بعض المفاهيم: اللانهاية، العدد السالب، العدد التخيلي ...

إننا أمام **الحواجز الابستمولوجية**.

3) أخطاء راجعة للعلاقة بين التلميذ والمعرفة:

يرجع أصل هذه الأخطاء إلى تصورات أولية موجودة في ذهن التلميذ. فمثلا: "الضرب عملية تكبر دائما"، "الأعداد العشرية هي أعداد طبيعية مرفوقة بفاصلة" ...الخ.

إننا أمام **حواجز ثقافية أو تعليمية** لا مفر منها أثناء تكون المعرفة الرياضية.

4) أخطاء راجعة للاختيارات التعليمية للمعلم:

بعض الاختيارات البيداغوجية المطبقة في التعليم تزيد من الحواجز الثقافية. فمثلا: تقديم الأعداد العشرية كقياس المقادير، بدلا من تقديمها عن طريق المستقيم الحقيقي. إننا أمام **حواجز تعليمية**.

5) أخطاء راجعة للعلاقة التعليمية:

ترجع هذه الأخطاء إلى التوقعات التي يضعها التلاميذ والخاصة بما ينتظره المعلم منهم. فمثلا: "لكل تمرين حل"، "يجب استعمال كل المعطيات أثناء الحل".

نتكلم إذن عن **حواجز العقد التعليمي**.

د/ بعض الأمثلة عن الحواجز:

نعلم أن ذهن التلميذ يشمل تصورات ضمنية وهي من جهة تشكل حواجز للتعلم، ومن جهة أخرى فهي ضرورية لبناء المعرفة الرياضية.

وهذه بعض الأمثلة عن الحواجز:

1) حواجز ناتجة عن اختيار المناحي الأفقية والعمودية:

عادة ما يرسم الأطفال المستقيم إما أفقيا أو عموديا، لكنه ليس مائلا.

كما أن المثلث القائم والمتساوي الساقين قد يكون صعب التصور لدى البعض لكون التساوي الساقين يتطلب محور تناظر عمودي والتعامد يتطلب زاوية قائمة مكونة من شاقولي وعمودي.

عادة ما يتم رسم المربع أفقيا لكن رسمه مائلا يتحول لدى البعض إلى معين.

2) حواجز داخل وخارج الأشكال:

عادة ما ترسم ارتفاعات المثلث داخله أما خارجه فيجد التلاميذ صعوبة في تصور ذلك.

الحواجز داخل الشكل وخارج الشكل والمسار المتبع نجدها واضحة في التحويلات النقطية:

فالنقاط الداخلية لمثلث مثلا هي فقط التي لها صور بانسحاب ما.

كما أن الدوران (بالنسبة للزوايا الموجهة) هو واحد بالنسبة لتدوير $\frac{\pi}{3}$ أو $\frac{\pi}{3}+2\pi$ لكن ليس نفس الحركة.

3) الحاجز الخطي:

هناك أخطاء مرتكبة من طرف التلاميذ، وهي الأخطاء ترجع إلى نموذج الدالة الخطية، المطبق على دوال ليست خطية. وهذه بعض الأمثلة:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$

$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

$\sin(a + b) = \sin a + \sin b$

$\sin 2a = 2 \sin a$

$\log (a + b) = \log a + \log b$

$\frac{1}{x + y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

هـ/ الإبستمولوجيا والتصورات:

نعطي بعض الأمثلة عن حواجز إبستمولوجية وتصورات لبعض المفاهيم عبر العصور:

1) مفهوم العدد العشري:

التوسعات المختلفة التي أعطيت لمفهوم العدد تلزم التلميذ أن يعدل أو يثري تمثيله لهذا العدد، وبالتالي هناك خطر أن يتحول التمثيل القديم إلى حاجز يعيق التعلم.

