الفصل الثالث: طريقة السمبلكس

الفصل الثالث: طريقة السمبلكس simplex method

تناولنا في الفصل الثاني طريقة الرسم البياني لحل مسائل البرمجة الخطية وبما أن هذه الطريقة تستعمل كل المسائل ذات المتغيرات فقط وبما أن معظم مسائل البرمجة الخطية تحتوي في غالب الحيان على عدد كبير من المتغيرات خاصة منها المسائل المتعلقة بعملية الإنتاج أين يكون عدد المتغيرات كبير جدا فيستحيل استعمال طريقة الرسم البياني ونلجأ حينئذ إلى طريقة السمبلكس simplex method .

1.3. طريقة السمبلكس الشكل القانوني

تقوم طريقة السمبلكس على إجراء عدد محدد من العمليات الحسابية وفق منهجية محددة على الجداول الملخصة للمعطيات المقابلة للمسألة محل الدراسة والمسماة جداول السمبلكس وفي نهاية كل مرحلة من مراحل هذه الحسابات يجري اختبار للحل الناتج وبناء على النتائج المحصل عليها يتم اتخاذ القرار بمواصلة العمليات الحسابية من جديد أو التوقف وإن كانت المسائل المعالجة وفق هذه الطريقة عديدة ومتنوعة إلا أنها تتفق في مجموعة من النقاط التي تشكل مراحل هذه الطريقة.

يمكن تلخيص الخطوات التي تتضمنها طريقة السمبلكس في خمس خطوات كما يلي:

1– وضع مشكلة البرمجة الخطية في شكلها القياسي (النمطية المعيارية).

2– إيجاد الحل الأساسي الأولي (المبدئي المسموح به) عبارة عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة وفي الغالب هي نقطة الصفر.

3– اختبار مثلوية الحل (إمكانية تحسين الحل القائم).

4– تحسين الحل القائم ويتم ذلك من خلال الخطوات التالية:

أ– تحديد المتغير غير الأساسي والذي لا يوجد في الحل الحالي والذي يجب إدخاله في الحل الأساسي الجديد.

ب– تحديد المتغير الأساسي الموجود في الحل الحالي والواجب خروجه من الحل.

ج– تحديد قيم المتغيرات الموجودة في الحل الجديد وهو يعبر في نقطة ركنية في منطقة الإمكانيات (منطقة الحلول) وكذلك تحديد قيم المعاملات الجديدة في معادلات القيود.

د- الرجوع إلى الخطوة الثالثة وتكرار عملية التقييم.

5- إذا كان التحسين غير ممكن فإن الحل الذي توصلت إليه يكون هو الحل الأمثل.

2.3. الشكل القياسي (النمطي) للبرنامج الخطي

تتمثل هذه المرحلة في صياغة النموذج الرياضي المقابل للمسألة محل الدراسة إلى شكل قياسي (معياري)

1- جميع القيود يجب أن تظهر على شكل معادلات.

2- جميع المتغيرات تحقق شروط عدم السلبية.

3- دالة الهدف تسعى إلى تحقيق المثلوية (تعظيم أو تصغير)

4- الجانب الأيمن للقيود يجب أن تكون موجبة أو معدومة.

1) تحويل القيود إلى الشكل المعياري:

أ- القيود في النوع أصغر أو يساوي $\leq$ يعالج هذا النوع من القيود كما يلي:

بما أن الجهة اليسرى أكبر من الجهة اليمنى فإن تحقيق المساواة لا يتم إلا بإضافة متغير بإشارة موجبة إلى الجهة اليسرى يساوي الفرق بين الجهة اليسرى واليمنى.

مثال:

$5X_1 + 2X_2 \leq 10$

$5X_1 + 2X_2 + S_1 = 10$

المعنى الاقتصادي ل S

يشكل المتغير S الزيادة في الجانب الأيمن من الجانب الأيسر وهو يضمن أن الكميات المستخدمة في الموارد لن تزيد عن الكمية المتاحة ولكن يمكن أن تقل عنها وبالتالي يشكل S الكمية غير المستخدمة من المورد المتاح ويسمى S كذلك بالمتغير الراكد أو العاطل أو متغير الفرق.

ب- القيود من النوع أكبر أو يساوي $\geq$

2- دالة الهدف:

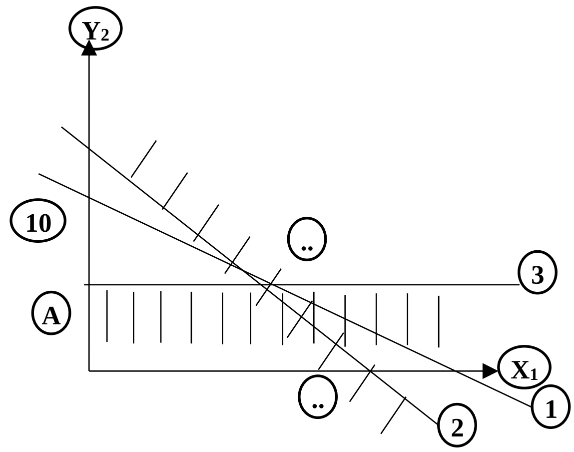
تعامل دالة الهدف كأي قيمة حيث تنقل جميع المتغيرات إلى الجهة اليسرى ويبقى في الجهة اليمنى الرقم صف (الحالة العامة)

$Z_0 = 4X_1 + 3X_2 \Rightarrow Z_0 - 4X_1 - 3X_2 = 0$

مثال:

$MaxZ = 2X_1 + 3X_2$

$$\begin{cases} 6X_1 + 3X_2 \leq 30 \\ 4X_1 + 5X_2 \leq 20 \\ X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$



