Université de Msila
Faculté : M. I
Département des Mathématiques

TD 3_Logique algébrique

Exercice

A- On sait qu'une algèbre $(L, \rightarrow, N, 1)$ de type $(2, 1, 0)$ est équivalente à une algèbre trivalente de Łukasiewicz $(L, \wedge, \vee, N, 0, 1, \mu)$ via les transformations

(LW) $x \rightarrow y = (\mu N x \vee y) \wedge (\mu N y \vee x) = [(\mu N x \wedge y) \vee N x \vee y]$ et

(WL1) $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y,$

(WL2) $x \wedge y = N\left(N x \vee N y\right),$

(WL3) $\mu x = N x \rightarrow x,$

(WL4) $N 0 = 1,$

si et seulement si

(W1) $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1,$

(W2) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1,$

(W3) $((x \rightarrow N x) \rightarrow x) \rightarrow x = 1,$

(W4) $(N x \rightarrow N y) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1,$

(W5) $1 \rightarrow x = 1 \Rightarrow x = 1,$

(W6) $x \rightarrow y = 1$ et $y \rightarrow x = 1 \Rightarrow x = y.$

1. Montrer que la relation définie sur L par $x \leq y$ si et seulement si $x \rightarrow y = 1$ est un ordre partiel sur L.
2. Montrer que si $x \leq y$, alors $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$.
3. Montrer que $(x \rightarrow N x) \rightarrow x = x$, et que $N x \leq x \rightarrow y$.
4. Montrer que $N N x = x$. et que $N y \rightarrow N x = x \rightarrow y$
5. Montrer que $x \leq y \Rightarrow N y \leq N x$ et $1 \rightarrow x = x$
6. Montrer que $x \leq x \vee y$ et que $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$.
7. Montrer que $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$.

B- Soit $\left(L,\, I^0,\, (\varphi_\alpha)_{\alpha\in I^0}\,,\, (\psi_\alpha)_{\alpha\in I^1}\,,\, n,\, N\right)$ une algèbre Łukasiewicz multivalente involutive.

1. Montrer que toute algèbre de Łukasiewicz multivalente involutive est une algèbre de Kleene, c.-à-dire $x \wedge Nx \leq y \vee Ny$, $(\forall x, y \in L)$

2. On suppose maintenant que $L = \{1, 2, ..., p-1\}$.
Montrer que $N(i) = p - i$, pour tout $i \in L$.