لقد بين بروسو (Brousseau) بدراسة تاريخية حول الأعداد العشرية بأن الأعداد الطبيعية هي أكبر عائق لظهور الأعداد العشرية. فنتيجة لربطها بالقياس، أصبح الهدف ليس العدد العشري وإنما المقدار الفيزيائي مما يبين لنا خطورة الإفراط في استعمال المحسوس:

- الأعداد الطبيعية هي أصليات تعمل على عد وحدات منفصلة، ولكل منها عاقب. هذه الخاصية تختفي في الأعداد العشرية مما يجعل التلاميذ يتعرضون لأخطاء من النوع: "اعتبار 3.15 عاقب 3.14".

- تمثيل العدد العشري بعدد طبيعي مرفق بوحدة (على الشكل 3.15 هو 315 والوحدة هي 100) يؤدي إلى أخطاء من النوع: "عدم وجود أعداد طبيعية بين 3.1 و 3.2".

- اعتبار العدد العشري هو عدد طبيعي بفاصلة يؤدي إلى أخطاء من النوع:

"العدد الطبيعي ليس عددا عشريا".

"العدد $0,\underline{3} = \frac{1}{3}$ هو عشري".

"$(4,3)^2 = 16,9$" ...الخ.

2) مفهوم العدد السالب:

لقد تطلب عدة قرون لقبول الأعداد الصحيحة خاصة ما يتعلق بترتيبها (مثل: $-1 > -4$) وقاعدة الإشارات (مثل: $(-1)(-2) = (+1)$). إن تقديم العدد الصحيح على شكل وضعيات متضادة (تقدم / تأخر، صعود / نزول، مدخول / مخروج،...الخ) مناسب لجمع الأعداد الصحيحة التي يمكن تمثيلها بالانسحاب، لكنه غير مناسب لعملية الضرب التي يمكن تمثيلها بالتحاكي.

من أجل إكساب العدد الصحيح، هناك أربعة مراحل لذلك:

المرحلة 1: علاج الأعداد الصحيحة وكأنها أعداد طبيعية.

المرحلة 2: علاج الأعداد الصحيحة كجزءين منفصلين (الموجب والسالب).

المرحلة 3: علاج الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ عن طريق الموازنة.

المرحلة 4: علاج الحلقة $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

الانتقال من مرحلة إلى أخرى، يتطلب تجاوز حاجز يعترض التلميذ أثناء تعلمه. قد تكون الوسيلة في ذلك هي كما يوضحه المخطط التالي:

- استخدام الموازنة.
- الزيادة في ثقل الحسابات/ عدم تحديد المبدأ.
- استخدام النظير.

3) النظام البديهي (الهندسة الإقليدية نموذجا):

النظام البديهي هو نظام قائم على: البديهيات (المسلمات)، التعاريف، النظريات. ويمكن القول إن البديهية هي ما يوضع كلبنة تشيد عليها نظرية في ميدان الرياضيات. وتبديه نظرية يعني إيجاد نظام بديهي يمكن من إثبات القضايا الأساسية لهذه النظرية.

إن اللجوء إلى تبديه نظرية يكون ضرورة ملحة حينما تبلغ هذه النظرية مرحلة متقدمة من حيث كم النتائج التي تمكنت من حشدها.

وأول نظام بديهي عرفته البشرية هو الهندسة الإقليدية، وذلك في كتاب الأصول لإقليدس، وقد استخدم إقليدس بديهيات صريحة، وأخرى ضمنية، ويمكن الرجوع إلى كتاب الأصول لمعرفة هذه البديهيات أو المسلمات.

لقد أنزلت الهندسة التقليدية بالمظهر الذي رسمه لها إقليدي، ولعدة قرون، منزلة النظام النموذجي الذي يصعب الارتقاء إلى مستواه، فضلا عن التفوق عليه.

لا تدرج الحدود الخاصة بالنظرية إلا بعد أن يتم تعريفها، ولا تقدم القضايا إلا بعد إثباتها، باستثناء عدد محدود منها، وهي البديهيات، والقضايا المتفق عليها، التي تعتبر الأساس الذي يعتمد عليه البناء.