$6X_1 + 3X_2 = 30 \quad X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 10$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5$

$4X_1 + 5X_2 = 20 \quad X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 4$

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5$

$X_2 = 3$

$A(0,0) \Rightarrow Z_A = 0$

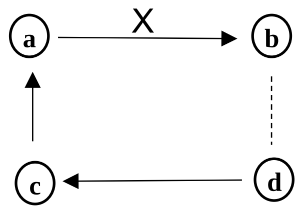
$B(0,3) \Rightarrow Z_B = 9$

$C(5/1,25) \Rightarrow Z_C = 2(5/4)+9$

$Z_C = 23/2$

$D(5,0) \Rightarrow Z_D = 10$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	6	3	1	0	0	30
S_2	4	5	0	1	0	20
S_3	0	1	0	0	1	3
Z	−2	−3	0	0	0	0



	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	6	0	1	0	−3	21
S_2	4	0	0	1	−5	5
X_2	0	1	0	0	1	3
Z	−2	0	0	0	3	9

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	0	0	1	−6/4	9/2	3
X_1	1	0	0	1/4	−5/4	5/4
S_2	0	1	0	0	1	3
Z	0	0	0	1/2	1/2	23/2

1- نختار أكبر قيمة متبوعة بإشارة سالبة من السطر Z يسمى عمود الارتكاز، ثم نقسم قيم عمود الموارد على قيم عمود الارتكاز ونختار حاصل أقل قيمة والذي يمثل سطر الإرتكاز، تقاطر سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز يسمى عنصر الارتكاز.

2- يجري تحويل عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز إلى القيمة1 وعناصر العمود الأخرى إلى قيم معدومة.

يتم تحويل سطر عنصر الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الارتكاز.

العناصر المتبقية نتحصل عليها باستعمال القانون الآتي:

العنصر الجديد = العنصر القديم – العنصر الموجود في نفس السطر في عمود الارتكاز X العنصر الموجود في نفس العمود وفي سطر الارتكاز

عنصر الارتكاز

من خلال المثال الذي تطرقنا إليه نلاحظ أن كل القيود كانت على الشكل ≤ أقل أو يساوي والطرف الثاني في كل قيمة كان موجبا لهذا تم الحصول على المتغيرات الأساسية في كل قيد بسهولة غير أنه في الواقع قد تواجهنا بعض المسائل لا يكون فيها كل القيود على شكل أقل من أو يساوي والطرف الثاني للمتراجحات قد لا يكون دائما موجبا في حل مثل هذه المسائل نلجأ إلى استخدام إحدى الطرق الآتية:

1) طريقةM

2) طريقة المرحلتين

1) طريقةM : سيتم الاستعانة بالمثال الآتي لشرح هذه الطريقة.

مثال: أوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية التالية:

$\text{Min}Z = 5X_1 + 7X_2$

$X_1 + 2X_2 = 50$

$X_1 \geq 20$

$X_1 \leq 20$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحل:

1− يتم تحويل قيود النموذج إلى النموذج القياسي أو المعياري بإضافة المتغيرات المكملة.

$$MinZ = 5X_1 + 7X_2$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = 50 \\ X_1 \geq 20 \\ X_2 \leq 20 \\ X_1\ ,\ X_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + 2X_2 + a_1 = 50 \\ X_1 - S_2 + a_2 = 20 \\ X_2 + S_3 = 20 \\ X_1\ ,\ X_2\ ,S_3 \geq 0 \end{cases}$$

وحتى يكون الحل الأمثل صحيحا يجب إضافة المتغيرات الوهمية او الإصطناعية إلى دالة الهدف:

$$MinZ = 5X_1 + 7X_2 + Ma_1 + Ma_2$$

$$a_1 = 50 - X_1 - 2X_2$$

$$a_2 = 20 - X_1 + S_2$$

$$MinZ = 5X_1 + 7X_2 + M(50 - X_1 - 2X_2) + M(20 - X_1 + S_2)$$

$$5X_1 + 7X_2 + 50M - X_1M - 2X_2M + 20M - X_1M + S_2M$$

$$(5 - 2M)X_1 + (7 - 2M)X_2 + MS_2 + 70M$$

$$MinZ = (5 - 2M)X_1 + (7 - 2M)X_2 + MS_2 + 70M$$

$$MinZ = 0$$

$$(5 - 2M)X_1 + (7 - 2M)X_2 + MS_2 + 70M = 0$$

$$(-5 + 2M)X_1 + (-7 + 2M)X_2 - MS_2 = 70M$$

	X_1	X_2	a_1	S_2	a_2	S_3	
a_1	0	2	1	0	0	0	50
a_2	1	0	0	−1	1	0	20
S_3	0	1	0	0	0	1	20
Z	−5+2M	−7+2M	0	−M	0	0	70M

	X_1	X_2	a_1	S_1	a_2	S_3	
a_1	0	2	1	0	0	0	30
X_1	1	0	0	−1	1	0	20
S_3	0	1	0	0	0	1	20
Z	0	−7+2m	0	5−m	−5+2m	0	−100+30m

	X_1	X_2	a_1	S_1	a_2	S_3	
X_2	0	1	½	½	−1/2	0	15
X_1	1	0	0	1	1	1	20
S_3	0	0	−1/2	−1/2	−1/2	1	5
Z	0	0	7/2−M	−3/2	3/2−M	0	205

الجدول الثالث يمثل الحل الأمثل لأن جميع القيم في السطر z سالبة أي أن شرط الأمثلية محقق والشرط العملي كذلك محقق.