University de Msila
Faculté M.I
Département des Mathématiques

TD 1_Logique algébrique

L'objet de ce problème est d'obtenir des théorèmes de représentation pour les Ł$_{3-}$algèbres (algèbres trivalentes de Łukasiewicz)

I- **Préliminaire sur les treillis**

On considère un treillis $L$ distributif et fermé (avec 0 et 1). On désigne par $C(L)$ le sous treillis booléen des éléments complémentés (ou chrysippiens) de $L$, si $x \in C(L)$ on note $x'$ son complément.

**1**°/ Soit a un élément fixé de $L$, on définit la relation binaire dans $L$, notée $x \equiv y\,(a)$, par : $a \wedge x = a \wedge y$.

Montrer que c'est une relation d'équivalence compatible avec les lois $\wedge$ et $\vee$. On pourra définir le treillis quotient qui sera noté par $L \diagup a$.

**2**°/ On fixe maintenant $a \in C(L)$, pour tout élément $x$ de $L$ on notera $\bar{x}$ sa classe
dans $L \diagup a$ et $\tilde{x}$ sa classe dans $L \diagup$ à.

Montrer que l'application $\theta$ définie par $\theta(x) = (\bar{x}, \tilde{x})$ est un isomorphisme du treillis $L$ sur le treillis produit $L \diagup a \times L \diagup$ à.

II- **Complément sur les Ł$_{3-}$algèbres**.

Soit $(L, \wedge, \vee, 1, 0, N, \mu)$ une Ł$_{3-}$algèbre (au sens de la première définition de Moisil),

on y définit comme d'habitude les autres modalités $\eta, \gamma, \upsilon$. On définira

également deux opérateurs nouveaux $\sigma$ et $\tau$ par : 
$$\begin{aligned} \sigma x &= \upsilon x \vee \eta x \\ \tau x &= \mu x \wedge \gamma x \end{aligned}$$

On pose enfin les définitions suivantes :
Un élément $x$ de $L$ est dit *possible* si $\mu x = 1$.
Un élément $x$ de $L$ est dit *contingent* si $\gamma x = 1$.
Un élément $x$ de $L$ est dit *centre* s'il est à la fois possible et contingent.

1°/

a) Montrer que pour tout $x \in L$, $x \vee Nx$ est possible.

b) Montrer que pour tout $x \in L$, $x \wedge Nx$ est contingent.

c) Montrer que s'il existe un centre, il est unique
(dans ce cas on dit qu'on a une $Ł_{3-}$algèbre *centrée*).

d) Montrer que $x$ est un centre si et seulement si $x = Nx$.

2°/ Soit $a \in C(L)$, montrer que la relation d'équivalence définie en I-1°

est compatible avec $N$ et $\mu$. Ceci permet de définir une structure de $Ł_{3-}$algèbre sur $L \diagup a$.

2°/
On définit de façon classique (composante par composante) le produit de deux $Ł_3$-algèbres, qui est aussi une $Ł_3$-algèbre (résultat peuvant être considéré comme évident). Montrer que l'application $\theta$ définie en $I - 2°$ est alors un $Ł_3$-isomorphisme.
3°/

a) Montrer qu'un élément $x$ de L est chrysipien si et seulement si $\tau x = 0$.

b) Montrer qu'un élément $x$ de L est le centre si et seulement si $\sigma x = 0$.

c) Montrer que pour tout élément $a$ de $L$, L est isomorphe (au sens des $Ł_3$-algèbres) à $L \diagup \sigma a \times L \diagup \tau a$.

4°/
Soit $L$ une $Ł_3$-algèbre ayant un centre $\omega$ et dont tous les autres éléments sont sont chrysippiens, Montrer que L est isomorphe à la chaine $T = \{0, 1/2, 1\}$.
Indication : si $x \in L$ et $x \neq \omega$, on poura distiguer les deux cas : $x \wedge \omega = \omega$ ou $x \wedge \omega$ est chrysippiens.

## III- - <u>THÉORÈMES DE REPRESENTATION DES $Ł_3$-ALGÈBRE FINIES</u>

Montrer que tout $Ł_3$-algèbre finie L est isomorphe à un produit fini $U^p \times T^q$ $(p \geq 0, q \geq 0)$, ou $U = \{0, 1\}, T = \{0, 1/2, 1\}$.
Indication : on choisira, si cela est possible, un élément a de L qui n'est ni chrysippien ni le centre éventuel et on utilisera II-3°.
N.B. Il en résulte card$(L) = 2^P \times 3^q$.

## III- **Représentation booléenne**

1°/ Soit $B$ une algèbre booléenne, on peut construire l'algèbre booléenne produit $B^2$, si $x \in B$ on notera $x\prime$ son complément (booléen) dans $B$.

On pose : $L(B) = \left\{(x,y) \in B^2 / x \leq y\right\}$.

a) Montrer que $L(B)$ est un sous treillis du treillis $B^2$.

b) Montrer que $L(B)$ est une $Ł_{3-}$algèbre (au sens de la première définition de Moisil)

en définissant les opérateurs : $$\begin{aligned} N(x,y) &= (y', x') \\ \mu(x,y) &= (y,y) \end{aligned}$$

2°/

**a)** Réciproquement, soit $L$ une $Ł_{3-}$algèbre quelconque, montrer que l'application

1. $\phi$ définie par :

   si $x \in L$ $\quad \phi(x) = (\upsilon x, \mu x)$

est une $Ł_{3-}$monomorphisme de $L$ dans $L(C(L))$.

b) Montrer que $\phi$ est un isomorphisme si et seulement si $L$ est une $Ł_{3-}$algèbre.