لا يمكن أن يتراجع البرهان إلا مالانهاية، بل عليه أن يعتمد على قضايا أولية، وهي قضايا تم انتقاؤها بعناية، بحيث لا يشك في صحتها أي إنسان عاقل سليم الفطرة.

وبالرغم من أن كل النتائج المنصوص عليها صادقة عمليا، إلا أنه لا يمكن الاعتماد على التجربة كحجة على صحة البراهين، ولا يتقدم المهندس إلا عن طريق البرهان، ولا يبني إثباتاته إلا على ما سبق البرهان عليه، باستخدام قواعد المنطق فقط.

إلا أن الآلية المنطقية التي تعتمد عليها الهندسة لا تخلو من الشوائب، وبعد الثورة المنطقية التي حدثت في القرن 19م – حيث أصبح ينظر إلى الاستنتاجات بأكثر صرامة – اتضح أن الاستنتاجات الهندسية التقليدية ناقصة في العديد من جوانبها.

لقد لوحظت هذه النقائص مبكرا، إلا أن الشعور بالهوة الكائنة بين العرض التقليدي للهندسة، ومتطلبات النظريات الاستنتاجية المثالية لم يتبلور إلا في القرن 19م.

وتظهر أهم النقائص في أمرين:

- تداخل البديهيات أثناء البراهين، واعتبار بعض القضايا مسلما بها بدعوى أنها واضحة حدسيا.
- تقديم إقليدس للأشكال غير ضروري للاستدلال، فدوره لا يتعدى دور الوسيط الذي يساعد الاستنتاج المنطقي بأن يكون له توضيحا محسوسا.

تجدر الإشارة لإلى أن أهم جدل طويل قد طال إحدى مسلمات لإقليدس، وهي المسلمة الخامسة التي تنص على أن: "إذا قطع مستقيم مستقيمين، وكان مجموع الزاويتين الواقتين في نفس الجهة أقل من قائميتن، فإن المستقيمين يلتقيان في هذه الجهة". وقد تفرع عن ذلك: "مجموع أقياس زوايا مثلث يساوي °180"، "من نقطة واحدة يمكن إنشاء مواز وحيد لمستقيم معلوم" ... وانتهى هذا الجدال إلى ظهور الهنددستين: ازائدية للوبتشفكسي، والناقصية لريمان.

التعبير والترميز في الرياضيات

أ / مفهوم التعبير والترميز

التعبير هو تمثيل الأشياء والأفكار، قصد معرفتها وتبليغها. والتمثيل يكون بالكلام أو بالرسم، أو بالإشارة، وكل هذه تسمى رموزا.

والترميز هو التعبير باستعمال الرموز.

إن هذه الرموز تعمل ضمن نظام معين، أي أنها رموز مقننة، مدونة في نظام يدعى اللغة. والشائع في الرياضيات هو استعمال اللغة القومية (عندنا اللغة العربية).

إن دراسة اللغة وإتقانها ضروريان لفهم الرياضيات، فبدون ذلك قد نقع في مغالطات، كما أن ركاكة التعبير تؤدي إلى الملل، وقد تؤدي إلى عدم الفهم.

ب / أنواع الترميز وشروط استعماله:

في معظم الحالات يكون الرمز اختصارا لغويا، أو تلخيصا لنتائج سابقة.

أمثلة:

• الرمز "ln" اختصار للكلمتين (logarithme Népérien)، والرمز "sin" اختصار للكلمة (sinus).

• العدد 31 المكتوب في الأساس 10 ممثل بالرقمين 1 و 3، وهو تلخيص لعدة مفاهيم درست سابقا (مفهوم العدد الطبيعي، مفهوم نظام العد، مفهوم الأساس).

