CHAP III : CONDUCTION BIDIMENTIONNELLE EN REGIME PERMANENT

Dans le cas où la diffusion de la chaleur ne s'effectue pas selon une direction unique, dans ce cas là, il y a quelques méthodes de résolution peuvent être appliquées :

2.1 Méthode du coefficient de forme

Dans les systèmes bidimensionnels ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T1 et T2, on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme

$\Phi=\lambda.F.(T1-2)$

Avec : λ Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S
T1 : Température de la surface S1
T2 : Température de la surface S2
F : Coefficient de forme (m)

Le coefficient de forme F ne **dépend que de la forme**, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S1 et S2.

2.2 Méthodes numériques

Dans ce cas là on prend l'équation de l'équation de Laplace en différences finies :

$$\Delta T=0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad \text{(III.1)}$$

Pour résoudre l'équation de Laplace numériquement. en discrétisant le domaine considéré espace ou plan , (figure II.1).

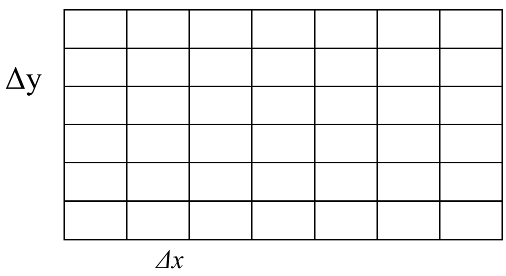

Figure III.1 : Représentation du maillage rectangulaire

Les dérivées partielles de la température T(x,y) peuvent s'exprimer selon les développements en série de Taylor :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x+\Delta x, y) - T(x, y)}{\Delta x} + \text{erreur} \qquad \text{(III.2)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(x+\Delta x, y) - 2T(x, y) + T(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} + \text{erreur} \qquad \text{(III.3)}$$

et de même par rapport à y ;

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T(x, y+\Delta y) - T(x, y)}{\Delta y} + \text{erreur} \qquad \text{(III.4)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T(x, y+\Delta y) - 2T(x, y) + T(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} + \text{erreur} \qquad \text{(III.5)}$$

L'équation de Laplace en bidimensionnelle s'écrit alors (*erreur négligeable*):

$$\frac{T(x+\Delta x, y) - 2T(x, y) + T(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} + \frac{T(x, y+\Delta y) - 2T(x, y) + T(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2} = 0 \qquad \text{(III.6)}$$

Et si l'on choisit $\Delta x = \Delta y =$ **h** , l'eq. (II.6) devienne :

$$\frac{T(x+\Delta x, y) + T(x-\Delta x, y) - 4T(x, y) + T(x, y+\Delta y) + T(x, y-\Delta y)}{h^2} = 0 \qquad \text{(III.7)}$$

Le schéma numérique

les dérivées secondes des équations (III.3) et (III.5) s'écrivent en un point **(i ,j)** dans le domaine numérique (fig.III.2)par :

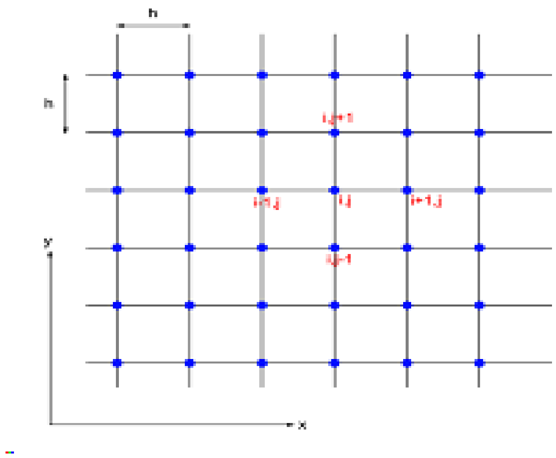

Figure III.1 : Représentation du maillage rectangulaire numérique

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(i+1,\, j) - 2T(i,\, j) + T(i-1,\, j)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T(i,\, j+1) - 2T(i,\, j) + T(i,\, j-1)}{\Delta y^2}$$

L'équation (III.7) devienne :

$$\frac{T(i+1,\, j) + T(i-1,\, j) - 4T(i,\, j) + T(i,\, j+1) + T(i,\, j-1)}{h^2} = 0 \qquad \text{(III.8)}$$

T(i,j)= [T(i+1,j)+T(i-1,j)+T(i,j+1)+T(i,j-1)]/4 (III.9)

La résolution de l 'équation (III.9) s’effectue par la méthode itérative de Gauss-Siedel (par exemple). On effectue des itérations successives.

Les conditions aux limites imposant sur un bord une température de surface s’expriment simplement en fixant la valeur de la température T(i,j) à la valeur imposée pour tout couple (i,j) représentant un point de ce bord.

CHAP IV : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME VARIABLE

IV.1 Conduction unidirectionnelle en régime variable sans changement d'état

IV.1.1 Milieu à température uniforme

On va étudier le transfert de chaleur vers un milieu supposé **à température uniforme**. Soit par exemple le refroidissement d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température **To** dans un bain à température **Tf** maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique élevée, on peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants **t** et **t + dt ,** on utilise l'équation générale de la conduction en chapitre I, alors :

$$\rho c_p V \frac{dT}{dt} = -hs(T - T_f) \qquad \text{(IV.1)}$$

tel que:

h est le coefficient d'échange thermique par convection de l'eau

S est la surface d'échange (surface de la bille) et **V** est son volume

On intègre l'eq. (IV.1) on obtient:

$$\frac{T - T_f}{T_o - T_f} = e^{-\frac{hs}{\rho C_p . V} t} \qquad \text{(IV.2)}$$

On remarque que le terme $\frac{\rho C_p . V}{hs}$ est homogène à un temps, on l'appellera τ la constante de temps du système , on remplace dans (IV.2) , on a:

$$\frac{T - T_f}{T_o - T_f} = e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{(IV.3)}$$

Remarque:

Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, deux nombres adimensionnels sont particulièrement important en régime variable :

1) Le nombre de Biot : Bi= $\dfrac{\text{Résisance thermique interne}}{\text{Résisance thermique externe}} = \dfrac{l}{\lambda s} \Big/ \dfrac{1}{hs} = \dfrac{h.l}{\lambda}$

l est la dimension caractéristique du milieu, **l = r** pour une sphère.

L'hypothèse d'uniformité de la température est justifiée lorsque Bi < 0.1

2.) Le nombre de Fourier :

est définie par : $Fo = \dfrac{\alpha}{l^2} t$ avec $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho C_p}$

Le nombre de Fourier caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable. La définition de ces deux nombres permet d'écrire l'expression de la température de la bille (eq.II.2) sous la forme :

$$\frac{T - T_f}{T_o - T_f} = e^{-Bi.Fo} \qquad \text{(IV.4)}$$

La connaissance du produit des nombres de Biot et de Fourier permet de déterminer l'évolution de la température de la sphère. On considère généralement qu'un système tel que **Bi < 0,1** peut être considéré comme étant à température uniforme.

Application:

Une bille d'Aluminium de 1 cm de rayon est initialement à une température de 20 C°, en immerge cette bille dans un bain d'eau de température de 70 C°.
1) déterminer la température en fonction de temps
2) au bout combien de temps que la différence de température ($T-T_f$) atteint 0.5 C° ?
3) Ecrire l'équation de température en fonctions des nombres de Bio et Fourier.