إن اختيار الرموز يخضع لقواعد دقيقة وفعالة متفق عليها، في أماكن وأزمنة معينة. إن هذه الرموز وضعت شيئا فشيئا عبر التاريخ.

لضمان الاستعمال الجيد للرموز يجب التقيد بما يلي:

1) اختيار الرمز حسب جودته وظروف استعماله:

نعطي بعض الأمثلة للتبسيط:

• إن حساب المجموع (29 + 594) باستعمال الرموز الرومانية يتم بطريقة معقدة (LXCIV + XXIX)، بينما استعمال الأرقام العربية يؤدي بسهولة إلى نفس النتيجة.

• في إنجاز العملية $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a}$ نقوم بتوحيد الدلائل باستعمال ترميز وحيد:

$$\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{a^2}\times\sqrt[6]{a}=\sqrt[6]{a^{3+2+1}}=\sqrt[6]{a^6}=a$$

أو باستعمال الأس الناطق (مع ملاحظة أن استعمال الأس الناطق لا يكون إلا حينما يكون النمو كافيا):

$$\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a}=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=a^{\frac{6}{6}}=a$$

2) احترام المنطق:

• إذا كتبنا $\log_{10}2\Rightarrow 2=10^{\log_{10}2}$ فإننا لم نحترم قواعد المنطق، لأن $\log_{10}2$ ليست قضية. والصواب أن نكتب: $x=\log_{10}2\Rightarrow 2=10^x$.

• الكتابة التالية خاطئة:

$$a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N},\forall a,\forall b:(a/b)\Rightarrow b=ab'$$

لعدم ذكر 'b مثلا. وكان علينا أن نكتب:

$$\forall a\in\mathbb{N},\forall b\in\mathbb{N}:(a/b)\Rightarrow\exists b'\in\mathbb{N}:b=ab'$$

3) احترام الدقة الرياضية:

الرموز التالية خاطئة، لأنها لا تخضع للتعاريف العادية:

• $\frac{0}{0}$ لأن النسبة تقتضي الوحدانية، بينما كل عدد حقيقي x يحقق: $0.x=0$.

• $\frac{a}{0}(a\neq o)$ لعدم وجود أي عدد حقيقي x يحقق: $0.x=a$.

- $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ لأن أساس الدالة الأسية لا بد أن يكون موجبا تماما.
- $a = \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\,dx$ لأن التكامل غير متقارب.

4) احترام اللغة والنحو:

إن احترام اللغة والنحو له أهمية بالغة في التعبير والترميز الرياضي (وللأسف فقد فقد هذا الاحترام عند الكثير).

- إذا كتبنا: "العدد $a = e^{-1}$ أصم"، فإننا نكون قد عبرنا عن مساواتين عوض أن نعبر عن عدد حقيقي. وكان الصواب أن نقول: "العدد e^{-1} أصم".
- وإذا كتبنا: "لتكون المجموعة $E = \{1,2,3\}$"، فإننا نكون قد أضفنا للخطأ السابق خطأ نحويا (لتكن بدل لتكون)، وكان الصواب أن نقول: "لتكن المجموعة E حيث: $E = \{1,2,3\}$".

5) تجميع الرموز من اليمين إلى اليسار أو العكس:

وهو تابع لقواعد الكتابة حسب اللغة المستعملة. ومن المعلوم في التعليم المتوسط والثانوي أن الكتابة اللغوية تتم من اليمين إلى اليسار (اللغة العربية)، وأن الرموز الرياضية تتم من اليسار إلى اليمين (اللغة اللاتينية).

6) تجنب استعمال الرموز قبل الأوان:

مثل رموز المنطق، والأس الناطق والأصم. فإن عقل الطفل قد لا يستوعب هذه الرموز، لذا يجب أن ننتظر النضج الكافي، وتقديمها بالتدرج عبر مراحل.

7) تجنب الالتباس:

الكتابات التالية: $a \div b \div c$، a^{b^c} تتسبب في أخطاء، لأنها تجعل القارئ المبتدئ يظن أن القسمة أو الرفع إلى الأس عمليتان تجميعيتان، وتجعل حتى القارئ الممتاز يخطئ (أي عملية قسمة نبدأ بها)، ولهذا كان لابد من تدقيق باستعمال الأقواس مثلا.

8) الانتباه إلى التجاوزات في استعمال الرموز:

التجاوزات في استعمال الرموز مقبولة، شريطة أن لا تؤدي إلى أخطاء رياضية، فمثلا : يمكن أن نكتب

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$ بدلا من $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2$.
- $\mathrm{Cos}^2 x$ عوضا عن $(\mathrm{Cos}\ x)^2$.

8) عدم المبالغة في استعمال الرموز:

لأن ذلك غير صالح للتدريس بصفة عامة.

مثلا: إذا افترضنا مستويا (π)، ومثلثا ABC في (π)، فإننا نكون قد بالغنا في الكتابة التالية:

$$\forall(\pi), \forall ABC \in (\pi) : \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$$

ويكفي أن نقول: "مجموع أقياس زوايا مثلث °180".

جـ/ قضية الرموز العالمية:

بعض الرموز فعلا عالمية، مثل الأرقام، وعلامات الجمع والضرب ... وبعض رموز المنطق والمجموعات.

لكن عدة رموز تتغير تماما أو جزئيا، من منطقة إلى منطقة، ومن جماعة إلى جماعة. وهذا التغيير لا يسبب أي نقص في الدقة الرياضية، ولا يسبب الالتباس (بل ربما العكس هو الذي يفعل ذلك). وهذه بعض الأمثلة:

- نفي القضية P يرمز له بـ: $\overline{P}$، $\neg P$، $\sim P$.
- الاستلزام: $\Rightarrow$ أو $\rightarrow$، والتكافؤ: $\Leftrightarrow$ أو $\leftrightarrow$.

الاحتواء: $\subset$ أو $\subseteq$.

حل المشكلات في الرياضيات

1 / مفهوم المشكلة الرياضية:

المشكلات الرياضية هي إما تمارين أو مسائل، حيث إن معظم الأنشطة الرياضية هي حل التمارين والمسائل (والمقصود هنا المتعلمين قبل التعليم العالي).

والتمرين هو نشاط فكري مناسب لتدريب الفكر، يقوي مرونته، ويتدرب فيه التلميذ على مفاهيم سابقة أو جديدة، وعلى تنسيقها وانسجامها مع مجموعة من معارفه، في إطار برنامج معين، وهي أنواع:

- تمارين تحضيرية، وهي أنشطة تخدم مفهوما ما.
- تمارين تطبيقية تطبق الدرس من نوع التقويم، ومنها تمارين المرجعة.
- تمارين للتسلية، والهدف منها عادة يتجاوز التسلية، فيوجه لتمتين الفكر، وتوسيع المعرفة.

والمسألة هي تمرين أطول وأضخم من التمرين.

2 / أهمية حل المشكلات في تدريس الرياضيات:

يعتبر الهدف الأساسي من حل المشكلات في الرياضيات هو تدريب الطلاب على بعض الطرق والأساليب التي تساعدهم على حل المشكلات بوجه عام.

وتظهر أهمية أسلوب حل المشكلات فيما يلي:

- تساعد الطالب على اكتشاف مفاهيم جديدة.
- تعلم الطالب كيفية تطوير وتحويل المفهوم لاستخدامه في حل مشكلة جديدة .
- تعود الطالب على التفكير العلمي الناقد.
- تساعد على ترابط وانسجام المفاهيم الرياضية.
- تطور بعض قدرات الطالب العقلية مثل التخيل والتصور والتجريد والتحليل والتركيب.
- تثير حب الاستطلاع والاكتشاف لدى الطالب.
- تنمي قدرة الطالب على تحليل المواقف واتخاذ القرارات.

3/ بعض استراتيجيات حل مشكلة رياضية:

يمكن للطالب استخدام العديد من الاستراتيجيات للوصول إلى حل المشكلة مستخدماً: المحاولة والخطأ، التجريب، حل مشكلة مشابهة ولكن أبسط، البدء من المطلوب، التحليل، التركيب، الرسوم التخطيطية، الجداول، الأشكال، الحل العددي، استبعاد بعض الحالات ...

وهذه بعض المقترحات لتنمية مهارات الطلاب في حل المشكلات

- توضيح المعطيات والعبارات الموجودة في السؤال وتلخيصها بصور مختلفة.
- التأكد من فهم الطلاب للخبرات السابقة الموجودة في السؤال.
- التأكد من وضوح المطلوب عند الطلاب.
- مساعدة الطلاب على اكتساب المهارة في رسم الأشكال أو الجداول التي تعبر عن المسألة.
- استخدام الألوان في رسم الأشكال قد يساهم في توضيح المسألة.
- محاولة ربط المسألة بحياة الطالب العملية.

• جمع الأفكار والوسائل التي تساعد الطلاب على تحليل المشكلة والنظر إليها من زوايا مختلفة.

• الاستفادة من أساليب أخرى مماثلة استُخدمت في حل مشكلات مشابهة.

• إعطاء بعض التلميحات التي تساعد على تبسيط المشكلة.

• تشجيع الطلاب على وضع الفرضيات لحل المسألة بغض النظر عن صوابها أو خطئها ومن ثم مساعدة الطلاب على تبين صحتها من عدمه.

• تشجيع الطلاب على حل المسألة بأكثر من طريقة إذا أمكن ذلك.

4 / نماذج عن مشكلات رياضية:

المشكل الأول: باستعمال الآلة الحاسبة حدد كل الأعداد الطبيعية a ، b مع $a \leq b$ بحيث: $a^2 + b^2 = 225$.

المشكل الثاني: نريد البحث عن كل المثلثات ABC القائمة في A بحيث: AB = 8، BC و AC أعداد طبيعية.

1) احسب $BC^2 - AC^2$.

2) جد كل التفكيكات الممكنة للعدد 64 على شكل جداء عددين طبيعيين.

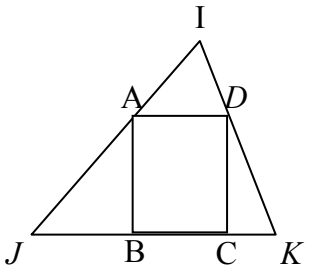
3) y و z عددان طبيعيان.

أ) حل الجملة $\begin{cases} z + y = 16 \\ z - y = 4 \end{cases}$.

ب) استنتج قيمة ممكنة لـ AC و BC .

ت) هل يمكن إيجاد قيم أخرى لـ AC و BC؟

المشكل الثالث: IJK مثلث.



أنشئ مربعا ABCD بحيث يكون B، C تقعان داخل القطعة [JK] و A تقع داخل [IJ] و B تقع داخل [IK].

المشكل الرابع: إليك المجموع التالي:

$$S_n = 1 + 2 + ... + (n-1) + n + (n-1) + ... + 3 + 2 + 1$$

أعط عبارة المجموع S_n بدلالة n (برر جوابك).

المشكل الخامس: ABC مثلث قائم في A. P نقطة من [BC]. I، J مسقطاها العموديان على [AB]، [AC].

1) عين على [BC] النقطة P بحيث يكون IJ أصغريا.

2) هل هذا التعيين وحيد ؟

3) في هذه الحالة كيف يصبح المثلث ABC حين يكون (IJ) ، (BC) متوازيين ؟

4) برهن أن (AK) و (I_0J_0) متعامدان حيث I_0J_0 هو الطول الأصغري للقطعة $[I_0J_0]$.

المشكل السادس: احسب مساحة الشكل المظلل